УДК 532.5

Д.В. Маклаков, Р.Р. Шарипов

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ НАД ВПАДИНОЙ

Рассматривается стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой жидкости над горизонтальным дном, имеющим впадину *ABCD* (рис.1). Вводится декартовая система координат *(x,y)*, ее начало лежит в середине отрезка *AD*. Задаются H - глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, V_0 - скорость набегающего потока, $a\,p$, $b\,p$ - углы наклона левой и правой стенки впадины к оси *Ox*, соответственно, g - ускорение силы тяжести, h и l - глубина и ширина впадины соответственно. Сила тяжести действует в направлении обратном направлению оси *Oy*. Рассматриваются сверхкритические режимы течения, когда число Фруда $Fr = \dfrac{V_0}{\sqrt{gH}} > 1$ и волны на свободной поверхности справа на бесконечности отсутствуют.

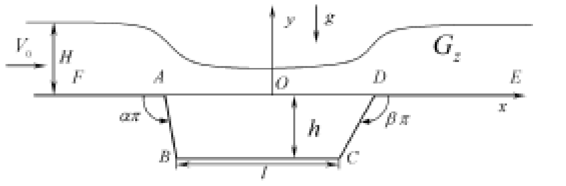

Рис. 1. Физическая область течения

Отобразим область течения в физической плоскости G_z, $z = x + iy$ на полосу $G_t = \{0 < h < p/2\}$ в плоскости комплексного переменного $t = x + ih$. Соответствие точек выберем так, чтобы бесконечно удаленные F и E перешли в бесконечно удаленные, а угловые точки A, B, C, D перешли соответственно в точки $t = -a$, $t = -c$, $t = c$, $t = a$, причем точки B и C симметричны относительно начала координат (рис.2).

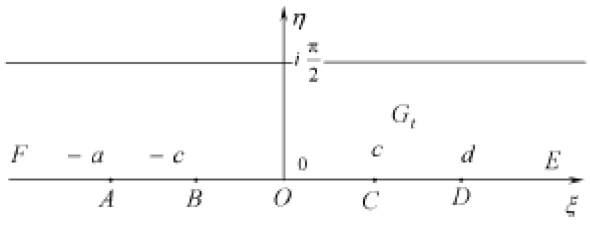

Рис. 2. Параметрическая область течения

Введем аналитическую функцию

$$c\,(t) = \ln\left(\frac{p}{2H}\frac{dz}{dt}\right) = m + it\,.$$

Если функция $c(t)$ найдена, то искомое конформное отображение $z(t)$ определяется интегралом $z(t) = H\dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^t e^{c(t)}dt\,.$

Для $c\,(t)$ ставится краевая задача, которая затем сводится к нелинейному интегральному уравнению относительно функции $l\,(x) = \dfrac{dm(x + ip/2)}{dx}$ – производной по x реальной части функции c на верхней границе полосы:

$$l\,(x) = \frac{2}{pFr^2}\exp(3S[\,l\,](x))\sin(TS[\,l\,](x) + f(x,a,c,d)), \quad (1)$$

где $S[\,l\,](x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} l\,(s)ds$, $TS[\,l\,](x)$ – суперпозиция операторов T и S, $f(x,a,c,d)$ заданная функция своих аргументов.

Для определения параметров $a,\,c,\,d$ имеем систему условий:

$$\frac{l}{H} = \frac{2}{p}\int_{-c}^{c}\exp(T_0S[\,l\,](x) + f_0(x,a,c,d))dx\,, \quad (2)$$

$$\frac{h}{H} = \frac{2}{p}Sin\,(a\,p\,)\int_{-a}^{-c}\exp(T_0S[\,l\,](x) + f_0(x,a,c,d))dx\,, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l\,(x)dx = 0\,. \quad (4)$$

Здесь $f_0(x,a,c,d)$ также является заданной функцией своих аргументов.

Уравнение (1) вытекает из условия постоянства давления на свободной поверхности и уравнения Бернулли. Соотношения (2) и (3) следуют из условий задания длины и глубины впадины. Соотношение (4) означает, что уровни дна слева и справа на бесконечности совпадают.

После дискретизации система (1)-(4) решалась методом Ньютона. Дискретизация проводилась способом, предложенным в [1].

На рисунках 3 и 4 показаны зависимость между числом Фруда и отношением V_C/V_0, где V_C скорость на оси симметрии свободной поверхности. Размеры впадины следующие: $l/H=7$, $h/H=0.05$. Точками на рисунках 3 и 4 отмечены числа Фруда, для которых построены формы свободных границ на рис. 3.1, 3.2 и 4.1-4.6. Видно, что для зависимости на рис. 3 формы свободной поверхности повторяют форму впадины. Эта ветка решений ответвляется от равномерного потока.

Кроме того, существуют решения, для которых свободная поверхность имеет форму уединенной волны с несколькими горбами и впадинами. Этим решениям отвечает зависимость изображенная на рис. 4.

Из графиков на рисунках 3 и 4 следует, что решение данной задачи неединственное, например, существует диапазон $1.2 \le Fr \le 1.24$, где задача имеет 4 решения. Одно решение не имеет горбов на свободной поверхности (график на рис. 3), еще одно имеет два горба и два решения имеют по три горба. Пунктирной линией показана максимально возможная высота свободной поверхности $y_{\max}/H = 1 + Fr^2/2$.

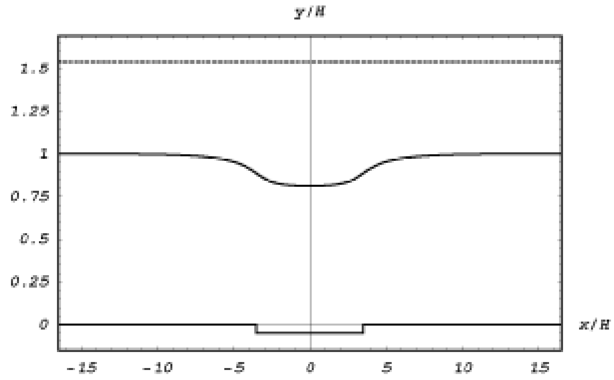

Рис. 3.1

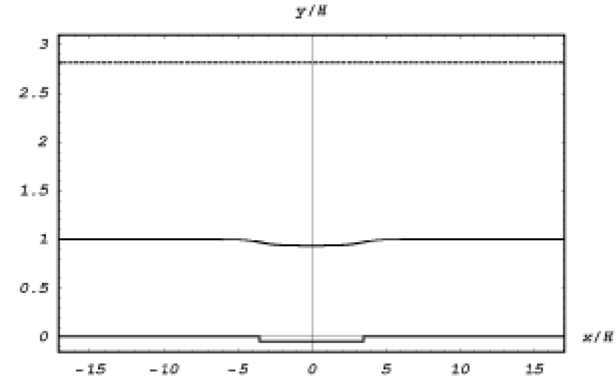

Рис. 3.2

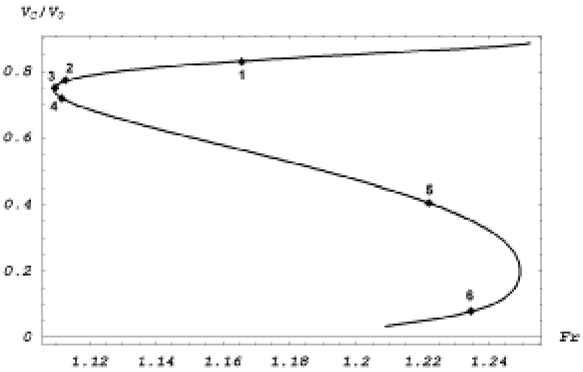

Рис. 4

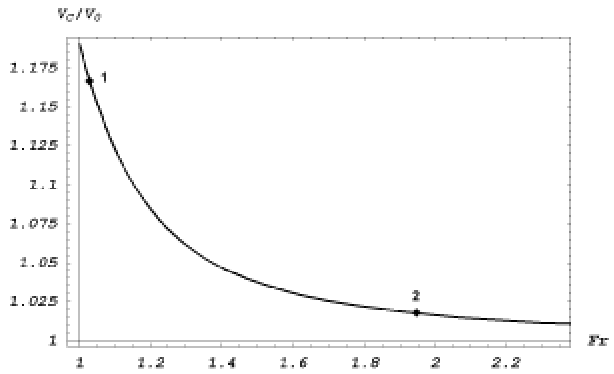

Рис. 3. Зависимость V_C/V_0 от числа Фруда

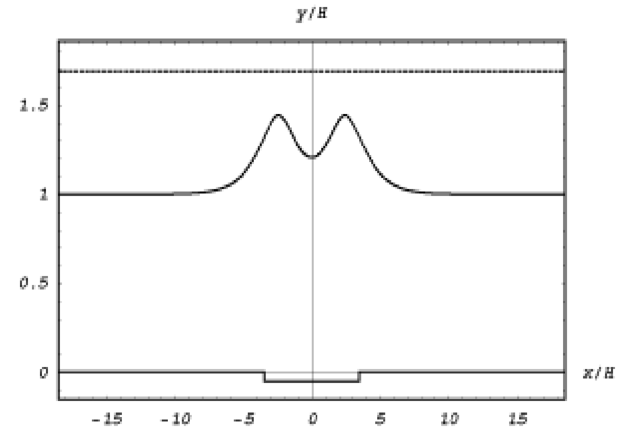

Рис. 4.1

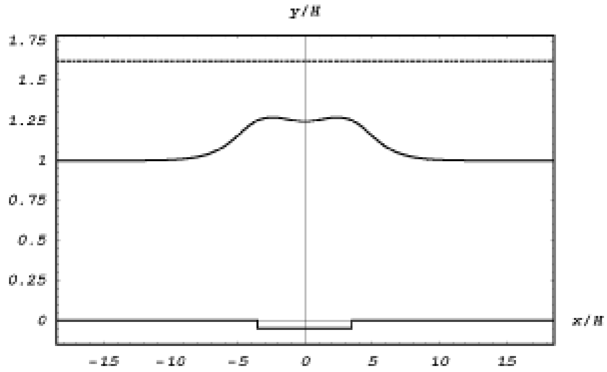

Рис. 4.2

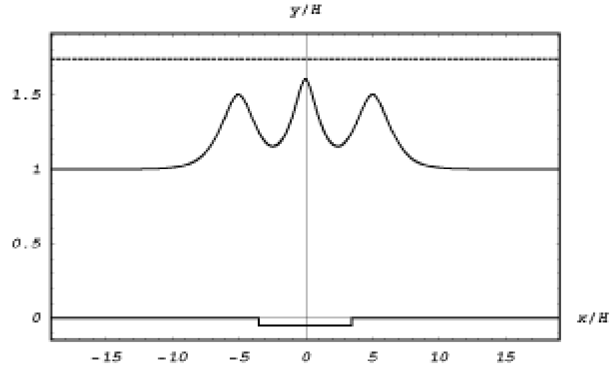

Рис. 4.5

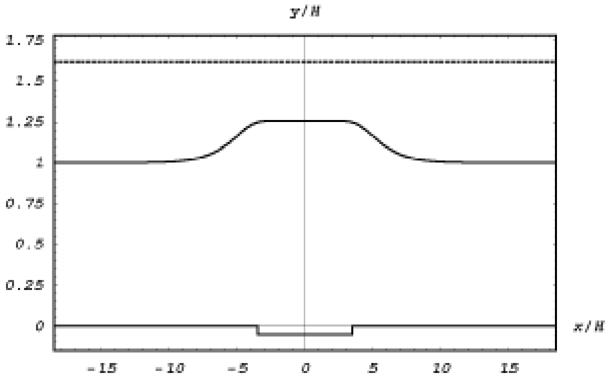

Рис. 4.3

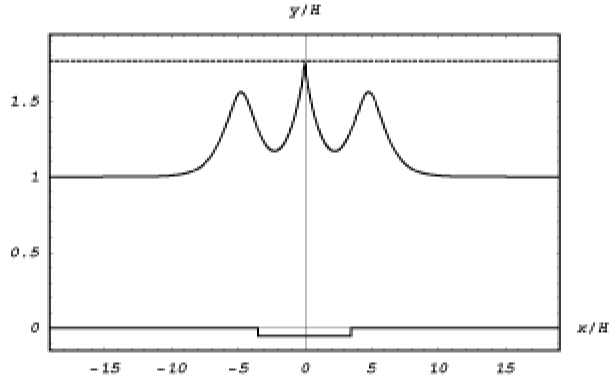

Рис. 4.6

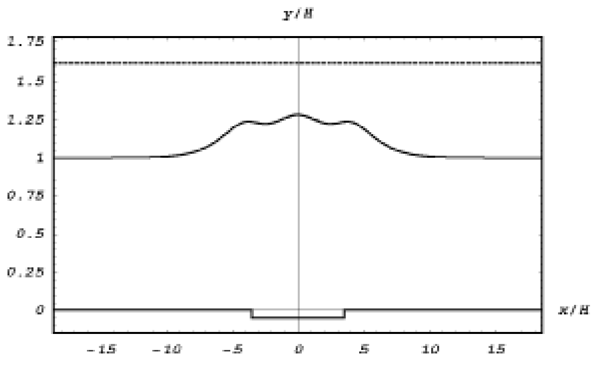

Рис. 4.4

Работа получила финансовую поддержку РФФИ (проект № 05-01-00794).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О.М., Котляр Л.М. Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. – 156 с.
2. Маклаков Д.В Нелинейные задачи гидродинамики с неизвестными границами. М.: Янус-К, 1997. – 280 с.