УДК: 624.04
DOI: 10.52409/20731523_2022_4_119
EDN: FDJBZY

Упрощенное уравнение многослойной плиты для описания работы асфальтобетонных покрытий металлических мостов

И.В. Гришин[1], **Р.А. Каюмов** [1]
[1]Казанский государственный архитектурно-строительный университет
г. Казань, Российская Федерация

Аннотация. *Постановка задачи.* Одной из основных проблем асфальтобетонных покрытий металлических мостов с ортотропной плитой является появление трещин в покрытии над главными балками пролетных строений. Однако в настоящий момент не существует разработанной методики подбора геометрических и физико-механических параметров такой конструкции. В частности не существует всеми признанной и всесторонне изученной расчетной модели, позволяющей определять напряженно-деформированное состояние в асфальтобетонных покрытиях мостов. Учитывая, что мостовое полотно является, по сути, многослойной плитой, а методы расчета однослойных плит с использованием гипотезы Кирхгофа-Лява хорошо разработаны для различных условий нагружения и закрепления только для однородных пластин, целью данного исследования является сведение задачи расчета многослойной плиты к решению уравнения, подобного уравнению Софи-Жермен. Задачей исследования является анализ возможности использования дополнительной гипотезы о равенстве коэффициентов Пуассона всех слоев осредненному значению для вывода результирующего уравнения и возможность применения данного уравнения для описания работа ортотропных плит металлических мостов.
Результат. Получено уравнение, подобное уравнению Софи-Жермен, позволяющее описывать работу многослойных плит. При этом предварительные расчеты показали, что при отличии коэффициентов Пуассона от среднего значения не более чем на 10%, результаты, полученные по предлагаемой методике и полученные в сертифицированных программных продуктах, отличаются не более чем на 5 %.
Выводы. Введение гипотезы о равенстве коэффициентов Пуассона позволяет ввести понятие нейтральной поверхности для многослойной плиты и определить место ее расположения. При этом задача расчета многослойной плиты сводится к решению уравнения, подобного уравнению Софи-Жермен, с введением понятия приведенной цилиндрической жесткости. Возможность применения данного вида уравнений к анализу мостовых конструкций подтверждается ранее проведенными исследованиями и позволит в дальнейшем прогнозировать величину безремонтного срока службы асфальтобетонных покрытий мостов, тем самым уменьшая их величину.

Ключевые слова: мостовое полотно, асфальтобетонные покрытия мостов, уравнение Софи-Жермен, гипотеза Кирхгофа-Лява, многослойные плиты

Для цитирования: И.В. Гришин, Р.А. Каюмов Упрощенное уравнение многослойной плиты для описания работы асфальтобетонных покрытий металлических мостов // Известия КГАСУ 2022 №4(62), с.119-128, DOI: 10.52409/20731523_2022_4_119,
EDN: FDJBZY

Simplified multilayered slab equation describing asphalt concrete pavements of metal bridges.

I.V. Grishin[1], **R.A. Kayumov** [1]
[1] Kazan State University of Architecture and Engineering
Kazan, Russian Federation

Abstract. *Problem statement.* One of the main problems in asphalt concrete pavements of metal bridges with an orthotropic slab is crack appearance in asphalt pavement above the main beams of superstructures. However, at the moment there is no developed method for selecting the geometric and physical-mechanical parameters of such structures. In particular, there is no universally recognized and comprehensively studied calculation model that allows determining the stress-strain state in asphalt concrete pavements of bridges. Taking into account that the bridge deck is, in fact, a multilayer slab, and the methods for calculating single-layer slabs using the Kirchhoff-Love hypothesis are well developed for various loading and boundary conditions only for homogeneous plates, the purpose of this study is to reduce the problem of calculating a multilayer slab to solving the equation, similar to the Sophie-Germain equation.
Result. The equation similar to the Sophie-Germain equation was obtained, which made it possible to describe the operation of multilayer slabs. At the same time, preliminary calculations showed that if Poisson's ratios differ from the average value by no more than 10%, the results obtained by the proposed method and those obtained in certified software products differ by no more than 5%.
Conclusions. Assuming a hypothesis about equality of Poisson's ratios allows us to introduce the concept of a neutral surface for a multilayer slab and determine its location. In this case, the problem of calculating a multilayer slab is reduced to solving an equation similar to the Sophie-Germain equation, with the introduction of the concept of reduced cylindrical stiffness. The possibility of applying this type of equations to the analysis of bridge structures is confirmed by previous studies.

Keywords: bridge deck, asphaltic pavements of bridges, Sophie-Germain equation, Kirchhoff-Love hypothesis, multilayered slabs

For citation: Grishin I.V., Kayumov R.A. Simplified multilayered slab equation describing asphalt concrete pavements of metal bridges // News KSUAE 2022 №4 (62), p.119-128, DOI: 10.52409/20731523_2022_4_119, EDN: FDJBZY

1. Введение.

Многослойная плита, является расчетной моделью для широкого класса конструкций. В частности, нами в качестве многослойной плиты рассматривается мостовое полотно металлических пролетных строений мостов. Необходимость рассмотрения данных элементов конструкций вызвана следующим требованием нормативного документа СП 35.13330.2011 «Свод правил. Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84*»: «Конструкции дорожной одежды и ортотропной плиты должны исключать появление трещин в покрытии над главными балками стальных пролетных строений». При этом не дается четких указаний по применению тех или иных методов проектирования асфальтобетонных покрытий мостов.

Применительно к нежестким асфальтобетонным покрытиям автомобильных дорог, в настоящий момент установлено и отражено в нормативных документах, таких как ПНСТ 265-2018 «Дороги автомобильные общего пользования. Проектирование нежестких дорожных одежд», что назначение параметров покрытия может быть сведено к трем основным видам расчета: расчет по упругому прогибу при умеренной весенней температуре 10˚С; расчет по условию сдвигоустойчивости грунтового основания при дальнейшем повышении температуры в конце весеннего периода; расчет монолитных слоев покрытий по усталостному разрушению. Сведение всего разнообразия возможных сочетаний нагрузок и физико-механических параметров конструктивных слоев к трем основным вариантам стало возможным благодаря представлению деформированного состояния асфальтобетонного покрытия под нагрузкой в виде чаши прогиба, получаемой как решение задачи теории упругости о напряженно-деформированном состоянии слоистого полупространства. Решением этой задачи занимались такие ученые, как Коган Б.И., Корсунский М.Б., Никишин В.С., Раппопорт Р.М., Шапиро Г.С., Туроверов К.К. и др. Этот подход оправдал себя и лежит в основе проектирования всех нежестких асфальтобетонных покрытий. В настоящий момент работы отечественных исследователей в этой области направлены на уточнение расчетных параметров данной модели многослойного полупространства. Например, в [1,2] производится сравнение теоретических и экспериментальных напряжений, возникающих в подстилающем слое грунта, а также уточнение параметров расчета по условию сдвигоустойчивости грунта. В [3] анализируется динамическое нагружение дорожной одежды. Исследования, не направленные непосредственно на анализ расчетных моделей, такие как [4], где анализируется износ асфальтобетонных покрытий, и [5], где анализируется возможность применения активированных наполнителей для модификации цементогрунтов в дорожных одеждах, так или иначе, предполагают вышеописанную схему нагружения дорожной одежды. Работы зарубежных авторов, такие как [6,7], направленные на анализ расчетных моделей асфальтобетонных покрытий дорог, также предполагают образование чаши прогиба от воздействия колеса.

Однако применение методов, созданных для проектирования дорог, является неприменимым к конструкциям мостов, что видно по работам отечественных и зарубежных авторов.

Например, применительно к железобетонным пролетным строениям мостов данный вопрос наиболее детально разрабатывался Щербаковым А.Г. и Овчинниковым И.Г. [8], где мостовое полотно рассматривалось в предположении верности гипотезы Кирхгофа-Лява и выводилось для многослойной конструкции с учетом нелинейного разномодульного модуля упругости асфальтобетона при учете воздействия факторов транспортной нагрузки, изменения температуры окружающей среды и воздействия хлоридосодержащей среды на асфальтобетон. Полученные уравнения решались методом конечных разностей.

Применительно к металлическим мостам данная задача решалась рядом исследователей, в частности, Судомоиным А.С. в 80-х годах 20 в. [9,10] для полимербетонного покрытия, уложенного по ортотропной плите проезжей части. Однако, автором работы не рассматривался аспект, обусловленный требованием СП 35.13330.2011 требующий исключать появление трещин в покрытии над главными балками стальных пролетных строений.

Кратко данная проблема упоминается в докторской диссертации Платонова А.С. «Стальные конструкции мостов из ортотропных плитных элементов» 2004 года, где указано, что минимальную толщину листа настила ортотропной плиты нужно назначать из условия трещиностойкости асфальтобетонного покрытия при прогибе листа относительно продольных ребер от воздействия транспортной нагрузки. Однако, основной целью работы являлось исследование работы самих ортотропных плит, а не обеспечение трещиностойкости их покрытий.

С 2010 по 2015 год вопрос изучался Телегиным М.А. в работах [11,12], а также в диссертации «Особенности расчета цельнометаллических пролетных строений автодорожных мостов с учетом совместной работы ортотропной плиты с главными балками и одеждой ездового полотна». В исследовании рассмотрена работа цельнометаллических пролетных строений автодорожных мостов с учетом совместной работы ортотропной плиты с главными балками и одеждой ездового полотна. Работа асфальтобетона также изучена, но в основном в рамках учета его влияния на НДС самого пролетного строения и ортотропной плиты. При этом применяется программа Midas Civil, реализующая метод конечных элементов (МКЭ).

В исследованиях [13,14] и диссертации Полякова С.Ю. «Совершенствование метода расчета долговечности асфальтобетонного покрытия на ортотропной плите мостов по критерию усталостного разрушения» основным предметом исследования являлось образование трещин в асфальтобетонных покрытиях металлических мостов при транспортных нагрузках, и рассматривалась область мостового полотна над прикреплением ортотропной плиты к главным балкам (упомянутая в СП 35.13330.2011).

При этом для построения модели долговечности асфальтобетона были использованы материалы диссертации Дровалевой О.В. «Усталостная долговечность асфальтобетона при воздействии интенсивных транспортных нагрузок». На основе проведенных исследований сделаны, в частности, выводы о том, что циклическое приложение транспортной нагрузки действительно может привести к образованию трещин в означенной области мостового полотна. При этом также использовалась программа Midas Civil, реализующая метод конечных элементов (МКЭ).

Таким образом, можно сделать вывод, что, несмотря на актуальность данной проблемы вопрос о разработке расчетной модели асфальтобетонных покрытий металлических мостов, как правило, не рассматривается и исследователи используют готовые расчетные комплексы, что видно также и по работам зарубежных исследователей [15-17]. В связи с этим целью данной работы является разработка упрощенных расчетных моделей, позволяющих аналитически оценивать НДС металлических мостов по методике, альтернативной численным, и позволяющей проектировать асфальтобетонное покрытие, прогнозировать его работу. Для достижения поставленной цели предполагается:

1. Ввести дополнительно к гипотезе Кирхгофа-Лява предположение о равенстве коэффициентов Пуассона всех слоев осредненному значению.
2. Используя уравнения равновесия вывести результирующее уравнение.
3. Проанализировать возможность получения решения результирующего уравнения известными методами и его применимость к моделированию работы ребристых плит.

2. Материалы и методы.

Основным методом при разработке модели является введение упрощающих гипотез, а именно, принятие следующих предположений.

1. Гипотеза Кирхгофа-Лява.
2. Расчетная схема соответствует рис. 1. Принимаем, что имеется *n-1* слоев, а границ слоев соответственно *n*.
3. Вводится гипотеза, предполагающая, что в многослойной конструкции, состоящей из *n-1* слоев, коэффициент Пуассона каждого слоя одинаков и равен среднему значению μ_{cp} изначально заданных коэффициентов Пуассона μ_i:

$$\mu_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i}{n-1} \tag{1}$$

4. Используются соотношения теории упругости. Это выражается в том, что составляемые уравнения должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия:
    a. Условие самоуравновешенности нормальных напряжений, действующих в направлении оси *Ox*:

$$N_x = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{h_i}^{h_{i+1}} \sigma_{xi}(z-h)\, d(z-h) = 0 \tag{2}$$

где N_x - равнодействующая нормальных напряжений в направлении оси *Ox*;

h_i – координата нижней грани *i*-го слоя;

h - координата положения нейтральной поверхности.

b. Условие приведения нормальных напряжений к изгибающим моментам:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{h_i}^{h_{i+1}} -\frac{E_i \cdot (z-h)^2}{1-{\mu_{cp}}^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{cp} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) d(z-h) \tag{3}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{h_i}^{h_{i+1}} -\frac{E_i \cdot (z-h)^2}{1-{\mu_{cp}}^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{cp} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) d(z-h) \tag{4}$$

где E_i - модуль упругости *i*-го слоя, Н/м^2;

μ_i - коэффициент Пуассона i-го слоя;

w - функция перемещений нейтральной поверхности многослойной плиты, зависящая от координат x и y;

z - ось координат в соответствии с рис. 1.

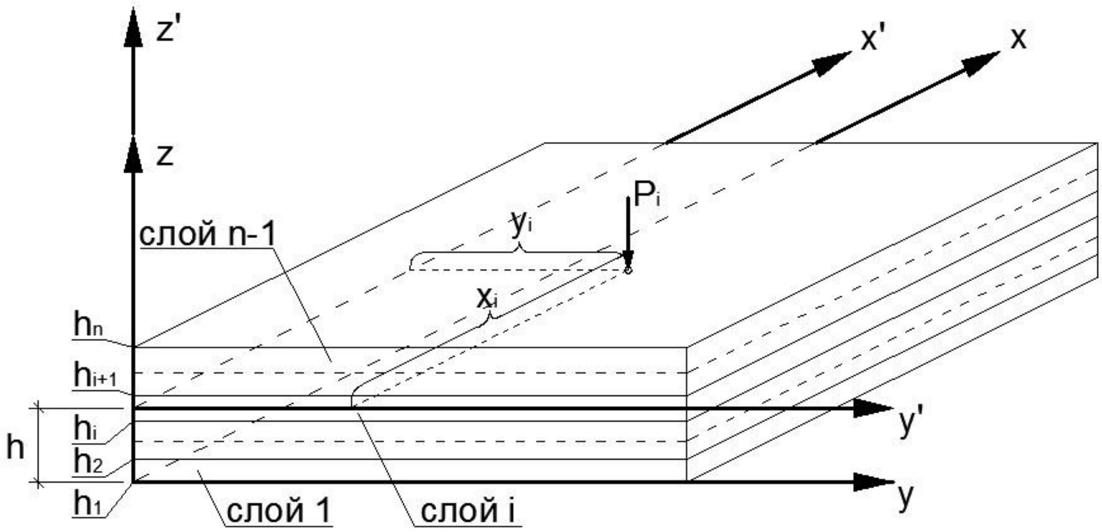

Рис. 1. Расчетная схема многослойной плиты (иллюстрация авторов).
Fig.1. Calculation scheme of a multilayer plate (illustration by the authors).

В уравнениях (2-4) введена координата $z-h$, для возможности найти величину h в явном виде после интегрирования. Математически это осуществляется введением первоначальных координат xyz как показано на Рис. 1, т.е. так, чтобы $h_1 = 0$. Затем вводится новая система координат $x'y'z'$, также показанная на Рис. 1, в которой плоскость $x'y'$ сдвинута вдоль оси z на искомую величину h.

3. Результаты и обсуждение.

В соответствии с гипотезой Кирхгофа-Лява, напряжения в плите выражаются следующим образом:

$$\sigma_{xi}(z-h) = -\frac{E_i\cdot(z-h)}{1-{\mu_i}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{5}$$

$$\sigma_{yi}(z-h) = -\frac{E_i\cdot(z-h)}{1-{\mu_i}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{6}$$

$$\tau_{xyi}(z-h) = -\frac{E_i\cdot(z-h)}{1+\mu_i}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{7}$$

Тогда, подставляя в (2) уравнение (5), с учетом гипотезы, выраженной соотношением (1), получим следующие три уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{h_i}^{h_{i+1}} -\frac{E_i\cdot(z-h)}{1-{\mu_{\text{ср}}}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)d(z-h)=0 \tag{8а}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} -\frac{E_i}{1-{\mu_{\text{ср}}}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{h_i}^{h_{i+1}}(z-h)\,d(z-h)=0 \tag{8б}$$

$$-\frac{1}{1-{\mu_{\text{ср}}}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sum_{i=1}^{n-1}E_i\int_{h_i}^{h_{i+1}}(z-h)\,d(z-h)=0 \tag{8в}$$

где (8б) следует из (8а), а (8в) следует из (8б).

В последней строке (8в) уравнение можно сократить на множитель $-\frac{1}{1-\mu_{\text{ср}}{}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$. Таким образом, можно сделать вывод, что гипотеза (1) приводит к расчетной схеме, где положение точки, в которой напряжения (причем, все напряжения) равны нулю, не зависит от координат *x* и *y*. Значит можно ввести понятие нейтральной поверхности. Тогда получим следующее уравнение для определения его положения:

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_i[(h_{i+1}-h)^2-(h_i-h)^2]=0 \tag{9}$$

Из (9) необходимо найти величину *h*. Используя формулу разложения разности квадратов, получим:

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_i(h_{i+1}-h_i)(h_{i+1}+h_i-2h)=0 \tag{10}$$

Имея в виду, что $(h_{i+1}-h_i)$ – толщина *i*-го слоя, и обозначая его как $H_i=(h_{i+1}-h_i)$, получим:

$$\sum_{i=1}^{n-1} E_i H_i(h_{i+1}+h_i-2h)=0 \tag{11}$$

Из уравнения (11) следует, что величина *h* может быть найдена по соотношению:

$$h=\frac{\sum_{i=1}^{n-1} E_i H_i(h_{i+1}+h_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} E_i H_i}\cdot\frac{1}{2} \tag{12}$$

Для верификации (12) можно рассмотреть двухслойную плиту общей толщиной *H*, с одинаковыми слоями. Тогда должно получиться *h=H/2*. Проверим решение, приняв: $E_1=E_2=E; H_1=H_2=\frac{H}{2}; h_1=0; h_2=\frac{H}{2};\ h_3=H$. Подставив данные значения в (12), действительно получаем *h=H/2*.

Аналогично, рассматривая трехслойную плиту общей толщиной *H*, с одинаковым слоями, примем: $E_1=E_2=E_3=E; H_1=H_2=H_3=\frac{H}{3}; h_1=0; h_2=\frac{H}{3};\ h_3=\frac{2H}{3}; h_4=H$

В результате подстановки в (12) получаем ответ *h=H/2*. А принимая, например, $E_1=E_3=3E$ и $E_3=E$, и оставляя неизменными остальные параметры, получим также ответ *h=H/2*. Из этого делаем вывод, что уравнения (12) были выведены правильно.

Теперь, имея возможность вычислить положение нейтральной поверхности, найдем аналог цилиндрической жесткости, применяемой в уравнениях, описывающих однослойную плиту. Для этого рассмотрим уравнение (3):

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^{n-1}\int_{h_i}^{h_{i+1}} -\frac{E_i\cdot(z-h)^2}{1-\mu_{\text{ср}}{}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)d(z-h)= \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{E_i}{1-\mu_{\text{ср}}{}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{h_i}^{h_{i+1}}(z-h)^2\,d(z-h)= \\ &= -\frac{1}{1-\mu_{\text{ср}}{}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sum_{i=1}^{n-1} E_i\int_{h_i}^{h_{i+1}}(z-h)^2\,d(z-h)= \\ &= -\frac{1}{3(1-\mu_{\text{ср}}{}^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{n-1} E_i H_i ((h_{i+1} - h)^2 + (h_{i+1} - h)(h_i - h) + (h_i - h)^2) =$$
$$= -\frac{1}{3(1-\mu_{\text{ср}}{}^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\cdot$$
$$\cdot \sum_{i=1}^{n-1} E_i H_i \left[\left({h_{i+1}}^2 + h_{i+1}h_i + {h_i}^2\right) - (h_{i+1} + h_i)\cdot 3h + 3h^2\right]$$

Вывод уравнений для изгибающего момента M_y и крутящего момента M_{xy} осуществляется аналогичным образом, в результате чего получим:

$$M_y = -\frac{1}{3(1-\mu_{\text{ср}}{}^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cdot \sum_{i=1}^{n-1} E_i H_i \left[\left({h_{i+1}}^2 + h_{i+1}h_i + {h_i}^2\right) - (h_{i+1} + h_i)\cdot 3h + 3h^2\right] \quad (14)$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{3(1+\mu_{\text{ср}})}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cdot \sum_{i=1}^{n-1} E_i H_i \left[\left({h_{i+1}}^2 + h_{i+1}h_i + {h_i}^2\right) - (h_{i+1} + h_i)\cdot 3h + 3h^2\right] \quad (15)$$

Если для проверки принять двухслойную плиту общей толщиной H, с одинаковыми слоями, то выражение под знаком суммы должно принять значение, равное цилиндрической жесткости после умножения на $\frac{1}{3(1-\mu_{\text{ср}}{}^2)}$. Проверим решение, приняв: $E_1 = E_2 = E; H_1 = H_2 = \frac{H}{2}; h_1 = 0; h_2 = \frac{H}{2};\ h_3 = H$. В результате после подстановки получаем значение $\frac{EH^3}{4}$, которое после умножения на $\frac{1}{3(1-\mu_{\text{ср}}{}^2)}$ как раз дает значение цилиндрической жесткости $\frac{EH^3}{12(1-\mu_{\text{ср}}{}^2)}$.

Введем величину $D_{\text{сл}}$, которую назовем обобщенной цилиндрической жесткостью многослойной плиты:

$$D_{\text{сл}} = -\frac{1}{3(1-\mu_{\text{ср}}{}^2)}\cdot\cdot \sum_{i=1}^{n-1} E_i H_i \left[\left({h_{i+1}}^2 + h_{i+1}h_i + {h_i}^2\right) - (h_{i+1} + h_i)\cdot 3h + 3h^2\right], \quad (16)$$

где h величина, вычисляемая по соотношению (12).

С учетом (12) и (16) окончательные уравнения для изгибающих моментов M_x, M_y и крутящего момента M_{xy} выразятся следующим образом:

$$M_x = -D_{\text{сл}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (17)$$

$$M_y = -D_{\text{сл}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{\text{ср}}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (18)$$

$$M_{xy} = -D_{\text{сл}}(1-\mu_{\text{ср}})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

Уравнения (17)-(19) совершенно аналогичны уравнениям, получаемым с использованием гипотезы Кирхгофа-Лява для однослойных плит. Вследствие этого можно также записать уравнение, подобное уравнению Софи Жермен для однослойной плиты, а именно:

$$D_{\text{сл}}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \delta(x_i, y_i), \quad (20)$$

где $D_{\text{сл}}$ – определяется по уравнению (16);

P_i – i-я сила, направленная в соответствии с рис. 1 и приложенная в точке с координатами $x = x_i, y = y_i$, z = H;

$\delta(x_i, y_i)$ – дельта функция Дирака, равная нулю везде кроме точки с координатами (x_i, y_i), где интеграл от нее равен единице;

n – количество прикладываемых сил, задаваемое расчетчиком.

Решая уравнение (20), например, методом Бубнова-Галеркина, можно описать НДС многослойной плиты. Однако соответствие полученного решения реальному НДС многослойной плиты требует исследования, которая и будет являться темой дальнейших работ. Были проведены предварительные расчеты для реальных материалов, применяемых в асфальтобетонных покрытиях. Они показали, что при отличии коэффициентов Пуассона от среднего значения не более, чем на 10%, результаты, полученные по предлагаемой методике и полученные в сертифицированных программных продуктах (а именно, в ANSYS), отличаются не более чем на 5 %. Такое отличие коэффициентов Пуассона имеет место именно для материалов, применяемых при изготовлении металлических мостов с асфальтобетонными покрытиями.

Из анализа полученных результатов следует, что введение дополнительной гипотезы, выраженной уравнением (1), позволяет вынести выражение $-\frac{1}{1-\mu_{cp}^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{cp}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ за пределы интеграла при подстановке (2) в (5). Такая возможность появляется именно благодаря предположению о том, что коэффициент Пуассона всех слоев одинаков, в противном случае множитель $\frac{1}{1-\mu_{cp}^2}$ невозможно было бы вынести за пределы интеграла.

Дальнейшие преобразования показывают, что можно ввести понятие нейтральной поверхности, которое определяется величиной h, которую удается выразить в явном виде соотношением (12).

Используя выражения изгибающих моментов через нормальные напряжения можно прийти к тому, что искомая функция перемещений *w(x,y)* может быть найдена из уравнения (20), подобного уравнению Софи-Жермен. При этом вводится новая величина $D_{сл}$, названная нами обобщенной цилиндрической жесткостью многослойной пластины и описываемая соотношением (16). Из анализа $D_{сл}$ становится видно, что построенная нами теория является более общей, чем использованная для вывода уравнения Софи-Жермен. В частности, если принять, что материалы всех слоев одинаковы, то обобщенная цилиндрическая жесткость $D_{сл}$ сведется к хорошо известной цилиндрической жесткости *D*, используемой для расчета однослойных плит.

Методы решения уравнения (20) хорошо известны для различных условий закрепления и нагружения. Для условий подкрепления плиты системой перекрестных ребер жесткости методика расчета представлена нами в [18].

Однако представленный выше подход требует проверки в двух аспектах. Во-первых, необходимо провести расчет методом конечных элементов при различных коэффициентах Пуассона слоев и сравнить получаемые напряжения с предлагаемой нами моделью. Это необходимо для оценки разницы в результатах, возникающей при определении напряжений численными методами и предложенной методикой, которая вызвана гипотезой о равенстве коэффициентов Пуассона. Во-вторых, необходимо сделать более детальный расчет методом конечных элементов асфальтобетонного покрытия металлического моста с ортотропной плитой для определения возможности применения к данному виду конструкций гипотезы Кирхгофа-Лява. Это вызвано тем, что при положительных температурах модуль упругости битума защитно-сцепляющего слоя может на несколько порядков отличаться от модуля упругости асфальтобетона и тем более стали. Это в свою очередь может привести к зигзагообразной форме нормальных деформаций по толщине мостового полотна.

4. Заключение.

Введение гипотезы о равенстве коэффициентов Пуассона позволяет ввести понятие нейтральной поверхности для многослойной плиты и определить место ее расположения.

Преобразования уравнений, полученных с используемыми гипотезами, позволяют свести задачу к уравнению типа Софи-Жермен. При этом вводится новый параметр $D_{сл}$ – обобщенная цилиндрическая жесткость.

Основываясь на проведенных ранее исследованиях, полученное уравнение может быть использовано для описания работы ребристых плит, в частности, ортотропных плит металлических мостов.

В дальнейшем необходимо оценить границы ошибки, возникающей при определении напряжений в многослойной плите, вызванной гипотезы о равенстве коэффициентов Пуассона их среднему значению и гипотез Кирхгофа-Лява.

Список литературы / References

1. Aleksandrov A. S., Smirnov A. V., Semenova T. V. Stress Investigation in Pavement Layers and a New Nalculation Model // Materials Science Forum. 2019. Vol. 945. pp. 813–820. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.945.813.
2. Александров А.С., Калинин А.Л., Семенова Т.В. Определение первой критической нагрузки для дорожных конструкций // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. 2022. № 1(86). С. 116-131. [Aleksandrov A.S., Kalinin A.L., Semenova T.V. Determination of the first critical load for road structures // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. 2022. № 1(86). P. 116-131.]
3. Смирнов А.В., Баженова А.Ю., Демин А.С. О критериях динамической прочности проезжей части автомобильных дорог: Материалы международной научно-практической конференции ИННОВАЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ РАЗВИТИЯ ТРАНСПОРТА. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА / Сибирский государственный университет путей сообщения. Новосибирск, 2018. С. 110-114. [Smirnov A.V., Bazhenova A.Yu., Demin A.S. On the criteria for the dynamic strength of the roadway: Proceedings of the international scientific and practical conference INNOVATIVE FACTORS OF DEVELOPMENT TRANSPORT. THEORY AND PRACTICE / Sibirskij gosudarstvennyj universitet putej soobshcheniya. Novosibirsk, 2018. P. 110-114.]
4. Gayfutdinov R., Bajmukhametov G., Hafizov E. Pavement wear process and abrasive wear resistance of asphalt concrete // E3S Web of Conferences. 2021. Vol. 274. DOI: https://doi.org/10.1051/e3sconf/202127402008
5. Vdovin E., Stroganov V., Konovalov N. Modification of Road Soil Cement with Activated Fillers // Lecture Notes in Civil Engineering. 2020. Vol. 150. pp. 335-345. DOI: 10.1007/978-3-030-72404-7_33
6. Lijun Sun The structural behavior of overlaid asphalt pavements // Structural Behavior of Asphalt Pavements. 2016. pp. 501-547. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-849908-5.00007-9.
7. Yu Liu, Peifeng Su, Miaomiao Li, Zhanping You, Mohan Zhao Review on evolution and evaluation of asphalt pavement structures and materials // Journal of Traffic and Transportation Engineering. 2020. Vol. 7. pp. 573-579. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jtte.2020.05.003.
8. Щербаков А.Г., Наумова Г.А., Овчинников И.Г., Бочкарев А.В. Прикладная механика дорожных одежд на мостовых сооружениях. Волгоград: Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, 2006. 220 с. [Sherbakov A.G., Naumova G.A., Ovchinnikov I.G., Bochkarev A.V. Applied mechanics of pavements on bridge structures. Volgogradskij gosudarstvennyj arhitekturno-stroitel'nyj universitet, 2006. 220 p.]
9. Судомоин А. С. Некоторые аспекты совместной работы стальной ортотропной плиты и покрытия на разводных пролетах мостов // Вопросы надежности мостовых конструкций: Межвузовский тематический сборник трудов. 1984. С. 45-55. [Sudomoin A. S. Some aspects of joint operation of steel orthotropic plate and pavement on drawbridge spans // Voprosy nadezhnosti mostovyh konstrukcij: Mezhvuzovskij tematicheskij sbornik trudov. 1984. P. 45-55.]
10. Судомоин А. С. О напряженно-деформированном состоянии слоя полимербетонного покрытия, уложенного по ортотропной плите проезжей части // Совершенствование конструкций и методов расчета автодорожных мостов: Межвузовский тематический сборник трудов. 1986. С. 52-60. [Sudomoin A. S. On the stress-strain state of a layer of polymer concrete pavement laid on an orthotropic slab of a roadway // Sovershenstvovanie

konstrukcij i metodov rascheta avtodorozhnyh mostov: Mezhvuzovskij tematicheskij sbornik trudov. 1986. P. 52-60.]
11. Овчинников И.Г., Овчинников И.И., Телегин М.А. Оценка применимости различных материалов для устройства дорожных одежд на мостах с металлической ортотропной плитой проезжей части: Материалы международной научно-практической конференции ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ СИБИРИ / Сибирский федеральный университет. Красноярск, 2016. С. 151-156. [Ovchinnikov I.G., Ovchinnikov I.I., Telegin M.A. Evaluation of the applicability of various materials for the construction of pavements on bridges with a metal orthotropic roadway deck: Proceedings of the international scientific and practical conference TRANSPORT SYSTEMS OF SIBERIA / Sibirskij federal'nyj universitet. Krasnoyarsk, 2016. P. 151-156.]
12. Телегин М.А., Овчинников И.Г. Исследование совместной работы стальной ортотропной плиты с дорожной одеждой на ней при их различных параметрах // Транспортные сооружения. 2015. Т. 2. № 2(6). [Telegin M.A., Ovchinnikov I.G. Study of joint operation of a steel orthotropic slab with pavement on it with their different parameters // Transportnye sooruzheniya. 2015. T. 2. № 2(6).]
13. Yashnov A.N, Polyakov S. Yu. Experimental determination of stress-strain state of asphalt pavement on metal bridges // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 3(39). pp. 93-106.
14. Поляков С.Ю. Совершенствование конструкции проезжей части металлических мостов с учетом особенностей характера работы одежды ездового полотна // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 2. С. 174-184. DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-2-174-184. [Polyakov S.Yu. Improving the design of the roadway of metal bridges, taking into account the peculiarities of the nature of the work of the clothing of the roadway // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. 2020. V. 22. № 2. P. 174-184. DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-2-174-184.]
15. Kokkalis A., Panetsos P. Asphalt bridge deck pavement behavior, the Egnatia experience // Bituminous Mixtures and Pavements. 2015. Vol. 6. pp. 789-793. DOI: 10.1201/b18538-112.
16. Leilei Chen, Zhendong Qian, Daoxie Chen, Ya Wei Feasibility Evaluation of a Long-Life Asphalt Pavement for Steel Bridge Deck // Advances in Civil Engineering 2020. 2020. DOI: 10.1155/2020/5890945.
17. Xunqian Xu, Yu Li, Wei Huang, Dakai Chen Fatigue Design of Steel Bridge Deck Asphalt Pavement Based on Nonlinear Damage Accumulation Theory // Applied Sciences. 2020. № 11(12). DOI: 10.3390/app11125668.
18. Grishin I., Kayumov R., Ivanov G., Petropavlovckikh O. Computational Model of Rib-Reinforced Plate // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 890. DOI: https://doi.org/10.1088/1757-899X/890/1/012036.

Информация об авторах

Илья Валерьевич Гришин, ассистент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация.
Email: il6357grishin@yandex.ru
Рашит Абдулхакович Каюмов, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г.Казань, Российская Федерация.
Email: kayumov@rambler.ru

Information about the authors

Ilya V. Grishin, assistant, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation.
Email: il6357grishin@yandex.ru
Rashit A. Kayumov, doctor of physical-mathematical sciences, professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation.
Email: kayumov@rambler.ru