



УДК 519.633

Бакушев Сергей Васильевич

доктор технических наук, профессор

E-mail: bakuchsv@mail.ru

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

Адрес организации: 440028, Россия, г. Пенза, ул. Германа Титова, д. 28

Дифференциальные уравнения равновесия для расчёта сплошных сред при аппроксимации диаграмм объёмного и сдвигового деформирования биквадратичными функциями (центрально-симметричное деформирование)**Аннотация**

Постановка задачи. Цель исследования – вывод дифференциальных уравнений равновесия геометрически и физически нелинейной сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования, при аппроксимации диаграмм объёмного и сдвигового деформирования квадратичными функциями. Используются две математических модели, описывающие механическое поведение материала сплошной среды: модель, не учитывающая геометрическую нелинейность и модель, учитывающую геометрическую нелинейность.

Результаты. Построение физических зависимостей основано на вычислении секущих модулей объёмного и сдвигового деформирования. При аппроксимации графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования при помощи двух отрезков парабол, секущий модуль сдвига на первом участке является линейной функцией интенсивности деформаций сдвига; секущий модуль объёмного расширения-сжатия является линейной функцией первого инварианта тензора деформаций. На втором участке диаграмм и объёмного и сдвигового деформирования секущий модуль сдвига является дробной (рациональной) функцией интенсивности деформаций сдвига; секущий модуль объёмного расширения-сжатия является дробной (рациональной) функцией первого инварианта тензора деформации. Исходя из предположения о независимости, вообще говоря, друг от друга диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, рассмотрены шесть основных случаев физических зависимостей, зависящих от взаимного расположения точек излома графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, аппроксимированных каждый двумя параболом. На основе полученных физических уравнений выводятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в том, что полученные дифференциальные уравнения в перемещениях позволят получать решение задач расчёта сплошных сред с центральной симметрией как в отношении геометрии, так и в отношении нагрузки, механическое поведение которых описывается с учётом физической и геометрической нелинейности, при аппроксимации графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования биквадратичными функциями.

Ключевые слова: сплошная среда, центрально-симметричная деформация, аппроксимация диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, квадратичные функции, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность.

Для цитирования: Бакушев С. В. Дифференциальные уравнения равновесия для расчёта сплошных сред при аппроксимации диаграмм объёмного и сдвигового деформирования биквадратичными функциями (центрально-симметричное деформирование) // Известия КГАСУ. 2020. № 4 (54). С. 121–133.

1. Введение

К уникальным сооружениям можно отнести любые сооружения отличные по форме от параллелепипедов. В частности к уникальным сооружениям относятся всевозможные сооружения сферического очертания, предназначенные к эксплуатации, как на земле, так и под землёй, а также под водой, в воздухе и за пределами атмосферы. Остановимся в наших исследованиях на возможности установления напряжённо-деформированного

состояния сферических толстостенных тел, находящихся в условиях центрально-симметричного деформирования, и выполненных из материала, механические свойства которого обнаруживают как физическую, так и геометрическую нелинейность (в смысле В.В. Новожилова [1]). Физическая нелинейность проявляется в том, что и обобщенный модуль объёмного расширения (сжатия), и обобщенный модуль сдвига являются величинами переменными и зависят от инвариантов тензора деформации. Геометрическая нелинейность является следствием учёта в геометрических соотношениях квадратичных слагаемых, это, во-первых, и, во-вторых, перехода к рассмотрению напряжённого состояния в системе координат точек тела до деформации. В результате дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды содержат в коэффициентах, при производных от обобщенных напряжений по пространственным координатам, производные от перемещений. С учётом вышесказанного, построение решения, то есть определение напряжённо-деформированного состояния даже для таких, казалось бы, достаточно «простых» задач как расчёт тел со сферической симметрией, как в отношении геометрии, так и в отношении нагрузки, выливается в сложную проблему.

Для упрощения построения решения предлагается следующий подход. Экспериментально или феноменологически полученные кривые диаграмм объёмного и сдвигового деформирования геометрически и физически нелинейных тел нужно аппроксимировать билинейными [2] или биквадратичными [3] функциями. При этом и физические соотношения, и дифференциальные уравнения равновесия будут иметь относительно простой вид. Соответственно упростится и построение решения.

Вопросами расчёта сферически симметричных тел и конструкций занимаются многие исследователи. Так в работах [4, 5] рассматривается напряжённо-деформированное состояние упругого массива вокруг сферической полости. Массив в приконтурной области имеет технологическую неоднородность, смоделированную радиально неоднородным модулем упругости, аппроксимированным обобщенным полиномом радиальной координаты; коэффициент Пуассона остаётся постоянным. Построена как математическая модель процесса, так и найдены некоторые аналитические решения. В статьях [6, 7] исследовано напряжённо-деформированное состояние массива вокруг сферической полости. Упругопластическое напряжённо-деформированное состояние рассматривалось с учётом предельного деформирования; прочность и устойчивость горных пород приконтурной зоны определялись с учётом не идеально пластического характера деформирования. В работе [8] исследовано напряжённое состояние идеально пластического сжимаемого пространства, ослабленного сферической полостью. Материал пространства – сыпучая среда с внутренним трением и сцеплением. Давление внутри полости отсутствует. Внешняя нагрузка приложена на бесконечности. Условие пластичности – условие пластичности Треска-Сен-Венана с учётом условия предельного равновесия сыпучей среды. В статье [9] с учётом физической и геометрической нелинейности анализируется напряжённо-деформированное состояние подземных шаровидных полостей и цилиндрической вертикальной эксплуатационной скважины для выявления причин изменения их геометрических параметров с течением времени вплоть до обрушения. Учитываются ползучесть и неоднородность горных пород, наличие трещин. В работе [10] рассматривается динамическое воздействие сосредоточенной силой на упругое изотропное пространство со сферической полостью. Линия действия силы совпадает с направлением радиуса-вектора сферы. Данная модельная задача позволяет прогнозировать нарушения динамического равновесия подземных недр при их освоении и эксплуатации. В статье [11] с использованием аналитического, численного и экспериментального моделирования исследуются вопросы зонального разрушения горных пород. Приводится обзор работ, посвящённых разрушению горных массивов, в том числе работ, основанных на использовании неевклидовой модели сплошной среды. Сформулированы направления и определены задачи дальнейшего изучения вопросов разрушения горных пород. В работе [12] рассматривается неограниченная среда со сферической полостью. Для решения основной задачи теории упругости использован метод граничных состояний. Смешанные граничные условия задаются на границе сферы. В статье [13] приводятся примеры решения некоторых практических задач строительства с использованием численно-аналитического метода теории упругости для радиально неоднородных тел. Неоднородность обусловлена зависимостью механических характеристик материала, в частности, модуля упругости, от радиуса при решении плоской задачи в

полярных координатах, а также пространственных задач в цилиндрических и сферических координатах. В работе [14] рассматривается случай непрерывной одномерной неоднородности, когда деформационные характеристики материала породного массива со сферической полостью, полученной с помощью взрыва, являются непрерывными функциями одной из координат – радиуса. Выполнен расчёт напряжённого состояния однородного и неоднородного массивов, окружающих сферическую полость. В статье [15] решается задача расчёта сферической полости с полярно-симметричным распределением напряжений и деформаций. Пространство вокруг сферической полости принимается упругопластическим. В результате решения строятся эпюры остаточных напряжений. В статье [16] рассматривается напряжённое состояние грунтового массива со сферической полостью, полученной с помощью взрыва. Деформационные характеристики грунтового массива принимаются непрерывными функциями радиальной координаты. Анализ напряжённого состояния проводился как в однородном, так и в неоднородном массиве, окружающей сферическую полость. В работе [17] анализируется распространение сферически-симметричных волн деформаций в слоистой изотропной линейно-упругой или слабо нелинейной среде, окружающей сферическую полость. В результате решения задачи определяются как перемещения, так и напряжения. Статья [18] посвящена построению аналитического решения для расчёта сопряжения свай в скальных массивах, основанного на теории расширения сферической полости. Результаты теоретических изысканий хорошо согласуются с результатами полевых испытаний.

В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для случая центрально-симметричного деформирования сплошной среды: $u_R = u(R)$, $u_\varphi = 0$, $u_\theta = 0$. Сплошная среда принимается физически нелинейной и описывается математической моделью, как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова [1]). Замыкающие уравнения физических соотношений произвольного, вообще говоря, вида аппроксимируются биквадратичными функциями (рис.).

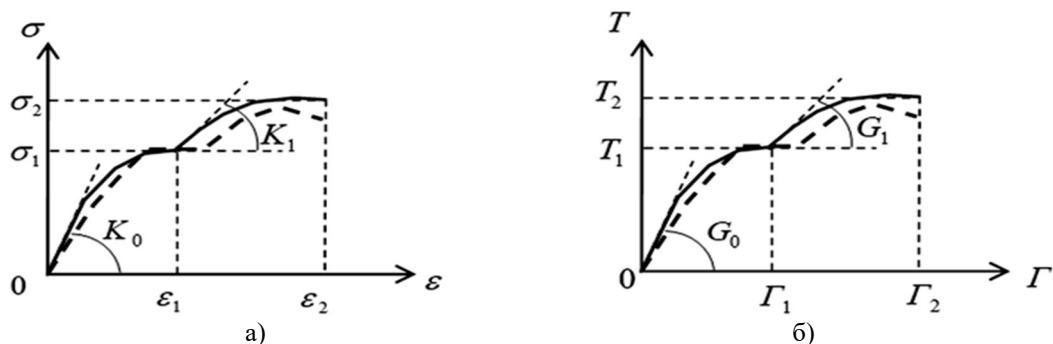


Рис. а) Диаграмма $\sigma \approx \varepsilon$; б) Диаграмма $T \approx \Gamma$ (иллюстрация автора).

Пунктирные толстые линии – исходные кривые объёмного и сдвигового деформирования;
сплошные толстые линии – аппроксимирующие отрезки парабол

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для характерных случаев деформирования сплошной среды – плоского одномерного, осесимметричного, центрально-симметричного деформирования, плоской деформации в декартовых и цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений приведены в работе [19]. Сплошная среда рассматривается с учётом и физической, и геометрической нелинейности.

Цель исследования вывести дифференциальные уравнения равновесия геометрически и физически нелинейной сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования, при аппроксимации диаграмм объёмного и сдвигового деформирования квадратичными функциями, с использованием математической модели, не учитывающей геометрическую нелинейность и с использованием модели, учитывающей геометрическую нелинейность. Задачей исследования является получение дифференциальных уравнений в перемещениях для решения задач расчёта сплошных сред с центральной симметрией, как в отношении геометрии, так и в отношении нагрузки.

2. Материалы и методы

На первом криволинейном участке диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ (рис.) секущие модули объёмного расширения (сжатия) $K=K(\varepsilon, \Gamma)$ и сдвига $G=G(\varepsilon, \Gamma)$ будут определяться выражениями [3]:

$$K'(\varepsilon) = \frac{1}{3}K_0 + K_{01}\varepsilon; \quad G'(\Gamma) = G_0 + G_{01}\Gamma. \quad (1)$$

Здесь

$$K_{01} = \frac{1}{3\varepsilon_1^2}(\sigma_1 - K_0\varepsilon_1); \quad G_{01} = \frac{1}{\Gamma_1^2}(T_1 - G_0\Gamma_1). \quad (2)$$

Секущий модуль объёмного расширения (сжатия) $K=K(\varepsilon, \Gamma)$, и секущий модуль сдвига $G=G(\varepsilon, \Gamma)$ на втором криволинейном участке диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ (рис.) будут вычисляться по формулам:

$$K''(\varepsilon) = a_1\varepsilon + b_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}; \quad G''(\Gamma) = a_2\Gamma + b_2 + \frac{c_2}{\Gamma}. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}; \quad b_1 = \frac{1}{3} \left[K_1 - 2 \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1 \right]; \\ c_1 &= \frac{1}{3} \left[\sigma_1 - K_1\varepsilon_1 - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1^2 \right]; \quad a_2 = \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2}; \\ b_2 &= G_1 - 2 \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1; \quad c_2 = T_1 - G_1\Gamma_1 - \frac{(T_2 - T_1) - G_1(\Gamma_2 - \Gamma_1)}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)^2} \Gamma_1^2. \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах (2) и (4) введены обозначения: K_0 – начальный модуль объёмного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – начальный модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии); G_1 – начальный модуль упрочнения при сдвиге; σ_1, ε_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma \approx \varepsilon$; T_1, Γ_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T \approx \Gamma$; σ_2, ε_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma \approx \varepsilon$; T_2, Γ_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T \approx \Gamma$.

Кроме того, σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

При центрально-симметричном деформировании геометрически линейной сплошной среды объёмная деформация и интенсивность деформаций сдвига вычисляются по формулам:

$$\varepsilon = \varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi} \quad \text{и} \quad \Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2}.$$

Кроме того, $\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u}{\partial R}$; $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{R}$, причём:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} &= \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R} = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right); \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial R} &= \frac{4}{3\Gamma} (\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \left(\frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} - \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R} \right) = \frac{4}{3\Gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right] \left[\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right]. \end{aligned}$$

В зависимости от взаимного расположения точек излома графиков на диаграммах объёмного и сдвигового деформирования можно записать шесть случаев физических соотношений.

Физические уравнения для геометрически линейной модели:

Случай 1: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{d\Gamma^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, т.е. графики диаграмм и объёмного и

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждый, имеют точки излома.

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объёмного и сдвигового деформирования совпадают, то есть $|\varepsilon_I| < \Gamma_I$.

При этом:

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_I| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_I. \quad (5)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объёмного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_I| < \Gamma_I$.

При этом:

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_I| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_I. \quad (6)$$

Здесь интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что:

$$|\varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}| = |\varepsilon_I|. \quad (7)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объёмного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_I| < \Gamma_I$.

При этом:

$$0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| < |\varepsilon_I| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_I. \quad (8)$$

Здесь объёмной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2} = \Gamma_I. \quad (9)$$

В этом случае физические уравнения центрально-симметричного деформирования сплошной среды с учётом формул (1) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Случай 2: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_I} \neq K_I, \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_I} \neq G_I$, то есть графики диаграмм и объёмного и

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждый, имеют точки излома.

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объёмного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_I| < \Gamma_I$.

При этом:

$$|\varepsilon_I| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| < \Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_I. \quad (11)$$

Здесь, объёмной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (9), а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (7).

В этом случае физические уравнения центрально-симметричного деформирования сплошной среды с учётом формул (1) и (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} &= K^{II}(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= K^{II}(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Случай 3: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_I} \neq K_I, \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_I} \neq G_I$, т.е. графики диаграмм и объёмного и

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждый, имеют точки излома.

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объёмного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_I| < \Gamma_I$.

При этом:

$$|\varepsilon_0| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_I| < \Gamma_I \leq \Gamma \leq \Gamma_0. \quad (13)$$

Здесь, объёмной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (9), а интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (7).

В этом случае физические уравнения центрально-симметричного деформирования сплошной среды с учётом формул (1) и (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^II(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^II(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \varepsilon \right).\end{aligned}\quad (14)$$

Случай 4: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left. \frac{dG^II(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть графики диаграмм и объёмного и

сдвигового деформирования, аппроксимированные двумя параболой каждый, имеют точки излома.

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объёмного и сдвигового деформирования совпадают, то есть $|\varepsilon_I| = \Gamma_I$.

При этом:

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_I| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_I. \quad (15)$$

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объёмного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_I| < \Gamma_I$.

При этом:

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_0| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_I. \quad (16)$$

Здесь, объёмной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (9).

Точки излома графиков на квадратичных диаграммах объёмного и сдвигового деформирования не совпадают, то есть $|\varepsilon_I| > \Gamma_I$.

При этом:

$$|\varepsilon| \geq |\varepsilon_I| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_0. \quad (17)$$

Здесь, интенсивности Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что выполняется соотношение (7).

В этом случае физические уравнения центрально-симметричного деформирования сплошной среды с учётом формул (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= K^II(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^II(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= K^II(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^II(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \varepsilon \right).\end{aligned}\quad (18)$$

Случай 5: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} = K_1$, $\left. \frac{dG^II(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то есть точка излома графика на

квадратичной диаграмме $\sigma \approx \varepsilon$ отсутствует. При этом если $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_I$, то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (10); если $\Gamma \geq \Gamma_I$, то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (14).

Случай 6: $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1$, $\left. \frac{dG^II(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} = G_1$, то есть точка излома графика на

квадратичной диаграмме $\Gamma \approx \varepsilon$ отсутствует. При этом если $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_I|$, то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (10); если $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_I|$, то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (12).

Подставляя физические уравнения (10), (12), (14), (18) в дифференциальное уравнение равновесия центрально-симметричного деформирования сплошной среды [19]:

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{2}{R} (\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}) + F_R = 0, \quad (19)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + B + F_R = 0. \quad (20)$$

Коэффициенты A и B в уравнении (20) зависят от вида физических уравнений.

1) Для физических уравнений, представленных формулами (10):

$$A = K'(\varepsilon) + K_{01}\varepsilon + \frac{4}{3}G'(\Gamma) + \frac{8G_{01}}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right);$$

$$B = \left[K'(\varepsilon) + K_{01}\varepsilon - \frac{2}{3}G'(\Gamma) \right] \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) - \frac{8G_{01}}{3\Gamma R} \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 +$$

$$+ \frac{4}{R}G'(\Gamma)(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (21)$$

2) Для физических уравнений, представленных соотношениями (12):

$$A = K''(\varepsilon) + \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon + \frac{4}{3}G'(\Gamma) + \frac{8G_{01}}{3\Gamma} \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right);$$

$$B = \left[K''(\varepsilon) + \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon - \frac{2}{3}G'(\Gamma) \right] \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) - \frac{8G_{01}}{3\Gamma R} \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 + \frac{4}{R}G'(\Gamma)(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (22)$$

3) Для физических уравнений, представленных зависимостями (14):

$$A = K'(\varepsilon) + K_{01}\varepsilon + \frac{4}{3}G''(\Gamma) + \frac{8}{3\Gamma} \left(a_2 - \frac{c_2}{\Gamma^2} \right) \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right);$$

$$B = \left[K'(\varepsilon) + K_{01}\varepsilon - \frac{2}{3}G''(\Gamma) \right] \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) - \frac{8}{3\Gamma R} \left(a_2 - \frac{c_2}{\Gamma^2} \right) \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 + \frac{4}{R}G''(\Gamma)(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (23)$$

4) Для физических уравнений (18):

$$A = K''(\varepsilon) + \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon + \frac{4}{3}G''(\Gamma) + \frac{8}{3\Gamma} \left(a_2 - \frac{c_2}{\Gamma^2} \right) \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right);$$

$$B = \left[K''(\varepsilon) + \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right) \varepsilon - \frac{2}{3}G''(\Gamma) \right] \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) - \frac{8}{3\Gamma R} \left(a_2 - \frac{c_2}{\Gamma^2} \right) \times$$

$$\times \left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2 + \frac{4}{R}G''(\Gamma)(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi}). \quad (24)$$

В формулах (21)-(24):

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right)^2}.$$

Замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды [1] описываются соотношениями, устанавливающими, в самом общем случае, перекрёстные зависимости между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщённых напряжений и нелинейных деформаций:

$$K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*), \quad G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*). \quad (25)$$

Здесь σ^* – первый инвариант тензора обобщённых напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщённых касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

Аппроксимируя зависимости (25) биквадратичными функциями, нетрудно получить секущие модули объёмного расширения (сжатия) $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ и сдвига $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ на первом и втором криволинейных участках диаграмм $\sigma^* \approx \varepsilon^*$ и $T^* \approx \Gamma^*$, аналогичных соотношениям (1)-(4). При этом все величины, входящие в формулы (1)-(4) следует записывать со звёздочками.

Таким образом, K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; K_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при объёмном расширении (сжатии); G_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при сдвиге; σ_1^* , ε_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma^* \approx \varepsilon^*$; T_1^* , Γ_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T^* \approx \Gamma^*$; σ_2^* , ε_2^* – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma^* \approx \varepsilon^*$; T_2^* , Γ_2^* – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T^* \approx \Gamma^*$.

Физические соотношения для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая центрально-симметричного деформирования будут записываться в форме, аналогичной соотношениям (10), (12), (14), (18) (если у всех величин, входящих в эти формулы проставить звёздочки).

Дифференциальное уравнение равновесия для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая центрально-симметричного деформирования имеет вид [19]:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \sigma_{RR}^* \right] + \frac{2}{R} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \sigma_{RR}^* - \left(1 + \frac{u}{R} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* \right] + F_R^* = 0. \tag{26}$$

При центрально-симметричном деформировании с учётом геометрической нелинейности $\varepsilon^* = \varepsilon_{RR}^* + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^*$ и $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2}$, причём $\varepsilon_{RR}^* = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2$; $\varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{u}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial R} &= \frac{\partial \varepsilon_{RR}^*}{\partial R} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{\partial R} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right); \\ \frac{\partial \Gamma^*}{\partial R} &= \frac{4}{3\Gamma^*} (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \left(\frac{\partial \varepsilon_{RR}^*}{\partial R} - \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{\partial R} \right) = \frac{4}{3\Gamma^*} \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right] \times \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя физические уравнения в дифференциальное уравнение равновесия центрально-симметричного деформирования сплошной среды при учёте геометрической нелинейности (26), получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + B + DF_R = 0. \tag{27}$$

Здесь $D = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left(1 + \frac{u}{R} \right)$. Коэффициенты A и B в уравнении (27) зависят от вида физических уравнений. Геометрически нелинейный аналог соотношений (21) имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left\{ K^{*I}(\varepsilon^*) + K_{01}^* \varepsilon^* + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} G^{*I}(\Gamma^*) + \frac{8G_{01}^*}{3\Gamma^*} \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right] \right\}; \\ B &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left\{ \left[K^{*I}(\varepsilon^*) + K_{01}^* \varepsilon^* - \frac{2}{3} G^{*I}(\Gamma^*) \right] \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8G_{01}^*}{3\Gamma^* R} \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{2}{R} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left[K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] - \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \times \\ &\quad \times \left[K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right]. \end{aligned} \tag{28}$$

Геометрически нелинейный аналог соотношений (22) записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} A &= K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left\{ K^{*II}(\varepsilon^*) + \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} G^{*I}(\Gamma^*) + \frac{8G_{01}^*}{3\Gamma^*} \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right] \right\}; \\ B &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left\{ \left[K^{*II}(\varepsilon^*) + \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* - \frac{2}{3} G^{*I}(\Gamma^*) \right] \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8G_{01}^*}{3\Gamma^* R} \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{2}{R} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left[K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] - \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \times \\ &\quad \times \left[K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*I}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Геометрически нелинейный аналог соотношений (23) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 A &= K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 \left\{ K^{*I}(\varepsilon^*) + K_{01} \varepsilon^* + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} G^{*II}(\Gamma^*) \right\} + \frac{8}{3\Gamma^*} \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right) \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right]; \\
 B &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left\{ \left[K^{*I}(\varepsilon^*) + K_{01} \varepsilon^* - \frac{2}{3} G^{*II}(\Gamma^*) \right] \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) - \frac{8}{3\Gamma^* R} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right) \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right\} + \\
 &\quad + \frac{2}{R} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left[K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] - \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \times \\
 &\quad \times \left[K^{*I}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right].
 \end{aligned} \tag{30}$$

Геометрически нелинейный аналог соотношений (24) получает вид:

$$\begin{aligned}
 A &= K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 \left\{ K^{*II}(\varepsilon^*) + \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} G^{*II}(\Gamma^*) + \frac{8}{3\Gamma^*} \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right) \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right] \right\}; \\
 B &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left\{ \left[K^{*II}(\varepsilon^*) + \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right) \varepsilon^* - \frac{2}{3} G^{*II}(\Gamma^*) \right] \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) - \right. \\
 &\quad - \frac{8}{3\Gamma^* R} \left(a_2^* - \frac{c_2^*}{\Gamma^{*2}} \right) \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{u}{R} \right) \times \\
 &\quad \times \left. \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right\} + \frac{2}{R} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left[K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{2}{R} \left(1 + \frac{u}{R} \right) \left[K^{*II}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*II}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right].
 \end{aligned} \tag{31}$$

В уравнениях (28)-(31):

$$\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{R} \right)^2 \right]^2}.$$

3. Результаты

Дифференциальные уравнения в перемещениях, описывающие напряжённо-деформированное состояние физически нелинейной сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений, без учёта геометрически нелинейности, построены – это соотношения (21)-(24).

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие напряжённо-деформированное состояние физически нелинейной сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений с учётом геометрически нелинейности, представлены соотношениями (28)-(31).

4. Обсуждение

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, полученные как для геометрически линейной модели сплошной среды, так и для модели, учитывающей геометрическую нелинейность (в смысле В.В. Новожилова) имеют достаточно сложную структуру. Это обусловлено тем, что физические уравнения записываются для переменных модулей и объёмного расширения (сжатия), и сдвига, то есть учитывается нелинейность, как диаграммы объёмного расширения (сжатия), так и нелинейность диаграммы сдвига.

Вместе с тем эти дифференциальные уравнения линейны относительно старшей производной от радиального перемещения по пространственной координате (радиусу), несмотря на то, что замыкающие уравнения физических соотношений описываются биквадратичными функциями. Квазилинейность дифференциальных уравнений второго порядка не может существенно усложнить процедуру их решения, так как методы решения таких уравнений разработаны достаточно подробно.

5. Заключение

Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред, находящихся в условиях центрально-симметричного деформирования, замыкающие уравнения физических соотношений для которых описываются биквадратичными функциями.

Список библиографических ссылок

1. Новожилов В. В. Теория упругости. М. : Судпромгиз., 1958. 370 с.
2. Бакушев С. В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2019. № 2 (283). С. 2–11.
3. Бакушев С. В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2020. № 3 (290). С. 2–14. DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.
4. Гоцев Д. В., Ковалев А. В., Внуков А. Н. Численно-аналитическое исследование напряжённо-деформированного состояния неоднородного упругого породного массива ослабленного сферической полостью // *Воздушно-космические силы. Теория и практика*. 2019. № 11. С. 45–57.
5. Гоцев Д. В., Свиридова Е. Н. Математическое моделирование напряжённо-деформированного состояния упругого массива вблизи сферической полости с учётом технологической неоднородности его механических свойств // *Инженерный вестник Дона*. 2018. № 3 (50). С. 67.
6. Алимжанов А. М., Куаншалиев А. А., Исмаканова А. К., Айтен Э. Упругопластическое напряжённо-деформированное состояние массива со сферической полостью с учётом запредельного деформирования горных пород // *Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева*. 2010. № 3 (64). С. 112–118.
7. Алимжанов А. М. Напряжённо-деформированное состояние и устойчивость приконтурной зоны сферической ёмкости в массиве с технологической неоднородностью механических свойств горных пород // *Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук*. 2014. Т. 1. № 1. С. 13–20.
8. Максимов А. Н. К вопросу определения напряжённого состояния массива из сыпучей среды // *Вестник Чувашской государственной сельскохозяйственной академии*. 2017. № 1 (1). С. 75–81.
9. Мусабаев Т. Т., Каюпов Т. К. Расчёт цилиндрических и шаровидных подземных сооружений в неоднородном нелинейном массиве горных пород при различных чрезвычайных воздействиях // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2012. № 1 (240). С. 20–25.
10. Журавков М. А., Круподеров А. В. О динамическом воздействии сосредоточенной силы в упругом изотропном пространстве со сферической полостью // *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук*. 2010. № 3. С. 44–50.
11. Ксендзенко Л. С., Макаров В. В. Зональное разрушение массива горных пород вокруг подземных выработок (обзор) // *Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета*. 2017. № 4 (33). С. 118–130. DOI: 10.5281/zenodo.1119185.

12. Пеньков В. Б., Саталкина Л. В., Шульмин А. С. Основная смешанная задача для сферической полости в упругом пространстве // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 1-1. С. 207–215.
13. Андреев В. И. Некоторые задачи теории упругости для радиально неоднородных тел // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2010. № 5 (136). С. 26–27.
14. Фролова И. И. Особенности расчёта неоднородного породного массива со сферической полостью, созданной взрывом // БСТ: Бюллетень строительной техники. 2020. № 1 (1025). С. 44–46.
15. Бердников К. В., Стружанов В. В. Остаточные напряжения в упругопластическом пространстве, возникающие после расширения сферической полости // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2013. № 2 (18). С. 18–26.
16. Frolova I., Andreev V. Thermal stress state of rock massif with a spherical cavity taking into account inhomogeneity of the medium // MATEC Web of Conferences. 2016. № 86. P. 03010. DOI: 10.1051/mateconf/20168603010.
17. Koziol P., Mares C., Pilecki R. Spherical cavity in the layer subjected to dynamic load // E3S Web of Conferences. 2019. 106. P. 01025. DOI: 10.1051/e3sconf/201910601025.
18. Haythem Gharsallaoui, Mustafa Jafari, Alain Holeyman. Pile end bearing capacity in rock mass using cavity expansion theory // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2020. № 12 (5). P. 1103–1111.
19. Бакушев С. В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. М. : ЛЕНАНД, 2020. 304 с.

Bakushev Sergey Vasilevish

doctor of technical sciences, professor

E-mail: bakuchsv@mail.ru

Penza State University of Architecture and Construction

The organization address: 440028, Russia, Penza, Germana Titova st., 28

**Differential equations of equilibrium for continuous media calculating
with the approximation of volumetric and shear deformation diagrams
by biquadrates functions (centrally symmetric deformation)**

Abstract

Problem statement. The purpose of the study is to derive differential equilibrium equations for a geometrically and physically nonlinear continuous medium under conditions of centrally symmetric deformation when the diagrams of volumetric and shear deformation are approximated by quadratic functions. Two mathematical models are used that describe the mechanical behavior of a material of a continuous medium: a model that does not take into account geometric nonlinearity and a model considering geometric nonlinearity.

Results. The formation of physical dependencies is based on the calculation of the secant moduli of volumetric and shear deformation. When approximating the graphs of the volumetric and shear deformation diagrams using two segments of parabolas, the secant shear modulus in the first segment represents a linear function of the intensity of shear deformations; the secant modulus of volumetric expansion-contraction represents a linear function of the first invariant of the strain tensor. In the second section of the diagrams of both volumetric and shear deformation, the secant shear modulus is a fractional (rational) function of the intensity of shear deformations; the secant modulus of volumetric expansion-contraction is a fractional (rational) function of the first invariant of the strain tensor. Proceeding from the assumption that, generally speaking, the volumetric and shear deformation diagrams are independent on each other, six main cases of physical dependences are considered, depending on the relative position of the breakpoints of the volumetric and shear deformation diagrams graphs, each approximated by two parabolas. Based on the obtained physical equations, we derived differential equations of equilibrium in displacements for a continuous medium under conditions of centrally symmetric deformation.

Conclusions. The significance of the results obtained for the construction industry lies in the fact that the obtained differential equations in displacements will make it possible to obtain a solution to the problems of calculating continuous media with central symmetry considering both geometry and load, the mechanical behavior of which is described taking into account physical and geometric nonlinearity, when approximation of diagrams plots of volumetric and shear deformation by biquadratic functions take place.

Keywords: continuous medium, centrally symmetric deformation, approximation of volumetric and shear deformation diagrams, quadratic functions, differential equations of equilibrium in displacements, geometric linearity, geometric nonlinearity.

For citation: Bakushev S. V. Differential equations of equilibrium for continuous media calculating with the approximation of volumetric and shear deformation diagrams by biquadratic functions (centrally symmetric deformation) // *Izvestija KGASU*. 2020. № 4 (54). P. 121–133.

References

1. Novozhilov V. V. The theory of elasticity. M. : Sudpromgiz, 1958. 370 p.
2. Bakushev S. V. Approximations of warp diagrams using bilinear functions // *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij*. 2019. № 2 (283). P. 2–11.
3. Bakushev S. V. Approximation of deformation diagrams by quadratic functions // *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij*. 2020. № 3 (290). P. 2–14. DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.
4. Gotsev D. V., Kovalev A. V., Vnukov A. N. Numerical-analytical study of the stressed-deformed state of an inhomogeneous elastic rock mass weakened by a spherical cavity // *Vozdushno-kosmicheskie sily. Teoriya i praktika*. 2019. № 11. P. 45–57.
5. Gotsev D. V., Sviridova E. N. Mathematical modeling of the stress-strain state of an elastic mass near a spherical cavity taking into account the technological heterogeneity of its mechanical properties // *Inzhenernyj vestnik Dona*. 2018. № 3 (50). P. 67.
6. Alimzhanov A. M., Kuanshaliev A. A., Ismakanova A. K., Ajten E. Elastic plastic stress-strain state of mass with spherical cavity, taking into account the extreme deformation of rocks // *Vestnik Kazahskoj akademii transporta i kommunikacij im. M. Tynyshpaeva*. 2010. № 3 (64). P. 112–118.
7. Alimzhanov A. M. Stress-strain state and stability of rocks with technologically heterogeneous mechanical properties around a spherical void // *Fundamental'nye i prikladnye voprosy gornyh nauk*. 2014. Vol. 1. Iss. 1. P. 13–20.
8. Maksimov A. N. About the question of strain state determination of the massif consisting of the loose medium // *Vestnik CHuvashskoj gosudarstvennoj sel'skohozyajstvennoj akademii*. 2017. № 1 (1). P. 75–81.
9. Musabaev T. T., Kayupov T. K. Calculation of cylindrical and spherical underground structures in a non-uniform nonlinear rock massif under various extreme exposures // *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij*. 2012. № 1 (240). P. 20–25.
10. Zhuravkov M. A., Krupodyorov A. V. A point force solution for isotropic elastic space with a spherical cavity // *Izvestiya Nacional'noj akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-tekhnicheskikh nauk*. 2010. № 3. P. 44–50.
11. Ksendzenko L. C., Makarov V. V. Zonal failure of rock mass around underground openings (review) // *Vestnik Inzhenernoj shkoly Dal'nevostochnogo federal'nogo universiteta*. 2017. № 4 (33). P. 118–130. DOI: 10.5281/zenodo.1119185.
12. Pen'kov V. B., Satalkina L. V., Shul'min A. S. The main mixed problem for spherical cavity in elastic space // *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennyye nauki*. 2014. № 1-1. P. 207–215.
13. Andreev V. I. Specific theory of elasticity schemes for radially inhomogeneous bodies // *Stroitel'nye materialy, oborudovanie, tekhnologii XXI veka*. 2010. № 5 (136). P. 26–27.
14. Frolova I. I. Features of calculation of an inhomogeneous rock array with a spherical cavity created by an explosion // *BST: Byulleten' stroitel'noj tekhniki*. 2020. № 1 (1025). P. 44–46.

15. Berdnikov K. V., Struzhanov V. V. Residual stresses in the elastoplastic space arising after the expansion of a spherical cavity // Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putej soobshcheniya. 2013. № 2 (18). P. 18–26.
16. Frolova I., Andreev V. Thermal stress state of rock massif with a spherical cavity taking into account inhomogeneity of the medium // MATEC Web of Conferences. 2016. № 86. P. 03010. DOI: 10.1051/mateconf/20168603010.
17. Koziol P., Mares C., Pilecki R. Spherical cavity in the layer subjected to dynamic load // E3S Web of Conferences. 2019. № 106. P. 01025. DOI: 10.1051/e3sconf/201910601025.
18. Haythem Gharsallaoui, Mustafa Jafari, Alain Holeyman. Pile end bearing capacity in rock mass using cavity expansion theory // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2020. № 12 (5). P. 1103–1111.
19. Bakushev S. V. Differential equations and boundary problems in the mechanics of a deformable solid. M. : LENAND, 2020. 304 p.