

УДК 539.3

Хамитов Т.К. – кандидат технических наук, доцент

E-mail: tagirkx@yandex.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Хасанов А.Р. – инженер ПТО

E-mail: hasanov-1994@yandex.ru

ООО «Завод ЖБИ «Кулонстрой»

Адрес организации: Россия, г. Казань, ул. Гвардейская, д. 53

Динамическое выпучивание цилиндрической оболочки при осевом ударе

Аннотация

Постановка задачи. Рассматриваются задачи динамической устойчивости упругой и упруго-пластической цилиндрической оболочки при продольном ударе. Известно, что при ударных нагрузках, превышающих статическое критическое значение, формы потери устойчивости отличаются от статических. Рассмотрены два вида нагружения оболочки: мгновенное приложение и линейное возрастание напряжения в функции времени.

Результаты. Исследуются осесимметричные формы движений, для определения длин полуволн используется статический критерий устойчивости. Для двух видов нагружения получены критические длины полуволн в зависимости от коэффициента динамичности. Предполагается, что выпучивание происходит при первом прохождении продольной волны вдоль оболочки и в этом случае оболочку можно считать полубесконечной. В случае мгновенного приложения нагрузки к упругой оболочке показана связь между статическим критерием и критерием Лаврентьева-Ишлинского.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в том, что для оболочки средней длины значения критических длин полуволн сильно зависят от характера напряженного состояния за фронтом продольной волны.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, потеря устойчивости, статический критерий, полуволна.

Работы [1-4], посвященные устойчивости упругой и упруго-пластической цилиндрической оболочки при продольном ударе, позволяют сделать следующие выводы:

1) если время приложения нагрузки на торце меньше времени пробега продольной волны до противоположного торца, то критическая нагрузка практически не зависит от длины оболочки. При этом длина оболочки должна составлять в несколько статических полуолн потери устойчивости;

2) для расчета достаточно рассмотреть шарнирно опертую оболочку, так как граничные условия влияют на значения критических нагрузок лишь для коротких оболочек, сравнимых с длиной статических полуолн.

В этих работах для определения критических нагрузок использовался статический критерий (равенство нулю частоты поперечных колебаний). В частном случае, когда к торцу упругой оболочки прикладывается постоянная нагрузка, статический критерий приводит верхней статической критической нагрузке [1, 2]. Однако при ударе нагрузка может в несколько раз больше, чем статическое критическое значение и формы потери устойчивости отличаются от статических [6]. В данной работе определяются длины полуолн, когда оболочка прикладывается нагрузка, больше статической критической.

1. Упругая оболочка

Пусть к одному из торцов оболочки прикладывается ударная нагрузка σ , законы изменения которой показаны на рис. 1: нагрузка прикладывается мгновенно (рис. 1а) или линейно возрастает во времени (рис. 1б). Если предполагать [1-4], что выпучивание происходит при первом пробеге продольной волны вдоль оболочки, то оболочку можно считать переменной длины, т.е. полубесконечной. Кроме того, на фронте продольной волны примем условия шарнирного опирания.

Уравнение осесимметричных поперечных движений оболочки запишем в виде:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) h \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{Eh}{R^2} w + hr \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

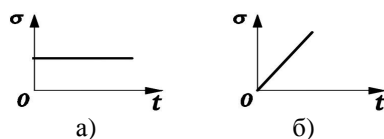


Рис. 1. Законы изменения нагрузки в зависимости от времени

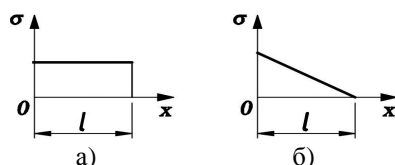


Рис. 2. Эпюры продольных сжимающих напряжений вдоль оболочки: а) при мгновенном нагружении; б) при линейном изменении нагрузки

Все обозначения в уравнении (1) общепринятые. Сжимающие напряжения $\sigma(x)$ зависят от вида приложения нагрузки и находятся из решения уравнения продольных движений.

1.1. Рассмотрим сначала мгновенное приложение нагрузки. В этом случае напряжения по длине оболочки постоянны и уравнение (1) получается с постоянными коэффициентами:

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + Sh \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R^2} w + hr \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

Решение (2) запишем в виде:

$$w(x,t) = A(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad (m=1, 2, 3, \dots). \tag{3}$$

Подставляя (3) в уравнение (2) после интегрирования получим:

$$r h \frac{d^2 A(t)}{dt^2} + A(t) \left(D \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - S h \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{R^2} \right) = 0. \tag{4}$$

где $D = Eh^3 / (12(1-\nu^2))$ – цилиндрическая жесткость оболочки.

Решение уравнения (4) представим в виде:

$$A(t) = Be^{\omega t}, \quad \text{где } B = \text{const}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение (4) для показателя экспоненты получим:

$$\omega^2 = \left(D l^4 - S h l^2 + \frac{Eh}{R^2} \right) / r h. \tag{6}$$

Здесь $\lambda = m\pi/l = \pi/l_m$, $l_m = l/m$ – длина полуволны потери устойчивости.

Если воспользоваться статическим критерием устойчивости, полагая $\omega=0$ в (6), для критического напряжения и полуволны соответственно получим:

$$S = S_{cm} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{R}, \tag{7}$$

$$l_m = \frac{p \sqrt{Rh}}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}. \tag{8}$$

Отсюда видно, что статический критерий приводит к классическим выражениям для напряжений и длин полуволн. Длина сжатого участка оболочки (критическая длина), начиная с которой становится возможна потеря устойчивости по статическому критерию, для рассматриваемого случая равна длине полуволны ($m=1$). Определим из уравнения (6)

критическую длину полуволны, когда к торцу оболочки приложены напряжения, превосходящие σ_{cm} ($\sigma > \sigma_{cm}$):

$$DI^4 - shl^2 + \frac{Eh}{R^2} = 0. \tag{9}$$

Корни уравнения (9) будут иметь следующий вид:

$$I_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{s \pm \sqrt{s^2 - s_{cm}^2}}{2D}}. \tag{10}$$

Действительный корень уравнения (9), соответствующей наименьшей длине полуволны имеет вид:

$$I = \sqrt{\frac{s + \sqrt{s^2 - s_{cm}^2}}{2D}},$$

отсюда критическая длина полуволны:

$$l_m^{cm} = \frac{ph}{\sqrt{6(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{E}{s + \sqrt{s^2 - s_{cm}^2}}} \tag{11}$$

или

$$l_m^{cm} = \frac{p\sqrt{Rh}}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \frac{1}{\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}}}, \tag{12}$$

где $k = \frac{s}{s_{cm}}$ – коэффициент динамичности.

Если воспользоваться критерием Лаврентьева-Ишлинского, оболочка выпучивается по полуволнам, имеющим максимальный темп возрастания амплитуды. Отыскивая экстремум функции ω^2 по числу полуволн m , из (6) получим:

$$2D\lambda^2 - \sigma h = 0$$

или

$$\lambda^2 = \sigma h / 2D. \tag{13}$$

Для длины полуволны выпучивания $l_m^{din} = p/I$ получаем:

$$l_m^{din} = p \sqrt{\frac{2D}{sh}}. \tag{14}$$

Полуволны, длины которых вычисляются по формуле (14), будут обладать наибольшей скоростью возрастания амплитуды. Если сравнить критические длины полуволн, определяемые по формулам (12) и (14), то приходим к формуле:

$$\left(\frac{l_m^{cm}}{l_m^{din}}\right)^2 = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}. \tag{15}$$

На рис. 3 приведено сравнение критических длин полуволн, полученных по двум критериям, в зависимости от коэффициента динамичности k . На графике обозначено: $n = l_m^{cm} / l_m^{din}$. Из рисунка видно, что квадрат отношения критических длин полуволн быстро стремится к 2.

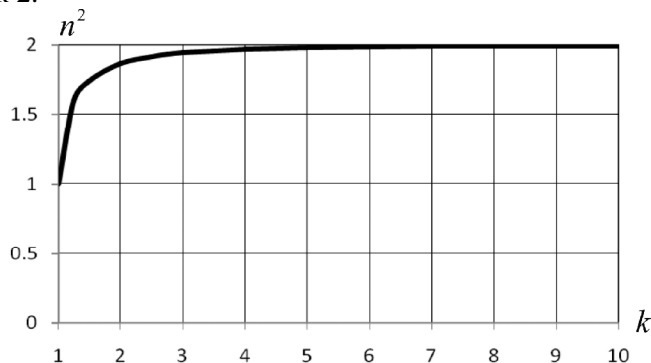


Рис. 3. Зависимость критических длин полуволн от коэффициента динамичности k

1.2. В случае линейного возрастания нагрузки, сжимающие напряжения по длине оболочки представим в виде ряда:

$$s(x) = s \left(1 - \frac{x}{l} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(I_k x), \quad I_k = \frac{pk}{l}. \tag{16}$$

$$a_0 = \frac{s}{2}, \quad a_k = \frac{2s}{p^2 k^2} (1 - \cos(pk)), \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Представим решение уравнения (1) в виде:

$$w(x, t) = e^{wt} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(I_k x), \quad I_k = \frac{pk}{l}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{17}$$

Подставляя (16)-(17) в (1), после некоторых преобразований получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений относительно f_k :

$$f_k \Omega_k + \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i a_{ki} + \sum_{i=1}^{k-1} f_i a_{ki} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{18}$$

где $a_{kk} = \Omega_k = 2DI_k^4 - I_k^2 (2a_0 + a_{2k}) + 2Eh/R^2 + 2rhw^2$ при $i = k$,

$$a_{ik} = a_{ki} = -\lambda_i \lambda_k (a_{i-k} + a_{i+k}) \text{ при } i \neq k.$$

Согласно статическому критерию устойчивости [7, 8] длина полуволны определяется как наименьший корень уравнения:

$$\det \| a_{ik} \| = 0. \tag{19}$$

Для примера рассмотрена оболочка с параметрами $R/h = 600$; $h = 0,05 \text{ см}$; $\nu = 0,3$. Результаты расчета для двух видов нагружения показаны на рис. 4.

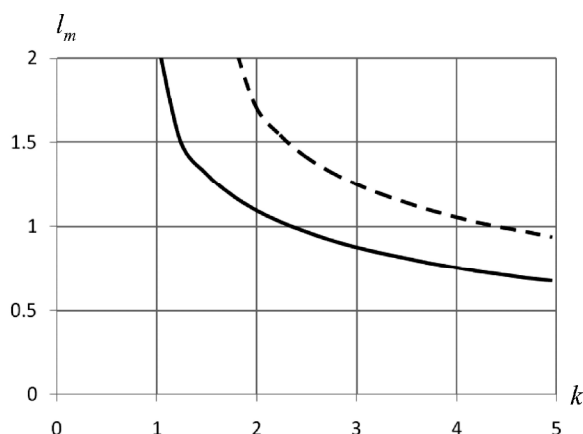


Рис. 4. Зависимость критических длин полуволн l_m (см) от коэффициента динамичности k : сплошная линия соответствует мгновенному нагружению оболочки, штриховая – линейному

2. Упруго-пластическая оболочка

Рассмотрим оболочку, к торцу которой прикладывается напряжение σ_0 , превышающее предел пропорциональности материала σ_s . Для материала примем диаграмму сжатия с линейным упрочнением [10]. В отличие от работ [3, 8], где находились напряжения в зависимости от длины сжатого участка, здесь определим длины полуволн, задаваясь напряжениями на торце. При этом напряженное состояние оболочки по длине при двух случаях нагружения будем считать известным [3]. На рис. 5 показаны эпюры продольных напряжений для двух случаев нагружения. На рис. 5а: l_1 – длина участка, где напряжения равны σ_0 , l_2 – длина участка, где напряжения равны пределу пропорциональности материала σ_s . Между длинами участков имеют место соотношения:

$$l = a_0 t, \quad l_1 = a_1 t, \quad l = l_1 + l_2, \quad l_1 = l \frac{a_1}{a_0} = l \sqrt{\frac{E_k}{E}}, \quad l_2 = l \left(1 - \sqrt{\frac{E_k}{E}} \right). \tag{20}$$

Выражения для длин по рис. 5б запишутся в виде:

$$l_1 = l \sqrt{\frac{E_k}{E}} \left(1 - \frac{s_s}{s_0} \right), \quad l_2 = l \left(1 - \sqrt{\frac{E_k}{E}} \right) \left(1 - \frac{s_s}{s_0} \right), \quad l_3 = l \frac{s_s}{s_0}. \tag{21}$$

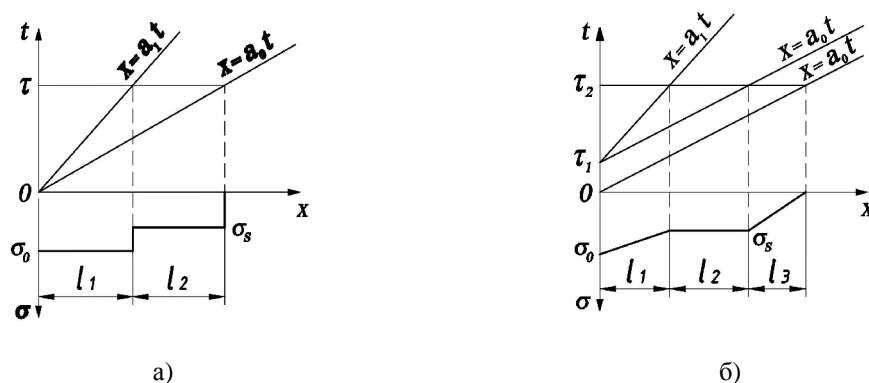


Рис. 5. Распространение продольных волн и напряженное состояние по длине оболочки: а) при мгновенном приложении напряжения; б) при линейном возрастании напряжения

Уравнение возмущенного движения оболочки запишем в виде [8, 10]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((D_2 - D_3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{B_2}{2R} + s_i h \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{3B_1}{4R^2} w + r h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{22}$$

2.1. Рассмотрим первый вид нагружения. Запишем выражения для коэффициентов B_1, B_2, D_2, D_3 :

$$D_2 - D_3 = \begin{cases} \frac{E_c + 3E_k}{36} h^3 & \text{при } 0 \leq x \leq l_1 \\ \frac{E + 3E_k}{36} h^3 & \text{при } l_1 < x \leq l. \end{cases} \tag{23}$$

$$B_1, \left(\frac{B_2}{2R} + s_i h \right) = \begin{cases} \frac{4}{3} E_c h, \quad \frac{h^2}{2} (E_c - E_k) + s_0 h & \text{при } 0 \leq x \leq l_1 \\ \frac{4}{3} E h, \quad \frac{h^2}{2} (E - E_k) + s_s h & \text{при } l_1 < x \leq l. \end{cases} \tag{24}$$

Здесь E, E_k, E_c – упругий, касательный и секущий модули.

Коэффициенты (5) и (6) представим в виде рядов:

$$(D_2 - D_3) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos(I_k x), \tag{25}$$

$$\left(\frac{B_2}{2R} + s_i h \right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(I_k x), \tag{26}$$

$$\frac{3B_1}{4R^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(I_k x), \tag{27}$$

где

$$d_0 = \frac{h^3}{36l} [(E_c - E)l_1 + (3E_k + E)l], \quad d_k = \frac{h^3}{18pk} [(E_c - E) \sin(I_k l_1)],$$

$$b_0 = \frac{h}{l} \left[\left(\frac{h}{4R} (E_c - E) + s_0 - s_s \right) l_1 + \left(\frac{h}{4R} (E - E_k) + s_s \right) l \right],$$

$$b_k = \frac{2h}{pk} \left[\left(\frac{h}{4R} (E_c - E) + s_0 - s_s \right) \sin(I_k l_1) \right],$$

$$c_0 = \frac{h}{R^2 l} [E(l - l_1) + E_c l_1], \quad c_k = \frac{2h}{R^2 pk} (E_c - E) \sin(I_k l_1).$$

Решение уравнения (4) ищем в виде (17). Подставляя (17), (25)-(27) в (22) получим бесконечную систему (18). Элементы определителя (19) имеют следующий вид:

$$a_{kk} = I_k^4 (2d_0 - d_{2k}) - I_k^2 (2b_0 + b_{2k}) + 2c_0 - c_{2k} + 2rhw^2 \quad \text{при } i = k,$$

$$a_{ik} = a_{ki} = I_i^2 I_k^2 (d_{i-k} - d_{i+k}) - I_i I_k (b_{i-k} + b_{i+k}) + c_{i-k} - c_{i+k} \quad \text{при } i \neq k.$$

2.2. Во втором случае нагружения оболочка по длине разбивается на три зоны с разными значениями напряжений в каждой зоне (рис. 5б). Коэффициенты B_1, B_2, D_2, D_3 имеют вид:

$$(D_2 - D_3), B_1 = \begin{cases} \frac{E_c + 3E_k}{36} h^3, & \frac{4}{3} E_c h, & \text{при } 0 \leq x \leq l_1, \\ \frac{E + 3E_k}{36} h^3, & \frac{4}{3} E h & \text{при } l_1 < x \leq l_1 + l_2, \\ \frac{E h^3}{12(1-n^2)}, & \frac{4}{3} E h & \text{при } l_1 + l_2 < x \leq l. \end{cases} \quad (28)$$

$$\frac{B_2}{2R} + s_i h = \begin{cases} \frac{h^2}{4R} (E_c - E_k) + s_s h + \frac{(s_0 - s_s)}{l_1} (l_1 - x) h & \text{при } 0 \leq x \leq l_1, \\ \frac{h^2}{4R} (E - E_k) + s_s h & \text{при } l_1 < x \leq l_1 + l_2, \\ s_s \frac{(b-x)}{l_3} h & \text{при } l_1 + l_2 < x \leq l. \end{cases} \quad (29)$$

Коэффициенты рядов (25)-(27) примут вид:

$$d_0 = \frac{h^3}{36l} \left[(E_c - E) l_1 + (3E_k + E)(l - l_3) + \frac{3El_3}{1-n^2} \right],$$

$$d_k = \frac{h^3}{18pk} \left[(E_c - E) \sin(I_k l_1) + \left(3E_k + E - \frac{3E}{1-n^2} \right) \sin(I_k (l - l_3)) \right],$$

$$b_0 = \frac{h}{2l} \left[\left(\frac{h}{2R} (E_c - E) + s_0 - s_s \right) l_1 + \left(\frac{h}{2R} (E - E_k) + s_s \right) (l - l_3) + s_s l \right],$$

$$b_k = \frac{2h}{pk} \left[\frac{h}{4R} (E_c - E) \sin(I_k l_1) + \frac{h}{4R} (E - E_k) \sin(I_k (l - l_3)) + \frac{s_0}{pk} \sqrt{\frac{E}{E_k}} (1 - \cos(I_k l_1)) + \frac{s_0}{pk} (\cos(I_k (l - l_3)) - \cos(pk)) \right],$$

$$c_0 = \frac{h}{R^2 l} [El + (E_c - E)l_1], \quad c_k = \frac{2h}{R^2 pk} (E_c - E) \sin(I_k l_1).$$

Результаты расчета для оболочки из дюралюминия Д16Т представлены на рис. 6, 7. Параметры оболочки: $E=7,5 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_s=2000 \text{ кг/см}^2$. Приведенные графики показывают, что критические длины полуволн существенно зависят как от характера нагружения, так и принятой диаграммы сжатия (секущего и касательного модулей) материала оболочки.

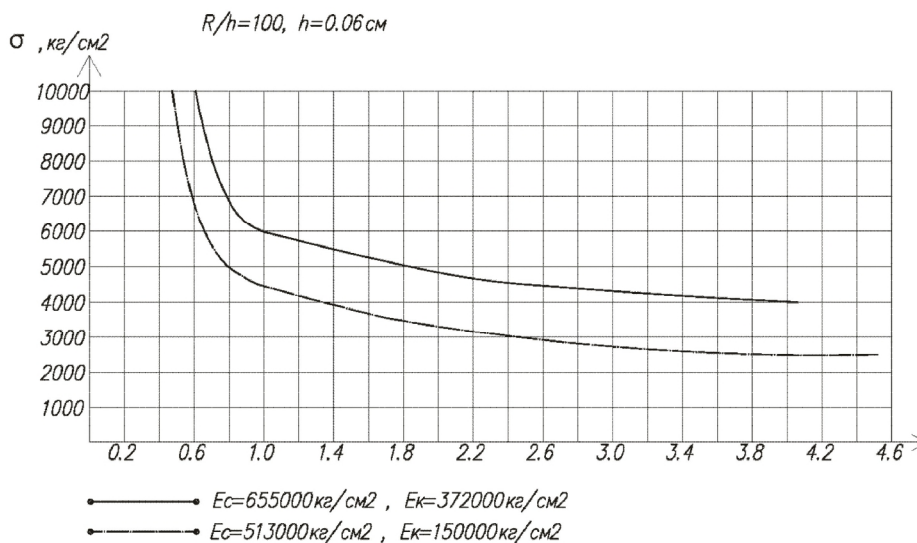


Рис. 6. Зависимость критических длин от напряжений при линейном возрастании напряжения на ударяемом торце оболочки

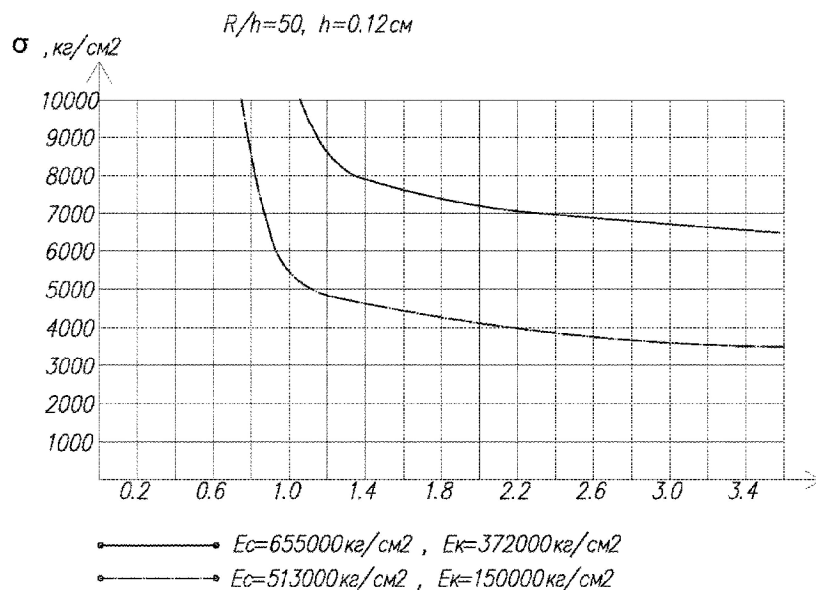


Рис. 7. Зависимость критических длин от напряжений при мгновенном приложении напряжения на ударяемом торце оболочки

Список библиографических ссылок

1. Хамитов Т. К., Шигабутдинов Ф. Г. К вопросу о потере устойчивости упругих цилиндрических оболочек при продольном сжатии усилием ударного типа // Вестник ИрГТУ. 2010. № 3 (43). С. 70–76.
2. Шигабутдинов Ф. Г., Хамитов Т. К. Определение критических усилий потери устойчивости упругих цилиндрических оболочек при продольном сжатии силами ударного типа // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2011. № 2. С. 85–92.
3. Хамитов Т. К. Об устойчивости упруго-пластической цилиндрической оболочки при продольном ударе // Известия КГАСУ. 2016. № 4 (38). С. 490–496.
4. Хамитов Т. К. Устойчивость упруго-пластической цилиндрической оболочки при продольном ударе : сб. трудов международной научно-технической конференции – Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании / УГТУ. Ульяновск, 2014. С. 257–261.
5. Мухутдинов Р. Ф., Шигабутдинов Ф. Г. Влияние местных дефектов на волнообразование в ортотропных цилиндрических оболочках конечной длины при продольном ударе // Вестник МГСУ. 2013. № 10. С. 60–67.
6. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР. 1949. т. 64, № 6. С. 779–782.
7. Мовсисян Л. А. О потере устойчивости цилиндрических оболочек при продольном ударе // Известия АН Армянской ССР. Серия физ.-мат. наук. 1964. т. 17, № 6. С. 57–64.
8. Аракелян А. Е., Мовсисян Л. А. Об упругопластической устойчивости стержня и цилиндрической оболочки при продольных интенсивных нагружениях // Известия АН Армянской ССР. Серия физ.-мат. наук. 1987. т. 40, № 5. С. 3–13.
9. Мовсисян Л. А. К устойчивости упругопластических стержней при ударных нагрузках // Известия АН Армянской ССР. Серия физ.-мат. наук. 1986. т. 39, № 2. С. 15–23.
10. Королев В. И. Упруго-пластические деформации оболочек. М. : Машиностроение, 1971. 304 с.

Khamitov T.K. – candidate of technical sciences, associate professor

E-mail: tagirkx@yandex.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Khasanov A.R. – engineer of DTD

E-mail: hasanov-1994@yandex.ru

LTD «Zavod ZBI «Culonstroy»

The organization address: Russia, Kazan, Gvardeyskaya st., 53

Dynamic buckling of cylindrical shell under axial impact

Abstract

Problem statement. Discusses the problem of dynamic stability of elastic and elastic-plastic cylindrical shell under longitudinal impact. It is known that under shock loads greater than the static critical value, the buckling modes are different from static. We considered two types of loading sheath: instant app and the linear increase in the voltage as a function of time.

Results. Examines the axisymmetric forms of the movements. For the determination of half wavelengths using a static criterion of stability. For two types of loading is obtained the critical length of half wavelengths depending on the dynamic factor. It is assumed that buckling occurs in the first pass of the longitudinal wave along the shell, and in this case, the shell can be considered semi-infinite. In the case of instantaneous application of the load to the elastic shell shows the relationship between the static criterion and the criterion of Lavrentiev-Ishlinskii.

Conclusions. The significance of the results for the construction industry is that for the shell of a medium length of critical half wavelengths strongly depend on the nature of the stress state behind the front of the longitudinal wave.

Keywords: cylindrical shell, buckling, static criterion, the half-wave.

References

1. Khamitov T. K., Shigabutdinov F. G. On the buckling of elastic cylindrical shells under longitudinal compression force impact type // Vestnik IrGTU. 2010. № 3 (43). P. 70–76.
2. Shigabutdinov F. G., Khamitov T. K. Because the determination of the critical efforts of the buckling of elastic cylindrical shells under longitudinal compression forces impact type // Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva, 2011. № 2. P. 85–92.
3. Khamitov T. K. On stability of elastic-plastic cylindrical shell under longitudinal impact // Izvestiya KGASU. 2016. № 4 (38). P. 490–496.
4. Khamitov T. K. Stability of elastic-plastic cylindrical shell under longitudinal impact : dig. of art. of the international scientific and technical conference – Mathematical methods and models: theory, applications and role in education / USTU. Ulyanovsk, 2014. P. 257-261.
5. Mukhutdinov R. F., Shigabutdinov F. G. The influence of local defects of wave generation in orthotropic cylindrical shells of finite length under longitudinal impact // Vestnik MGSU. 2013. № 10. P. 60–67.
6. Lavrent'ev M. A., Ishlinsky A. Yu. Dynamic forms of loss of stability of elastic systems // DAN USSR 1949. v. 64. № 6. P. 779–782.
7. Movsisyan L. A. On the buckling of cylindrical shells under longitudinal impact // Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Seriya fiz.-mat. nauk. 1964. v. 17. № 6. P. 57–64.
8. Arakelyan A. E., Movsisyan L. A. On elastic-plastic stability of rod and cylindrical shell under longitudinal intensive loads // Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Seriya fiz.-mat. nauk. 1987. v. 40. № 5. P. 3–13.
9. Movsisyan L. A. On the stability of elastoplastic rods under impact loads // Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Seriya fiz.-mat. nauk. 1986. vol. 39. № 2. P. 15–23.
10. Korolev V. I. Elastic-plastic deformation of shells. M. : Mashinostroenie, 1971. 304 p.