УДК 533.69.048
Гумеров А.В. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: anvar_gumerov@list.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1
Гумеров В.Г. – кандидат технических наук, доцент
Самарский государственный технический университет
Адрес организации: 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 194

Расчет силы, возникающей при движении кругового цилиндра в плоскопараллельном потоке, содержащем вихревую нить методом присоединенных вихрей

Аннотация

Постановка задачи. Требуется определить силу, действующую на круговой цилиндр при его движении в плоскопараллельном потоке, содержащем прямолинейную вихревую нить вблизи цилиндра.

Результаты. Показана возможность определения силы и момента, действующего на цилиндр импульсным способом в вихревых точках и интегрированием давления в контрольных точках. Для сравнительного анализа сила также определялась классическим способом, когда непроницаемость контура обеспечивается введением инверсионного вихря.

Выводы. Периодические изменения сил и моментов вызывают образование микротрещин в цилиндрических конструкциях. Поэтому они являются исходными данными при расчете элементов конструкций на усталость.

Ключевые слова: комплексный потенциал, метод Гаусса, интенсивности присоединенных вихрей, производная интенсивности, аргумент разности координат.

Введение

В начальный момент течение около внезапно приведенного в движение кругового цилиндра является безотрывным. Вскоре после начала движения в результате действия сил трения поток отрывается от поверхности и слева и справа образуются по вихревой пелене. Обычно, при расчетах вихревые пелены аппроксимируют дискретными вихрями, и полагают, что дальнейшее движение этих вихрей происходит в идеальной жидкости. Расчет движения вихрей около кругового цилиндра можно проводить классическим способом, когда непроницаемость контура обеспечивается введением в состав комплексного потенциала потенциалов инверсионных вихрей. В случае цилиндра с некруговым контуром применяют либо метод конформного отображения [1-4], либо метод присоединенных вихрей. Теоретические обоснования метода присоединенных вихрей с приведением большого числа примеров излагаются в книге [5].

В настоящей работе рассматривается движение одной вихревой нити с целью изучения особенностей определения силы при расчете обтекания цилиндра с некруговым контуром методом присоединенных вихрей.

Постановка задачи

Пусть заданы скорость поступательного потока V_∞, радиус цилиндра R (рис. 1), координаты и интенсивность вихревой нити соответственно $z_1=r\cdot\exp(i\varphi)$ и Γ. Требуется определить силу, действующую на цилиндр методом присоединенных вихрей.

Определение интенсивностей присоединенных вихрей

На контуре цилиндра расположим n присоединенных вихрей с равными угловыми интервалами $\Delta\varphi = 2\pi/n$. Координатами вихрей являются:

$$z_j=R\cdot exp(i\varphi_j), \text{ где } \varphi_j=j\cdot\Delta\varphi,\ j=1,2,\ldots,n.$$

Середины дуг окружности между соседними вихрями примем за контрольные точки (рис. 1). Контрольная точка с номером k находится в точке:

$$z_k=R\cdot exp(i\varphi_k), \text{ где } \varphi_k=(k–0,5)\cdot\Delta\varphi,\ k=1,2,\ldots,n.$$

Следовательно, вектор n_k = exp($i\varphi_k$) является единичным нормальным вектором контура в точке z_k.

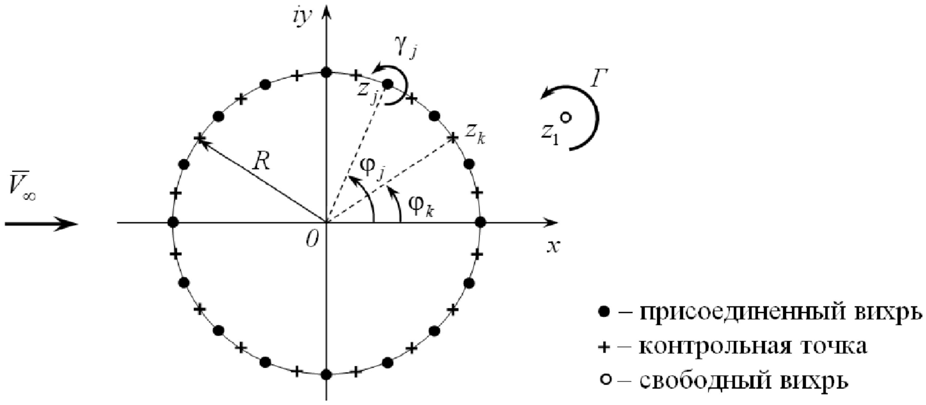

Рис. 1. Расчетная схема

Комплексный потенциал скорости W_n будет выражаться формулой [3]:

$$W_n = V_\infty z - \frac{i\Gamma}{2p} \cdot \ln(z - z_1) - \sum_{j=1}^{n} \frac{ig_j}{2p} \cdot \ln(z - z_j), \tag{1}$$

где g_j – неизвестная интенсивность присоединенного вихря. Интенсивности g_j будем определять по условию обеспечения нулевой нормальной скорости во всех контрольных точках. Скорость жидкости V_k и нормальная скорость V_k^n в контрольной точке z_k. выражаются формулами из (1):

$$V_k = conj(dW_n / dz|_{z=z_k}) = V_\infty + V_{k\Gamma} + \sum_{j=1}^{n} g_j V_{kj}, \tag{2}$$

где

$$V_{k\Gamma} = \frac{i\Gamma}{2p} \cdot \frac{1}{(\overline{z}_k - \overline{z}_1)}, \quad V_{kj} = \frac{i}{2p} \cdot \frac{1}{(\overline{z}_k - \overline{z}_j)},$$

$$V_k^n = \Pi p_{n_k} V_k = V_k \cdot n_k = [(V_\infty + \mathrm{Re}(V_{k\Gamma}))\cos f_k + \mathrm{Im}(V_{k\Gamma})\sin f_k] + \sum_{j=1}^{n} g_j [\mathrm{Re}(V_{kj})\cos f_k + \mathrm{Im}(V_{kj})\sin f_k] = 0.$$

Обозначив в формуле нормальной скорости V_k^n слагаемое, не содержащее g_j через – b_k, а сомножитель при неизвестном g_j через a_{kj}, составим систему из n уравнений с n неизвестными g_j.

$$\begin{aligned} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n &= b_1, \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + a_{nn}\gamma_n &= b_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения системы не являются линейно независимыми. Для получения единственного решения к системе добавим еще одну строку и один столбец. Элементы дополнительной строки принимают такие значения: b_{n+1}= $-\Gamma \cdot d$, $a_{n+1,n+1}$=0, а остальные элементы $a_{n+1,j}$ равны единице. Коэффициентом d выражается величина вводимой дополнительной циркуляции центрального вихря. Например, если d = 0, то интенсивность центрального вихря остается без изменения и будет равна интенсивности внешнего вихря, а если d = 1, то центральный вихрь принимает нулевую интенсивность. По другому, если сумма интенсивностей присоединенных вихрей равна нулю, то такой случай соответствует расчету с центральным вихрем, а если равна $-\Gamma$, то расчету без центрального вихря. В дополнительном столбце элемент $a_{1,n+1}$ примем равным единице, а остальные элементы $a_{k,n+1}$ полагаем равными нулю.

Решив систему линейных уравнений (3) методом Гаусса, определяем интенсивности присоединенных вихрей g_j. Поскольку для вычисления силы потребуются значения производных $\dot{\gamma}_j$, находим измененное положение внешнего вихря за малый промежуток времени Δt:

$$z_1^u = z_1 + V_1 \cdot \Delta t,$$

где

$$V_1 = V_\infty + \sum_{j=1}^{n} \frac{ig_j}{2p} \cdot \frac{1}{\overline{z}_1 - \overline{z}_j}.$$

Повторно решив систему с новыми координатами $z_1 = z_1^u$, получаем измененные интенсивности g_j^u. Производные интенсивности присоединенных вихрей будут равны:

$$\dot{g}_j = (g_j^u - g_j) / \Delta t.$$

Формулы расчета силы импульсным способом в вихревых точках

Определим импульсным способом силу F_u, создаваемую присоединенными вихрями. Известно, что в импульсном методе расчета вихревая сила появляется, если вихрь движется относительно потока жидкости [6]. Поскольку скорость движения внешнего вихря равна местной скорости жидкости, этот вихрь силы не создает. Полная скорость жидкости в вихревой точке z_j выражается формулой:

$$V_j = V_\infty + \frac{i\Gamma}{2p} \cdot \frac{1}{(\overline{z}_j - \overline{z}_1)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{ig_j}{2p} \cdot \frac{1}{(\overline{z}_j - \overline{z}_m)}, \quad (m \neq j),$$

а скорость движения самого вихря $V_j^в$ равна нулю. Следовательно, сила определяется по формуле [7-8]:

$$F_u = -ir \sum_{j=1}^{n} \left[\left(V_j - V_j^в \right) \cdot g_j - z_j \cdot \dot{g}_j \right] = -ir \sum_{j=1}^{n} \left(V_j \cdot g_j - z_j \cdot \dot{g}_j \right),$$

где ρ – плотность жидкости.

Зная силу, определенную импульсным способом, можно вычислить и крутящий момент, действующий относительно продольной оси цилиндра. При этом следует полагать, что точкой приложения силы является точка инверсии внутри круга, являющаяся точкой, симметричной центру внешнего вихря относительно окружности. Обозначим силу, создаваемую j-м присоединенным вихрем через F_j. Разложим силу F_j на действительную и мнимую части:

$$F_j = -ir(V_j \cdot g_j - z_j \cdot \dot{g}_j) = F_{jx} + iF_{jy}.$$

Суммарный крутящий момент будет представляться формулой:

$$M_{кр} = \sum_{j=1}^{n} (-F_{jx} \sin\varphi + F_{jy} \cos\varphi) R^2 / r.$$

Формула вычисления силы интегрированием давления в контрольных точках

При вычислении силы интегрированием давления p_k замечаем, что давление жидкости в контрольной точке z_k в неустановившемся потоке выражается интегралом Коши-Лагранжа:

$$p_k = p_\infty - \frac{r\, 4V_k^2}{2} - r \left. \frac{\partial f_k}{\partial t} \right|_{t=0},$$

где p_∞ – давление жидкости на бесконечности, V_k и $\partial f_k / \partial t |_{t=0}$ – скорость жидкости и производная потенциала скорости в контрольной точке z_k, соответственно. Скорость V_k в два раза меньше скорости, получаемой классическим способом. Поэтому в формуле давления принимается удвоенная скорость (2) V_k. Определив давления p_k в контрольных точках можно рассчитать ветровую нагрузку на сооружение [9]. При нахождении производной замечаем, что координаты внешнего вихря z_1 и интенсивность присоединенного вихря g_j зависят от времени, т. к. $z_1^n = z_1 + V_1 t$ и $\gamma_j^n = \gamma_j + \dot{\gamma}_j t$.

$$\left. \frac{\partial f_k}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathrm{Re}\left(\left. \frac{\partial W_{nk}}{\partial t} \right|_{t=0} \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{i\Gamma}{2p} \cdot \frac{V_1}{z_k - z_1} \right) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re}\left(\frac{-i\dot{g}_j}{2p} \cdot \ln(z_k - z_1) \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{i\Gamma}{2p} \cdot \frac{V_1}{z_k - z_1} \right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{g}_j}{2p} \cdot \arg(z_{kj}),$$

где $z_{kj} = z_k - z_j$ при $Re(z_k) \geq 0$ и $z_{kj} = -(z_k - z_j)$ при $Re(z_k) < 0$.

Сила, определяемая интегрированием давления, выражается суммой:

$$F_{\partial} = \sum_{k=1}^{n} p_k R \cdot \Delta f \cdot \exp(if_k).$$

В этом случае также полагаем, что сила приложена к точке инверсии и момент будет выражаться формулой:

$$M_{кр} = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot R\Delta f \cdot R^2 / r \sin(f_k - f).$$

Проведение расчетов и обсуждение результатов

Целью настоящей работы является изучение особенностей расчета силы методом присоединенных вихрей применительно к цилиндрам с некруговым контуром. Например, требуется выяснить, необходимо ли проводить корректировки скоростей при расчетах методом присоединенных вихрей. Используются ли в расчетах аргумента логарифма свойство симметричности точек контура относительно осей x и y. Поэтому силы, вычисленные импульсным способом и интегрированием давления, сравнивались не только между собой, но и с силой, определенной классическим методом. При классическом методе силу также можно определить интегрированием давления на поверхности и импульсным способом. При классическом методе непроницаемость контура обеспечивается введением в состав комплексного потенциала скорости W потенциала инверсионного вихря $i\Gamma/2\pi \cdot ln(z-R^2/\overline{z}_1)$. Тогда комплексный потенциал скорости принимает вид:

$$W = V_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2p}\cdot \ln(z - z_1) + \frac{i\Gamma}{2p}\cdot \ln\left(z - \frac{R^2}{\overline{z}_1}\right) - \frac{i\Gamma}{2p}(1-d)\cdot \ln z.$$

Сначала приведем формулы нахождения силы классическим методом путем интегрирования давления на поверхности цилиндра. Скорости V_1 и V_{qj} соответственно вихревой нити в точке z_1 и точек контура $z_{\Theta j}=R\cdot exp(\varphi_{\Theta j})$ выражаются формулами:

$$V_1 = V_\infty\left(1 - \frac{R^2}{\overline{z}_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{1}{\overline{z}_1 - R^2/z_1} - \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{1-d}{\overline{z}_1},\quad V_{qj} = V_\infty\left(1 - \frac{R^2}{\overline{z}_{qj}^2}\right) + \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{1}{\overline{z}_{qj} - \overline{z}_1} - \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{1}{\overline{z}_{qj} - R^2/z_1} - \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{1-d}{\overline{z}_{qj}}. \quad (4)$$

Давление жидкости в точках контура определяется интегралом Коши-Лагранжа:

$$p_{qj} = p_\infty - r\frac{V_{qj}^2}{2} - r\left.\frac{\partial f_{qj}}{\partial t}\right|_{t=0},$$

где производная потенциала по времени равна

$$\left.\frac{\partial f_k}{\partial t}\right|_{t=0} = \operatorname{Re}\left(\frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{V_1}{z_{qj} - z_1} + \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{R^2\overline{V}_1}{z_{qj} - R^2/\overline{z}_1}\cdot\frac{1}{\overline{z}_1^2}\right).$$

Здесь также рассматривается два случая расчета при двух значениях d.

1) d = 0 – обтекание цилиндра с центральным вихрем. Тогда в формулах V_1 и V_{qj} последние слагаемые принимают вид $-i\Gamma/2\pi \cdot 1/\overline{z}_1$ и $-i\Gamma/2\pi \cdot 1/\overline{z}_{\Theta j}$.

2) d = 1 – обтекание цилиндра без центрального вихря. В формулах V_1 и V_{qj} последние слагаемые отсутствуют.

Действующая сила, определяемая классическим способом, путем интегрирования давления выражается суммой:

$$F = -\sum_{j=1}^{n} p_{qj} R\,\Delta f \exp(iq_j).$$

Перейдем к выводу формул расчета силы классическим методом с применением импульсного способа. Определим скорость жидкости $V_{ж}$ в инверсионной точке $z_u=R^2/\overline{z}_1$ и скорость движения инверсионного вихря $V_в$. Применяя свойство об одинаковости скоростей жидкости внутри и вне кругового цилиндра в точках, симметричных относительно окружности [10] заключаем, что скорость жидкости в точке инверсии равна скорости внешнего вихря, т.е. $V_{жи}=V_1$. Скорость внешнего вихря определяется по формуле (4). Скорость движения инверсионного вихря выражается производной:

$$V_{ви}=d(R^2/\overline{z}_1)/dt= -R^2 exp(i2\varphi)\cdot \overline{V}_1/r^2.$$

Сила, действующая на вихрь, возникает, если вихрь движется относительно жидкости [4]. Внешний вихрь не движется относительно жидкости и поэтому силы не создает. Сила F вызвана центральным и инверсионным вихрем.

$$F = -i\rho\Gamma(V_{жц} - V_{вц}) - i\rho\Gamma_и(V_{жи} - V_{ви}), \quad (5)$$

где $V_{жц}$, $V_{вц}$ и $V_{жи}$, $V_{ви}$ скорости жидкости и вихря соответственно в центре круга и в точке инверсии. Здесь циркуляция инверсионного вихря равна противоположной интенсивности внешнего вихря, т.е. $\Gamma_и = -\Gamma_1$.

Здесь также приведем формулы силы для двух значений d.

1) $d = 0$ – интенсивность центрального вихря равна интенсивности внешнего вихря. Формула скорости V_1, определяемая по (4) принимает вид:

$$V_1 = V_\infty\left(1 - \frac{R^2}{\bar{z}_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{1}{\bar{z}_1 - R^2/z_1} - \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{1}{\bar{z}_1}.$$

Подставив выражения V_1 и $\bar{V}_1$ в формулу силы (5), получим:

$$F_1 = -ir\Gamma V_\infty + ir\Gamma V_\infty\left(V_1 + \frac{R^2}{r^2}\cdot\exp(i2f)\cdot\bar{V}_1\right).$$

После некоторых упрощений формула силы принимает окончательный вид:

$$F_1 = -\frac{ir\Gamma V_\infty R^4}{r^4} + \frac{r\Gamma^2 R^2}{2pr^3}\cdot\exp(if).$$

2) $d = 1$ – случай, когда центральный вихрь отсутствует. Тогда скорость внешнего вихря равна:

$$V_1 = V_\infty\left(1 - \frac{R^2}{\bar{z}_1^2}\right) - \frac{i\Gamma}{2p}\cdot\frac{1}{\bar{z}_1 - R^2/z_1}.$$

Подставим значения V_1 и $\bar{V}_1$ в формулу силы (5) и после упрощений получим:

$$F_2 = ir\Gamma V_\infty\left(1 - \frac{R^4}{r^4}\right) + \frac{r\Gamma^2}{2pr}\cdot\exp(if).$$

Расчеты показывают, что скорости жидкости в контрольных точках, полученные методом присоединенных вихрей в два раза меньше соответствующих скоростей, вычисленных классическим способом. Поэтому в формуле давления принята удвоенная скорость V_k. Суммарные силы, определенные этими двумя методами путем интегрирования давления совпадают, если аргумент логарифма вычисляется с учетом дополнительных условий. Эти условия связаны со знаком действительной части разности координат $(z_k - z_j)$ контрольных и вихревых точек и приводят к правильному результату в случае кругового контура. Однако возникает вопрос о возможности определения силы методом присоединенных вихрей путем интегрирования давления при обтекании тел с некруговым контуром.

Сила, рассчитываемая импульсным способом при обтекании кругового цилиндра с применением метода присоединенных вихрей, совпадает с силой, определяемой классическим методом. При этом в вихревых точках необходимо принять не касательную, а полную скорость жидкости. Заметим, что в вихревых точках полная скорость имеет некоторую нормальную составляющую.

Приведенные рассуждения справедливы как для случая обтекания с центральным вихрем, так и без него. На основании этих рассуждений можно полагать, что при обтекании тел с некруговым контуром расчет силы импульсным способом приведет к правильному результату.

Выводы

Показана возможность определения силы и момента, действующего на конструкцию кругового сечения в потоке жидкости в присутствии вихря импульсным способом и интегрированием давления. Как правило, за обтекаемыми конструкциями происходит периодический сброс вихрей, что приводят к периодическим изменениям действующих сил и моментов, вызывающие, со временем, образование микротрещин и разрушение таких конструкций. Поэтому они являются исходными данными при расчете элементов конструкций на усталость.

Список библиографических ссылок

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика. М. : ОГИЗ, 1948. Ч. 1. 535 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1973. 749 с.
3. Лойсянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
4. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М. : Мир, 1964. 670 с.
5. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М. : Наука, 1978. 352 с.
6. Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. М. : Научный мир, 2000. 375 с.
7. Bryson A.E. Symmetric vortex separation on circular cylinders and cones // J. of Applied Mechanics. 1959. Vol. 26. № 4. P. 643–648.
8. Гумеров А.В. Расчет движения вихревой нити вокруг кругового цилиндра методом дискретных вихрей // Известия КГАСУ. 2015. № 4 (33). С. 433–439.
9. Зиннуров Т. А., Каюмов Р. А., Манапов А. З. О чувствительности результатов статистического моделирования постоянных и ветровых нагрузок на сооружения к отклонениям параметров их законов распределений // Известие ВУЗов. Строительство. 2012. № 1. С. 132–136.
10. Гумеров В.Г. Скорость жидкости внутри кругового цилиндра, находящегося в плоскопараллельном потоке // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2017. № 2. С. 28–31.

Gumerov A.V. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: anvar_gumerov@list.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1
Gumerov V.G. – candidate of technical sciences, associate professor
Samara State Technical University
The organization address: 443100, Russia, Samara, Molodogvardeyskaya st., 244

Calculation of the force arising when a circular cylinder moves in a plane-parallel flow containing a vortex filament by the method of associated vortices

Abstract

Problem statement. It is required to determine the force acting on a circular cylinder when it moves in a plane-parallel flow containing a rectilinear vortex filament near the cylinder.

Results. The possibility of determining the force and torque is shown, acting on the cylinder as vertical points and integrating the pressure at the control points. For comparative analysis, the force was also determined by the classical method, when the impenetrability of the contour is provided by the introduction of an inversion vortex.

Conclusions. Periodic changes in forces and moments cause the formation of microcracks in cylindrical structures. Therefore, they are the initial data in the calculation of structural elements for fatigue.

Keywords: the complex potential, the Gauss method, the intensity of the attached vortices, the intensity derivative, the coordinate difference argument

References

1. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze I. V. Theoretical hydromechanics M. : OGIZ, 1948. V 1. 535 p.
2. Lavrent'yev M. A., Shabat B. V. Methods of the theory of functions of a complex variable. M. : Nauka, 1973, 749 p.

3. Loysyanskiy L. G. Mechanics of fluids and gas. M. : Drofa, 2003. 840 p.
4. Milne-Thomson L. M. Theoretical hydrodynamics. M. : Mir, 1964. 670 p.
5. Belotserkovsky S. M., Nisht M. I. Separated and unseparated flow around thin wings of an ideal fluid. M. : Nauka, 1978. 352 p.
6. Saffman P. G. Vortex dynamics. M. : Nauchniy mir, 2000. 375 p.
7. Bryson A. E. Symmetric vortex separation on circular cylinders and cones // J. of Applied Mechanics. 1959. Vol. 26. № 4. P. 643–648.
8. Gumerov A. V. Calculation of the movement of vortex filament around the circular cylinder using the method of discrete vortices // Izvestiya KGASU. 2015. № 4 (33). P. 433–439.
9. Zinnurov T. A., Kayumov R. A., Manapov A. Z. On the sensitivity of the results of statistical modeling of constant and wind loads on structures to deviations of the parameters of their distribution laws // Izvestiye vuzov. Stroitel'stvo. 2012. № 1. P. 132–136.
10. Gumerov V. G. The velocity of a fluid inside a circular cylinder located in a plane-parallel flow // Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva. 2017. № 2. P. 28–31.