УДК 539.5
Каюмов Р.А. – доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: kayumov@rambler.ru
Шакирзянов Ф.Р. – кандидат физико-математических наук
E-mail: faritbox@mail.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1
Ахметзянов Р.И. – инженер
E-mail: Nrustem@bk.ru
ООО «Татгражданпроект»
Адрес организации: 420140, Россия, г. Казань, ул. Ю. Фучика, д. 98А

Моделирование процесса деформирования и оценка долговечности армированной балки

Аннотация

Постановка задачи. Рассматривается задача об изгибе армированной балки под поперечной нагрузкой. Считается, что полная деформация состоит из упругой части и деформации ползучести. Упругая часть связана с напряжениями законом Гука. Исследуются варианты связи напряжений и деформаций ползучести в виде законов течения и упрочнения. Для оценки долговечности балки вводится параметр поврежденности Работнова, связанный с напряжениями дифференциальным соотношением. Деформация волокон по высоте балки при изгибе принимается линейной согласно гипотезе Бернулли. Для замыкания системы добавляются уравнения равновесия в виде связи в сечении напряжений с нормальной силой и изгибающим моментом. Рассматриваемая система уравнений решается методом конечных разностей по времени. По продольной координате на каждом шаге по времени получается алгебраическое уравнение относительно кривизны балки.

Результаты. Определяется зависимость распределения напряжений по высоте сечения балки для различных значений времени. Долговечность определяется из условия достижения параметром поврежденности значения единицы. Решение задачи проводится для различных вариантов механических характеристик. Результаты представлены в виде графиков.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в том, что данная методика расчета позволяет оценивать долговечность армированной балки.

Ключевые слова: метод конечных разностей, долговечность, ползучесть, закон упрочнения, напряжения, деформации.

Введение

«СП 63.13330.2012. Свод правил. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003» требует проводить дополнительный расчет по II-й группе предельных состояний – на долговечность. Однако принципы этого расчета, указанные в документе, являются крайне приближенными, а точные методы еще не разработаны. Это связано с малой степенью изученности законов изменения со временем прочностных и жесткостных характеристик бетона, трудностью учета влияния на них состава бетона, влажности воздуха и агрессивных сред. Но при исследовании долговечности одним из главных факторов является ползучесть бетона. Данное исследование показывает, что это свойство существенно сказывается не только на прочностных и жесткостных характеристиках возводимых конструкций, но и на их долговечности.

Основные соотношения

Рассматривается центрально нагруженная шарнирно опертая армированная балка с рабочей арматурой в растянутой зоне. Моделируется процесс деформирования бруса под поперечной нагрузкой (рис. 1).

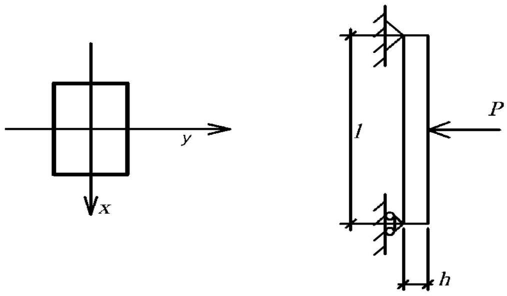

Рис. 1. Схема балки

Принимается гипотеза плоских сечений, а для материала используется модель, в котором кроме свойств упругости учитывается и деформации ползучести и процесс накопления повреждений. Для деформации ползучести используется определяющие соотношения (физический закон) в дифференциальной форме, а именно – закон течения с учетом упрочнения. Для параметра поврежденности принимается эволюционное уравнение Работнова также в дифференциальной форме. Так как задача статически определима, можно рассматривать поведение не всей балки, а только опасного нормального сечения в середине пролета, загруженного изгибающим моментом внутренней пары сил.

По причине ползучести бетона при нагружении рассматриваемой балки с течением времени меняется ее кривизна, а из-за наличия арматуры смещается положение нейтральной линии. Это значит, что задача является нелинейной, соответственно и решена она может быть только численным методом. Здесь используется метод конечных разностей.

Для реализации этого метода был использован язык программирования *Visual Basic* из пакета *Microsoft Visual Studio*, так как в этом варианте легко реализуется дискретный метод расчета, и имеются средства создания графики.

В качестве закона деформирования бетона использовался закон Гука. В случае армирования стеклопластиковой арматурой закон деформирования арматуры также принимался линейным, в случае стальной арматуры использовалась диаграмма Прандтля, учитывающая упруго-пластическую работу арматуры.

В качестве дифференциального уравнения для необратимой части деформаций выбран закон ползучести с учетом упрочнения в виде:

$$\frac{\partial e_{cr}}{\partial t} = \frac{s^{n}}{h^{n}(1+c\cdot\left|e_{cr}\right|)^{m}}, \tag{1}$$

где *n, m* – эмпирические коэффициенты, η – коэффициент вязкости, ε_{cr} – необратимая часть деформаций, с – коэффициент упрочнения, учитывающий снижение скорости прироста деформаций ползучести с течением времени.

Чтобы оценить степень поврежденности материала, связанную с накоплением в бетоне микротрещин, используется дифференциальное уравнение для параметра поврежденности Работнова:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{Bs}{1-w}, \tag{2}$$

где B – параметр материала, показывающий влияние нормального напряжения на скорость накопления повреждений, ω – параметр поврежденности материала. Значение $\omega=0$ соответствует состоянию материала перед началом загружения, при $\omega=1$ происходит разрушение материала.

Приведем основные соотношения, использовавшиеся для моделирования изучаемого процесса.

Полная деформация принималась состоящей из упругой и необратимой части:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr}. \tag{3}$$

Закон упругости принимался линейным:

$$\sigma = E\cdot\varepsilon_{el}. \tag{4}$$

Уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы проекций элементарных сил на ось x имеет вид (здесь и далее буквой A_s обозначается площадь поперечного сечения арматуры, буквой A – площадь поперечного сечения балки за вычетом A_s):

$$\sum N = \sum_{i=1}^{n} s_i^{\,b} \Delta A + s^{\,s} A_s = 0. \qquad (5)$$

Уравнение равновесия в виде равенства изгибающего момента сумме моментов элементарных сил записывается в виде:

$$\sum M = \sum_{i=1}^{n} s_i^{\,b} \Delta A \cdot r_i = M_x. \qquad (6)$$

Выражение для приращения необратимых деформаций в конечных разностях записывается в следующей форме:

$$\Delta e_{cr} = \frac{s^{\,n}}{h^{\,n}(1 + c(\left|e_{cr}\right|)^{m}} \Delta t. \qquad (7)$$

Для деформаций принималась гипотеза Бернулли, т.е. считалось, что по высоте сечения полная деформация распределена по линейному закону:

$$\varepsilon = \kappa \cdot y. \qquad (8)$$

Здесь κ – кривизна продольной оси балки.

Расчет на долговечность при переменной нагрузке

В процессе эксплуатации на конструкцию может воздействовать не только постоянные нагрузки, но и нагрузки, которые изменяются во времени (снеговые, ветровые, температурные воздействия). В работе примем, что эти нагрузки можно аппроксимировать кусочно-постоянной функцией (рис. 2).

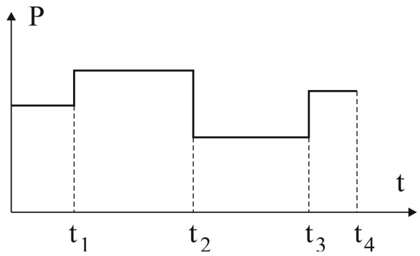

Рис. 2.

Для оценки долговечности конструкции необходимо на каждом из промежутков времени определить параметр повреждения ω, для этого нужно проинтегрировать соотношение (2):

$$\int_{t_i}^{t} (1 - w)\, dw + C_i = \int_{t_i}^{t} B s\,(t)\, dt, \quad (i = \overline{1, N}). \qquad (9)$$

Здесь $\sigma(t)$ – кусочно-постоянная нагрузка, а C_i – константы интегрирования.

При расчете конструкции на долговечность необходимо, чтобы величина ω была одной и той же на границе временных отрезков. Это приводит к сложным расчетам, поэтому в работе предложена упрощенная методика вычислений. Будем считать, что для каждого значения нагрузки можно найти t^*_i, при котором ω=1, т.е. материал разрушается. При этом напряжения в сечении балки будем считать распределенными в виде прямоугольников (как в предельном состоянии). Данный подход можно использовать для оценки долговечности сверху. Это предположение о распределении напряжений в виде прямоугольников подтверждается анализом проведенных численных экспериментов (рис. 3).

Тогда соотношение (2) легко проинтегрируется. Согласно теории линейного суммирования повреждений найдем общую поврежденность конструкции:

$$\Omega = \frac{\Delta t_1}{t_1^*} + \frac{\Delta t_2}{t_2^*} + \ldots \qquad (10)$$

Условием разрушения является, как и выше, достижение величиной Ω значения единица.

Для сравнительного анализа упомянутых выше двух подходов, рассмотрим следующую задачу. Пусть до значения времени t_1 напряжение постоянно и равно s_1. После этого происходит повышение напряжения до s_2. Поставим задачу определения величин ω, Ω, накопленных к концу времени $t=t_2$. Согласно первому подходу, нужно проинтегрировать уравнение (2) для каждого из участков времени нагружения. Тогда получим:

$$w-\frac{w^2}{2}=Bs\ t+C_1, \qquad (11)$$

Из условия, что $\omega=0$ при t=0 получим $C_1=1/2$. При $t\le t_1$ находим ω_1

$$w_1=1-\sqrt{1-2Bs_1t_1}. \qquad (12)$$

На втором участке по времени ($t_1<t<t_2$) решение уравнения (2) имеет такой же вид

$$w-\frac{w^2}{2}=Bs\ t+C_2. \qquad (13)$$

Из условия, $\omega=\omega_1$ при $t=t_1$ находим C_2.

$$C_2=\frac{(1-w_1)^2}{2}+Bs_2t_1. \qquad (14)$$

Теперь можно найти значение ω_2 в момент времени $t=t_2$:

$$w=w_2=1-\sqrt{C_2-2Bs_2t_2}. \qquad (15)$$

Теперь найдем Ω. Согласно второму подходу, для первого напряжения найдем долговечность t^*_1 из условия $\omega=1$. Для этого используем общее решение (11):

$$t_1^*=\frac{1}{2Bs_1}. \qquad (16)$$

Аналогично для второго напряжения найдем долговечность t^*_2 из условия $\omega=1$.

$$t_2^*=\frac{1}{2Bs_2}. \qquad (17)$$

После этого найдем Ω из (10).

Численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния

На основе соотношений (1)-(8) были разработаны численная методика и программа расчета напряжений. В численных экспериментах принимались следующие значения характеристик:

n=1,4; η=10000 МПа·сут$^{1/n}$; m=1, B=0,00005 (МПа·сут)$^{-1}$.

Программа позволяет наблюдать изменение эпюры нормальных напряжений, кривизны балки под силой и параметра поврежденности с течением времени. После завершения работы программа выдает следующие числовые результаты:

Долговечность – время от начала нагружения до момента, до которого возможна эксплуатация конструкции. Это или время, при котором происходит разрушение, т.е. время при котором параметр ω достигает значения единицы. Или это время, при котором значения прогиба балки или ширины раскрытия трещин станут равными предельно допустимым. Будем считать, что расчет на ширину раскрытия трещин согласно СП 63.13330.2012 можно проводить для бетона и в стадии ползучести и накопления повреждений. Согласно СП 63.13330.2012 ширина раскрытия трещин должна определяться по формуле:

$$a_{crc}=j_1j_2j_3y_s\frac{s_s}{E_s}l_s,$$

где $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\psi_s$ – произведение поправочных коэффициентов, σ_s – напряжение в арматуре, E_s – модуль упругости арматуры, l_s – расстояние между трещинами.

$$l_s=0,5\frac{A_{bt}}{A_s}d_s,$$

где A_{bt} – площадь бетона растянутой зоны, определяемая из эпюры, d_s – диаметр арматуры.

Кроме этого программа выдает эпюры нормальных напряжений в различные моменты времени. На рис. 2 приведен один из вариантов эпюр, полученных при $c=0$. Аналогичные картины получаются и для случая использования теории ползучести с упрочнением.

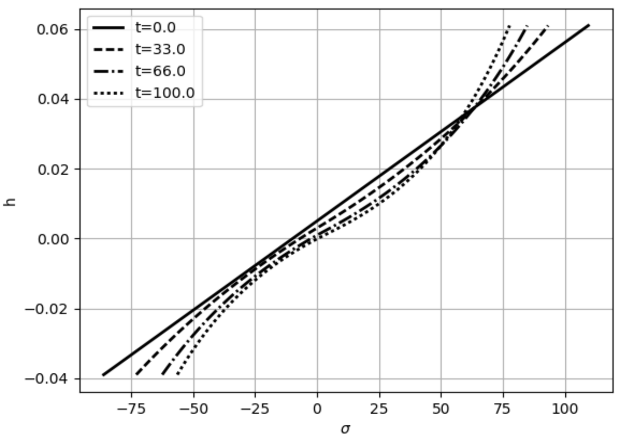

Рис. 2. Эпюры нормальных напряжений по сечению в различные моменты времени

Анализ результатов показал следующее. С течением времени значения нормальных напряжений в сжатой зоне бетона уменьшаются, а в арматуре – увеличиваются. Значит, железобетонные конструкции длительного срока службы должны быть переармированы.

Поскольку бетон разгружается с течением времени, а скорость накопления повреждений пропорциональна напряжению (это видно из уравнения Работнова), то реальные железобетонные конструкции оказываются долговечнее, чем те, что проектируются по результатам расчета на прочность без учета ползучести. Это можно видеть на графиках зависимости долговечности балки от изгибающего момента в опасном сечении (рис. 3).

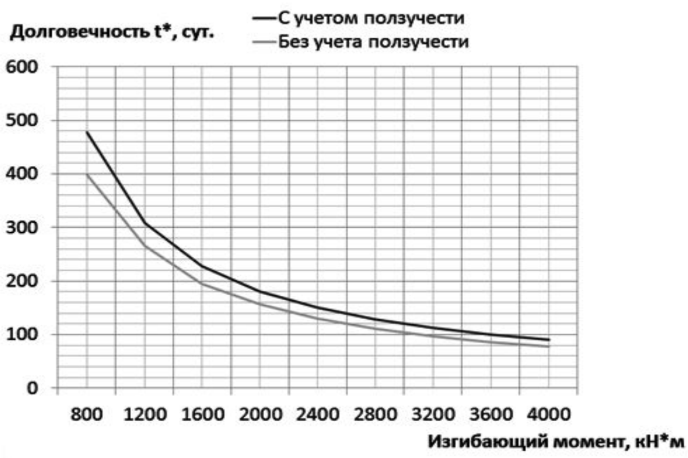

Рис. 3. Зависимость долговечности балки от изгибающего момента в сечении

Однако, ползучесть ведет к увеличению кривизны во всех точках. Вследствие этого возрастает прогиб в пролете. Поэтому долговечность балки может оказаться существенно меньше того значения, которое получают при проектировании по результатам расчета на жесткость без учета ползучести. Таким образом, чтобы не допустить наступление предельных состояний II-й группы рационально применять рабочую сжатую арматуру. Этот означает, что необходимо в дальнейшем разработать методику определения не только напряжений, но и функции прогибов.

Графики, приведенные на рис. 3-4, построены для балки с гипотетическими механическими и геометрическими характеристиками и параметрами ползучести. Это связано с тем, что эксперименты для выявления количественных характеристик ползучести не проводятся в достаточном объеме. Выполнение подобных опытов крайне затруднительно, т.к. велико время исследования, причем все это время температура и влажность среды должны поддерживаться на неизменном уровне. При этом необходимо определить, как влияют на характеристики ползучести зерновой состав, водоцементное отношение, первичные условия схватывания бетонной смеси. Возможно, что с появлением новых требований к проектированию железобетонных конструкций подобные эксперименты будут проведены.

В связи с вышеизложенным, по результатам численных экспериментов можно сделать качественные выводы только в относительных величинах. Во-первых, оказалось, что влияние вязкости на долговечность имеет обратный, близкий к экспоненциальной зависимости, характер. Во-вторых, выявлена следующая особенность в зависимости максимального напряжения в бетоне от времени. В первом приближении график зависимости состоит из двух прямых (рис. 4), причем, момент достижения арматурой предела текучести, после которого напряжения в ней уже не могут возрастать, никак не отражается на характере графика. Значит, аппроксимировав данную зависимость, можно охарактеризовать ее лишь 4 величинами: двумя угловыми коэффициентами прямых и координатами точки излома.

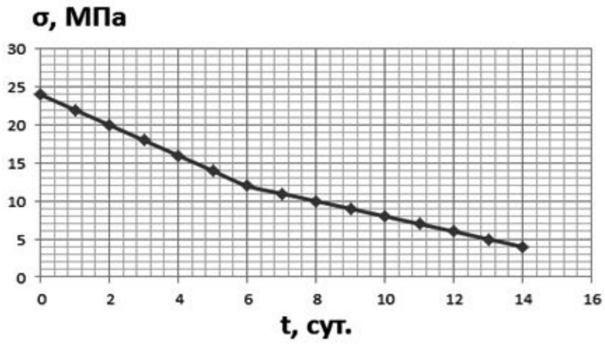

Рис. 4. Зависимость от времени максимальных нормальных напряжений в бетоне

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-08-06018, № 16-38-00736 и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1660 государственного задания в сфере научной деятельности по Заданию № 2014/58 за 2016.

Список библиографических ссылок

1. Рахимов З. Р., Алтыкис М. Г. Долговечность строительных материалов. Казань : КГАСУ, 2005. 118 с.
2. Kayumov R. A., Mukhamedova I. Z., Tuisina E. B. Analysis of a beam with a crack under irregular cyclic load // Russian Aeronautics. 2016. Т. 59. № 4. С. 452–459.
3. Степанова В. Ф. Долговечность бетона. М. : Ассоциация строительных вузов, 2014. 126 с.
4. Каюмов Р. А., Сулейманов А. М., Мухамедова И. З. Моделирование поведения пленочно-тканевого материала при воздействии эксплуатационных факторов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005, Т. 11, № 4. С. 519–530.
5. Каюмов Р. А., Шарафутдинова А. А. Об оценке долговечности строительных конструкций из стеклопластика // Известия КГАСУ. 2017. № 2 (40). С. 114–123.
6. Delsaute B., Torrenti J.-M., Staquet S. Modeling basic creep of concrete since setting time // In cement and concrete composites. 2017. Vol. 83. P. 239–250.
7. Каюмов Р. А., Шакирзянов Ф. Р. Моделирование поведения стержней в упругой среде с учетом влияния эффекта Пуассона в одномерных элементах // Вестник Казанского технологического университета. 2016. Т. 19. № 21. С. 139–143.
8. Kayumov R. A., Muhamedova I. Z., Suleymanov A. M., Tazyukov B. F. Development of film- and fabric- composite materials durability assessing methodology under time-dependent influences of temperature and solar radiation // IOP Conference Series:

Materials Science and Engineering. 11 Сер. «11th International Conference on «Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications»». 2016.
9. Каюмов Р. А., Мухамедова И. З., Хамматова В. В. Методика определения коэффициента постели в задаче потери устойчивости среднего слоя трехслойного стержня при растяжении // Вестник Казанского технологического университета. 2016. Т. 19. № 23. С. 118–120.
10. Каюмов Р. А., Шакирзянов Ф. Р., Бутенко А. В. Приближенный метод вычисления деформаций ползучести по наследственной теории и сравнение ее с инкрементальной теорией // Известия КГАСУ. 2014. № 3 (29). С. 179–185.

Kayumov R.A. – doctor of physical-mathematical sciences, professor
E-mail: kayumov@rambler.ru
Shakirzyanov F.R. – candidate of physical-mathematical sciences
E-mail: faritbox@mail.ru
Kazan state university of architecture and engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1
Ahmetzyanov R.I. – engineer
E-mail: Nrustem@bk.ru
LTD «Tatgrazhdanproekt»
The organization address: 420140, Russia, Kazan, Y. Fuchika st., 98A

Modeling of the process of deformation and evaluation of the life of a reinforced beam

Abstract

Problem statement. The problem of the bending of a reinforced beam under transverse loading is considered. It is believed that the total deformation consists of an elastic part and a creep deformation. The elastic part is connected with the stresses by Hooke's law. The variants of the connection of stresses and deformations of creep in the form of the laws of flow and hardening are investigated. To estimate the life of the beam, the parameter of Rabotnov's damage, connected with the stresses by a differential relation, is introduced. The deformation of the fibers along the height of the beam during bending is assumed linear according to the Bernoulli hypothesis. For the closure of the system, equilibrium equations are added in the form of a connection in the section of stresses with normal force and a bending moment. The system of equations under consideration is solved by the method of finite time differences. On the longitudinal coordinate at each time step we obtain an algebraic equation with respect to the curvature of the beam.

Results. The dependence of the distribution of stresses on the height of the beam section for different values of time is determined. Durability is determined from the condition that the parameter of damage is a unit value. The solution of the problem is carried out for various variants of mechanical characteristics. The results are presented in the form of graphs.

Conclusions. The significance of the results obtained for the construction industry is that this calculation technique makes it possible to evaluate the durability of the reinforced beam.

Keywords: finite difference method, durability, creep, hardening law, stress, deformation.

References

1. Rakhimov Z. R., Altykis M. G. Durability of building materials. Kazan : KSUAE, 2005. 118 p.
2. Kayumov R. A., Mukhamedova I. Z., Tuisina E. B. Analysis of a beam with a crack under irregular cyclic load // Russian Aeronautics. 2016. Vol. 59. №. 4. P. 452–459.
3. Stepanova V. F. Durability of concrete: A textbook for high schools. M. : Assotsiatsiya stroitel'nykh vuzov, 2014. 126 p.

4. Kayumov R. A., Suleimanov A. M., Mukhamedova I. Z. Modeling the behavior of film-fabric material under the influence of operational factors // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy. 2005, T.11, № 4. P. 519–530.
5. Kayumov R. A., Sharafutdinova A. A. On the evaluation of the durability of building structures from fiberglass plastics // Izvestiya KGASU. 2017. № 2 (40). P. 114–123.
6. Delsaute B., Torrenti J.-M., Staquet S. Modeling basic creep of concrete since setting time // In cement and concrete composites. 2017. Vol. 83. P. 239–250.
7. Kayumov R. A., Shakirzyanov F. R. The simulation of the behavior of rods in an elastic medium with allowance for the influence of the Poisson effect in one-dimensional elements // Bulletin of the Kazan Technological University. 2016. T. 19. № 21. P. 139–143.
8. Kayumov R. A., Muhamedova I. Z., Suleymanov A. M., Tazyukov B. F. Development of film- and fabric- composite materials durability assessing methodology under time-dependent influences of temperature and solar radiation // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 11. Сер. «11th International Conference on «Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications»». 2016.
9. Kayumov R. A., Mukhamedova I. Z., Hammatova V. V. The method of determining the bed coefficient in the problem of loss of stability of the middle layer of a three-layer rod under tension // Bulletin of Kazan Technological University. 2016. T. 19. №. 23. P. 118–120.
10. Kayumov R. A., Shakirzyanov F. R., Butenko A. V. An approximate method for calculating creep strains by hereditary theory and comparing it with incremental theory // Izvestiya KGASU. 2014. № 3 (29). P. 179–185.