

УДК 539.3

Хамитов Т.К. – кандидат технических наук, старший преподаватель

E-mail: tagirkx@yandex.ru

Фатыхова Р.Р. – студент

E-mail: regishka_f93@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Об устойчивости упругопластической цилиндрической оболочки при продольном ударе

Аннотация

Рассматривается задача устойчивости упругопластической цилиндрической оболочки при продольном ударе. Известно, что для металлической оболочки при определенных соотношениях толщины к радиусу потеря устойчивости при продольном сжатии происходит за пределом упругости. Для двух видов нагружения оболочки получены критические напряжения с учетом конечности скорости распространения продольной волны. Задача решена в осесимметричной постановке при первом прохождении продольной волны сжатия вдоль оболочки. Используется статический критерий устойчивости. Показано, что при продольном ударе значения критических напряжений более чувствительны к характеру напряженного состояния за фронтом продольной волны, чем к учету конечности скорости распространения последней.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, потеря устойчивости, продольная волна, критическое напряжение.

В настоящее время вопросам динамического поведения стержней, пластин и оболочек при ударных и быстро возрастающих нагрузках посвящено большое количество исследований. Обзор некоторых из них приводится в [1, 2], где в основном изучалось процесс возрастания прогибов во времени. К задачам, которые решаются в данной статье, непосредственное отношение имеют работы [3, 4], где рассматривалась устойчивость стержня и цилиндрической оболочки при продольном ударе в упругопластической постановке с учетом распространения продольной волны. В работе [5] изучалась устойчивость упругопластических стержней при различных граничных условиях. Здесь также определяются критические напряжения при первом прохождении продольной волны сжатия вдоль оболочки. Задача в упругой постановке рассматривалась в [6, 7]. Относительно методики решения и критерия потери устойчивости сохраняются те же предположения, что в вышеуказанных работах.

Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрическую оболочку длиной l , радиусом R и толщиной h , на торце (незакрепленном в продольном направлении) которой прикладывается напряжение σ_0 , превышающее предел пропорциональности материала. Диаграмма сжатия материала с линейным упрочнением показана (рис. 1), где E , E_k , E_c – упругий, касательный и секущий модули соответственно. При этом рассмотрим два вида нагружения торца оболочки:

- 1) напряжение σ_0 прикладывается мгновенно (рис. 2);
- 2) напряжение линейно возрастает во времени от нуля до максимального значения σ_0 (рис. 3).

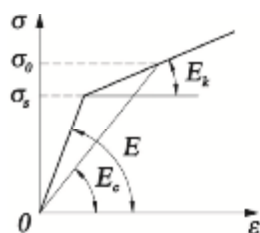


Рис. 1. Диаграмма сжатия материала с линейным упрочнением

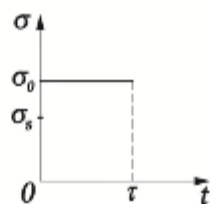


Рис. 2. «Мгновенное» приложение напряжения на ударном торце

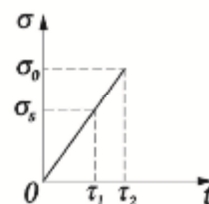


Рис. 3. Напряжение на ударном торце возрастает по линейному закону

Напряженное состояние оболочки по длине известно [8]. В первом случае от ударяемого торца распространяются упругая волна со скоростью $a_0 = \sqrt{E/r}$ с напряжением за фронтом волны, равным пределу пропорциональности σ_s , и пластическая волна со скоростью $a_1 = \sqrt{E_k/r}$ с напряжением σ_0 за фронтом волны (рис. 4а). Перед фронтом продольной волны невозмущенный участок стержня с нулевым уровнем напряжений. Во втором случае в начальный момент времени от ударяемого торца оболочки распространяется упругая волна с нулевым уровнем напряжений и со скоростью a_0 (рис. 4б). Вслед за ней в промежутке времени $0 < t < \tau_1$, начинают распространяться волны, несущие на своем фронте напряжение $0 < \sigma(t) < \sigma_s$ (где τ_1 – момент времени, при котором напряжения на торце $\sigma(t) = \sigma_s$). В момент $t = \tau_1$ одновременно начинают распространяться две волны с разными скоростями a_0 и a_1 . По длине оболочки образуется участок с постоянным уровнем напряжений σ_s . При напряжениях на торце оболочки, сколь угодно мало превосходящих напряжение σ_s , распространяются пластические волны со скоростью a_1 . Будем изучать устойчивость оболочки вплоть до τ_2 , когда напряжения достигают на торце величины $\sigma(t) = \sigma_0$. Таким образом, в отличие от первого вида нагружения, по длине оболочка разбивается на четыре участка с различным уровнем напряжений (рис. 5б). Если устремить $\tau_1, \tau_2 \rightarrow 0$, то приходим к картине напряжений, показанной на рис. 5а. В дальнейшем предполагается, что потеря устойчивости происходит при первом прохождении волны вдоль оболочки.

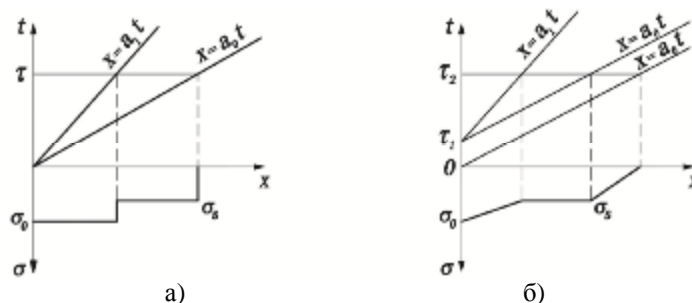


Рис. 4. Распространение продольных волн вдоль оболочки:

а) при мгновенном приложении напряжения; б) при линейном возрастании напряжения

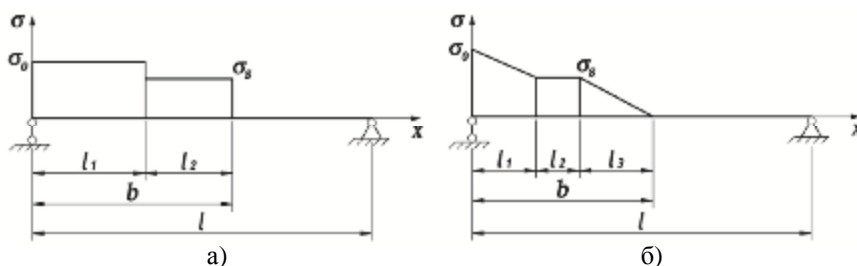


Рис. 5. Напряженное состояние оболочки по длине: а) при мгновенном приложении напряжения; б) при линейном возрастании напряжения на ударяемом торце

Эпюры продольных напряжений по длине оболочки, соответствующие двум видам нагружения, показаны на рис. 5. На рис. 5а: b – полная длина сжатой части оболочки, l_1 – длина участка, где напряжения равны σ_0 , l_2 – длина участка, где напряжения равны пределу пропорциональности материала σ_s . Между длинами участков имеют место соотношения:

$$b = a_0 t, \quad l_1 = a_1 t, \quad b = l_1 + l_2, \quad l_1 = b \frac{a_1}{a_0} = b \sqrt{\frac{E_k}{E}}, \quad l_2 = b \left(1 - \sqrt{\frac{E_k}{E}} \right). \quad (1)$$

Выражения для длин по рис. 3-5б запишутся в виде:

$$l_1 = a_1 (t_2 - t_1); \quad l_2 = (a_0 - a_1)(t_2 - t_1); \quad l_3 = a_0 t_1; \quad b = l_1 + l_2 + l_3 = a_0 t_2. \quad (2)$$

Учитывая, что $\tau_1 = \tau_2 \sigma_s / \sigma_0$ (рис. 3), выражения (2) можно представить в иной форме:

$$l_1 = b \sqrt{\frac{E_k}{E}} \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_0} \right); \quad l_2 = b \left(1 - \sqrt{\frac{E_k}{E}} \right) \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_0} \right); \quad l_3 = b \frac{\sigma_s}{\sigma_0}. \quad (3)$$

Решение

Уравнение возмущенного движения оболочки в осесимметричной постановке запишем в виде [9]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((D_2 - D_3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{B_2}{2R} + s_i h \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{3B_1}{4R^2} w + r h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Здесь все обозначения общеприняты. При выводе уравнения (4) использована теория деформаций [10]. Коэффициенты B_1 , B_2 , D_2 , D_3 , характеризующие жесткость оболочки при пластических деформациях, зависят от параметра \bar{z}_0 – относительной координаты, определяющую толщину слоя разгрузки. В монографии [9] показано, что «...в достаточно большом числе случаев потери устойчивости оболочек, с которыми приходится иметь дело в инженерной практике, ...наименьшие значения критических нагрузок будут реализовываться при $\bar{z}_0 = 1$, т.е. при исчезающей толщине слоя разгрузки».

1. Рассмотрим первый вид нагружения. При первом прохождении волны вдоль оболочки первая и вторая зоны оболочки будут изгибаться как пластическая среда, а третья зона – как упругая [3]. Запишем выражения для коэффициентов B_1 , B_2 , D_2 , D_3 :

$$D_2 - D_3 = \begin{cases} \frac{E_c + 3E_k}{36} h^3 & \text{при } 0 \leq x \leq l_1 \\ \frac{E + 3E_k}{36} h^3 & \text{при } l_1 < x \leq b, \\ \frac{Eh^3}{12(1 - m^2)} & \text{при } b < x \leq l. \end{cases} \quad (5)$$

где μ – коэффициент Пуассона.

$$B_1, \left(\frac{B_2}{2R} + s_i h \right) = \begin{cases} \frac{4}{3} E_c h, \quad \frac{h^2}{2} (E_c - E_k) + s_0 h & \text{при } 0 \leq x \leq l_1 \\ \frac{4}{3} E h, \quad \frac{h^2}{2} (E - E_k) + s_s h & \text{при } l_1 < x \leq b, \\ \frac{4}{3} E h, \quad 0 & \text{при } b < x \leq l. \end{cases} \quad (6)$$

Пусть оболочка на торцах шарнирно оперта. Решение уравнения (4) ищем в виде:

$$w(x, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin(I_k x), \quad I_k = \frac{kP}{l}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Коэффициенты (5) и (6) также представим в виде рядов:

$$(D_2 - D_3) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos(I_k x), \quad (8)$$

$$\left(\frac{B_2}{2R} + s_i h \right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(I_k x), \quad (9)$$

$$\frac{3B_1}{4R^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos(I_k x), \quad (10)$$

$$\text{где } d_0 = \frac{h^3}{36l} \left[(E_c - E)l_1 + (3E_k + E)b + \frac{3E}{1 - m^2} (l - b) \right],$$

$$d_k = \frac{h^3}{18pk} \left[(E_c - E) \sin(I_k l_1) + \left(3E_k + E - \frac{3E}{1 - m^2} \right) \sin(I_k b) \right],$$

$$b_0 = \frac{h}{l} \left[\left(\frac{h}{4R} (E_c - E) + s_0 - s_s \right) l_1 + \left(\frac{h}{4R} (E - E_k) + s_s \right) b \right],$$

$$b_k = \frac{2h}{pk} \left[\left(\frac{h}{4R} (E_c - E) + s_0 - s_s \right) \sin(I_k l_1) + \left(\frac{h}{4R} (E - E_k) + s_s \right) \sin(I_k b) \right],$$

$$c_0 = \frac{h}{R^2 l} [E(l - l_1) + E_c l_1], \quad c_k = \frac{2h}{R^2 pk} (E_c - E) \sin(I_k l_1).$$

Подставляя (7)-(10) в (4), после некоторых преобразований получим бесконечный ряд, равный нулю:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin I_k x \left[f_k \Omega_k + \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i a_{ki} + \sum_{i=1}^{k-1} f_i a_{ki} \right] = 0, \tag{11}$$

где $a_{kk} = \Omega_k = \lambda_k^4 (2d_0 - d_{2k}) - \lambda_k^2 (2b_0 + b_{2k}) + 2c_0 - c_{2k} - 2\rho h \omega^2$ при $i=k$,
 $a_{ik} = a_{ki} = \lambda_i^2 \lambda_k^2 (d_{i-k} - d_{i+k}) - \lambda_i \lambda_k (b_{i-k} + b_{i+k}) + c_{i-k} - c_{i+k}$ при $i \neq k$.

Условие существования отличного от нулевого решения уравнения (11) приводит к бесконечной системе однородных алгебраических уравнений для неизвестных f_k :

$$f_k \Omega_k + \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i a_{ki} + \sum_{i=1}^{k-1} f_i a_{ki} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \tag{12}$$

Согласно статическому критерию устойчивости [3-7] (равенство нулю частоты колебаний) критический параметр определяется как наименьший корень уравнения:

$$\det \| a_{ik} \| = 0. \tag{13}$$

2. Теперь рассмотрим второй вид нагружения. В этом случае оболочка по длине разбивается на четыре зоны с разными значениями напряжений в каждой зоне (рис. 5б). Коэффициенты B_1, B_2, D_2, D_3 имеют вид:

$$(D_2 - D_3), B_1 = \begin{cases} \frac{E_c + 3E_k}{36} h^3, & \frac{4}{3} E_c h, & \text{нпу} & 0 \leq x \leq l_1 \\ \frac{E + 3E_k}{36} h^3, & \frac{4}{3} E h & \text{нпу} & l_1 < x \leq l_1 + l_2, \\ \frac{E h^3}{12(1 - m^2)}, & \frac{4}{3} E h & \text{нпу} & l_1 + l_2 < x \leq b, \\ \frac{E h^3}{12(1 - m^2)}, & \frac{4}{3} E h & \text{нпу} & b < x \leq l. \end{cases} \tag{14}$$

$$\frac{B_2}{2R} + s_i h = \begin{cases} \frac{h^2}{4R} (E_c - E_k) + s_s h + \frac{(s_0 - s_s)}{l_1} (l_1 - x) h & \text{нпу} & 0 \leq x \leq l_1, \\ \frac{h^2}{4R} (E - E_k) + s_s h & \text{нпу} & l_1 < x \leq l_1 + l_2, \\ s_s \frac{(b - x)}{l_3} h & \text{нпу} & l_1 + l_2 < x \leq b, \\ 0 & \text{нпу} & b < x \leq l. \end{cases} \tag{15}$$

Коэффициенты рядов (8)-(10) примут вид:

$$d_0 = \frac{h^3}{36l} \left[(E_c - E) l_1 + \left(3E_k + E - \frac{3E}{1 - m^2} \right) (b - l_3) + \frac{3E}{1 - m^2} l \right],$$

$$d_k = \frac{h^3}{18pk} \left[(E_c - E) \sin(I_k l_1) + \left(3E_k + E - \frac{3E}{1 - m^2} \right) \sin(I_k (b - l_3)) \right],$$

$$b_0 = \frac{h}{2l} \left[\left(\frac{h}{2R} (E_c - E) + s_0 - s_s \right) l_1 + \left(\frac{h}{2R} (E - E_k) + s_s \right) (b - l_3) + s_s b \right],$$

$$b_k = \frac{2h}{pk} \left[\frac{h}{4R} (E_c - E) \sin(I_k l_1) + \frac{h}{4R} (E - E_k) \sin(I_k (b - l_3)) + \right.$$

$$\left. + \frac{s_0}{I_k b} \sqrt{\frac{E}{E_k}} (1 - \cos(I_k l_1)) + \frac{s_0}{I_k b} (\cos(I_k (b - l_3)) - \cos(I_k b)) \right],$$

$$c_0 = \frac{h}{R^2 l} [El + (E_c - E) l_1], \quad c_k = \frac{2h}{R^2 pk} (E_c - E) \sin(I_k l_1).$$

Результаты расчета

Для примера рассмотрена оболочка из дюралюминия Д16Т с данными $E = 7,5 \cdot 10^6$ кг/см², $E_k = 3,72 \cdot 10^6$ кг/см², $\sigma_s = 2000$ кг/см² [11]. В табл. 1-2 приведены критические

напряжения σ_0 зависимости от параметра $\eta=b/l$ (η – отношение длины сжатого участка к полной длине оболочки) при некоторых значениях R/h и l/R . В табл. 1 даны результаты расчета для первого случая нагружения оболочки, в табл. 2 – для второго. Для обеспечения точности вычислений критические напряжения находились из определителей двухсотого порядка. В скобках даны значения σ_0/σ_{cm} , где σ_{cm} – критическое напряжение при статической потере устойчивости [9]:

$$s_{cm} = \frac{h}{R} E_c \left[\frac{1}{3} \sqrt{1 + \frac{E_k}{E_c}} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{E_k}{E_c} \right) \right]. \quad (16)$$

Таблица 1

$\frac{l}{R}$	$\frac{h}{R/h}$	$\frac{h}{R/h}$								
		0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	100	3215,67 (1,155)	3052 (1,059)	2984,25 (1,035)	2950,77 (1,024)	2932,35 (1,017)	2921,08 (1,013)	2913,38 (1,011)	2907,64 (1,009)	2903,17 (1,007)
		4	2984,25 (1,035)	2932,36 (1,017)	2913,38 (1,011)	2903,17 (1,007)	2897,05 (1,005)	2893,52 (1,004)	2891,19 (1,003)	2889,41 (1,002)
2	50	6898,06 (1,196)	6460,75 (1,121)	6164,7 (1,069)	6036 (1,047)	5978,35 (1,037)	5913,62 (1,026)	5890,85 (1,022)	5863,78 (1,017)	5845,43 (1,014)
		4	6164,7 (1,069)	5978,37 (1,037)	5890,85 (1,022)	5845,43 (1,014)	5822,06 (1,01)	5809,06 (1,008)	5800 (1,006)	5792,7 (1,005)

Таблица 2

$\frac{l}{R}$	$\frac{h}{R/h}$	$\frac{h}{R/h}$								
		0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
2	100	4595,17 (1,59)	4128,27 (1,43)	3847,44 (1,33)	3702,46 (1,28)	3599,95 (1,25)	3517,64 (1,22)	3457,1 (1,2)	3410,82 (1,18)	3371,26 (1,17)
		4	3847,44 (1,33)	3599,95 (1,25)	3457,1 (1,2)	3371,26 (1,17)	3310,26 (1,148)	3265,25 (1,133)	3230,4 (1,121)	3202,37 (1,111)
2	50	10410,3 (1,806)	9048,83 (1,569)	8338,96 (1,446)	7923,82 (1,374)	7631,64 (1,324)	7421,21 (1,287)	7260,08 (1,259)	7132 (1,237)	7027,86 (1,219)
		4	8338,96 (1,446)	7631,64 (1,324)	7260,08 (1,259)	7027,86 (1,219)	6867,54 (1,191)	6749,28 (1,171)	6657,92 (1,154)	6584,91 (1,142)

По результатам расчета можно сделать следующие выводы:

1. Из табл. 1 видно, что при «мгновенном» нагружении оболочки критические напряжения незначительно превышают статическое критическое значение и практически не зависят от длины сжатой части и общей длины. При этом продольная волна должна пройти расстояние в несколько статических полуволн потери устойчивости. Для короткой оболочки с длиной, сравнимой с длиной статической полуволны, критические напряжения сильно зависят от длины сжатой части и в несколько раз могут превышать статическое критическое значение. Этот вывод полностью согласуется с результатами работ [5, 6], где рассматривалась упругая оболочка. В этих же работах делается вывод, что граничные условия не влияют на значения критических напряжений для оболочек средней длины. Таким образом, для определения критической нагрузки при «мгновенном» нагружении оболочек средней длины с некоторой погрешностью можно использовать формулу (16).

2. Расчеты для второго случая нагружения оболочки (табл. 2) показали, что критические напряжения всегда получаются больше, чем для «мгновенного» нагружения при тех же исходных данных. С уменьшением длины сжатой части и общей длины оболочки значения σ_0 возрастают. Таким образом, при продольном ударе значения критических напряжений цилиндрической оболочки более чувствительны к характеру напряженного состояния за фронтом продольной волны, чем к учету конечности скорости распространения последней.

Список библиографических ссылок

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
3. Аракелян А.Е., Мовсисян Л.А. Об упругопластической устойчивости стержня и цилиндрической оболочки при продольных интенсивных нагружениях // Известия АН Армянской ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1987, т. 40, № 5. – С. 3-13.
4. Мовсисян Л.А. К устойчивости упругопластических стержней при ударных нагрузках // Известия АН Армянской ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1986, т. 39, № 2. – С. 15-23.
5. Хамитов Т.К., Шигабутдинов Ф.Г. Об устойчивости упругопластических стержней при продольном ударе // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением. Труды X Международной Четаевской конференции. Т.2. Секция 2. Устойчивость. – Казань, 12-16 июня 2012. – С. 560-569.
6. Хамитов Т.К., Шигабутдинов Ф.Г. К вопросу о потере устойчивости упругих цилиндрических оболочек при продольном сжатии усилием ударного типа // Вестник Иркутского государственного технического университета. – Иркутск, 2010, № 3 (43). – С. 70-76.
7. Шигабутдинов Ф.Г., Хамитов Т.К. Определение критических усилий потери устойчивости упругих цилиндрических оболочек при продольном сжатии силами ударного типа // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, 2011, № 2. – С. 85-92.
8. Рахматуллин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М.: Физматгиз, 1961. – 369 с.
9. Королев В.И. Упругопластические деформации оболочек. – М.: Машиностроение, 1971. – 304 с.
10. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
11. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматлит, 1963. – 880 с.

Khamitov T.K. – candidate of technical sciences, senior lecturer

E-mail: tagirkx@yandex.ru

Fatykhova R.R. – student

E-mail: regishka_f93@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

On stability of elastic-plastic cylindrical shell under longitudinal impact

Resume

We consider the problem of stability of elastic-plastic cylindrical shell under longitudinal impact. It is known that for a metal shell with certain ratios of thickness to the radius of the buckling under longitudinal compression occurs beyond the elastic limit. Elastic-plastic material properties are characterized by a diagram with linear hardening, we use the theory of deformation without regard to unloading. For the two types of loading of the shell critical load obtained taking into account the finite speed of propagation of longitudinal waves. Under a critical load refers to the load at which the frequency of the bending oscillations is equal to zero. The problem is solved in the axisymmetric formulation of the first passage of the longitudinal compression waves along the shell. It is shown that if the longitudinal impact values of critical loads are more sensitive to the nature of the stress state behind the front of the longitudinal wave than to the consideration of the finite speed of propagation of the latter.

Keywords: cylindrical shell, buckling, longitudinal wave, critical voltage.

Reference list

1. Vol'mir A.S. Nonlinear dynamics of plates and shells. – M.: Nauka, 1972. – 432 p.
2. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Nonlinear problems of dynamics of composite structures. – N. Novgorod: publishing house of NNSU, 2002. – 400 p.
3. Arakelyan A.E., Movsisyan L.A. On elastic-plastic stability of rod and cylindrical shell under longitudinal intensive loads // Proceedings of the Academy of Sciences of the Armenian SSR. Series of physico-mathematical Sciences. 1987, vol. 40, № 5. – P. 3-13.
4. Movsisyan L.A. On the stability of elastic-plastic bars for impact loads // Proceedings of the Academy of Sciences of the Armenian SSR. Series of physico-mathematical sciences. 1986, vol. 39, № 2. – P. 15-23.
5. Khamitov T.K., Shigabutdinov F.G. On stability of elastic-plastic rods under longitudinal impact // Analytical mechanics, stability and control. 10th International Chetaev Conference. Vol. 2. Section 2. Stability. – Kazan, June 12-16, 2012. – P. 560-569.
6. Khamitov T.K., Shigabutdinov F.G. On the buckling of elastic cylindrical shells under longitudinal compression force impact type // Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Irkutsk, 2010, № 3 (43). – P. 70-76.
7. Shigabutdinov F.G., Khamitov T.K. Because the determination of the critical efforts of the buckling of elastic cylindrical shells under longitudinal compression forces impact type // Vestnik KSTU n.a. A.N. Tupolev, 2011, № 2. – P. 85-92.
8. Rakhmatullin K.A., Demyanov Y.A. Strength under the intensive short-time loads. – M.: Fizmatgiz, 1961. – 369 p.
9. Korolev V.I. Elastic-plastic deformation of shells. – M.: Mashinostroenie, 1971. – 304 p.
10. Ilyushin A.A. Plasticity. – M.: Gostehizdat, 1948. – 376 p.
11. Vol'mir A.S. Stability of elastic systems. – M.: Fizmatlit, 1963. – 880 p.