



УДК 533.69.048

**Гумеров А.В.** – кандидат технических наук, старший преподаватель

E-mail: [anvar\\_gumerov@list.ru](mailto:anvar_gumerov@list.ru)

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

### **Расчет движения вихревой нити вокруг кругового цилиндра методом дискретных вихрей**

#### **Аннотация**

Исследуется сила, действующая на круговой цилиндр при движении около него вихревой нити. Непроницаемость в контрольных точках поверхности обеспечивается дискретными вихрями, расположенными на контуре цилиндра. Интенсивности этих присоединенных дискретных вихрей определяются из условия нулевых нормальных скоростей в контрольных точках для двух случаев. В первом случае суммарная циркуляция дискретных вихрей на контуре цилиндра равна нулю, а в другом – суммарная циркуляция присоединенных дискретных вихрей и внешней вихревой нити равна нулю. Расчеты показали, что в первом случае поле скоростей вне цилиндра хорошо согласуется с полем, полученным по комплексному потенциалу, содержащим по теореме об окружности центральный вихрь.

**Ключевые слова:** метод дискретных вихрей, вихревая нить, интенсивность вихря, неустановившееся течение, круговой цилиндр, непроницаемость поверхности, теорема об окружности, комплексный потенциал течения.

#### **Введение**

Известный расчетный метод дискретных вихрей (МДВ), или его иногда называют методом «вихревого облака», позволяет решать задачи отрывного и безотрывного обтекания различных тел идеальной несжимаемой средой. Основоположниками данного метода являлись Белоцерковский С.М. [1], [2] и Сарпкая Т. [3-5]. Суть МДВ заключается в следующем. Контур обтекаемого цилиндрического тела заменяется присоединенными дискретными вихрями, а отрывное движение потока за телом моделируется свободными дискретными вихрями, перемещающимися с местной скоростью среды. Интенсивности присоединенных вихрей в каждый момент времени определяются из условия непроницаемости поверхности обтекаемого тела, и равенства нулю суммарной интенсивности присоединенных и свободных вихрей. Это условие приводит к таким же результатам расчета, которые получаются и при расчетах с применением комплексного потенциала, не содержащего центральных вихрей.

Согласно теореме об окружности Милн-Томсона [6] движение вихревой нити около кругового цилиндра определяется комплексным потенциалом, содержащим потенциал центрального вихря. В приведенных там же примерах 11 и 12 к главе 13 скорость внешнего вихря и давление на поверхности кругового цилиндра определяются с учетом центрального вихря, т.е. предполагается, что циркуляция по любому контуру, охватывающему цилиндр, но не охватывающему вихревую нить, равна нулю. В статьях [6-8] авторы, следуя Милн-Томсону, свои расчеты проводят с применением комплексного потенциала с центральным вихрем. В других публикациях [1-5], [9-11] в комплексном потенциале циркуляции центральных вихрей не учитываются, т.е. интенсивности присоединенных вихрей определяются из условия, что циркуляция вихрей по общему контуру, охватывающему цилиндр и свободные вихри равна нулю. Какой из этих двух методов расчета является правильным? Это можно было бы проверить экспериментально, но опытная проверка реального характера движения вихревой нити в идеальной жидкости довольно затруднительно.

Поэтому возникает вопрос о необходимости учета или исключения центрального вихря для получения реального движения вихревой нити. Для получения ответа на этот вопрос в настоящей работе изучается движение одной вихревой нити около неподвижного кругового цилиндра двумя способами. Расчеты проводятся методом дискретных вихрей,

когда интенсивности присоединенных вихрей определяются при дополнительном условии о нулевой суммарной циркуляции вихрей, расположенных на контуре цилиндра, а также с нулевой суммарной циркуляцией вихрей на общем контуре, охватывающем цилиндр и свободный вихрь. Для сравнительного анализа также проводятся дополнительные расчеты с применением комплексного потенциала, состоящего из потенциалов внешнего, инверсионного и центрального вихрей. Строится поле скоростей и определяется сила, действующая на круговой цилиндр при присутствии свободного внешнего вихря для двух случаев нахождения интенсивностей присоединенных вихрей.

### Постановка задачи

Пусть в точке  $z_0$  несжимаемой невязкой жидкости вне кругового цилиндра радиуса  $R$  внезапно образуется вихревая нить интенсивности  $\Gamma$ , ось которой параллельна оси цилиндра. Требуется методом дискретных вихрей провести расчеты и построить поле скоростей и определить силу, действующую на цилиндр для двух случаев расчета:

- циркуляция по контуру цилиндра равна нулю, что приводит к выполнению теоремы об окружности Милн-Томсона;
- циркуляция по общему контуру, охватывающему цилиндр и свободный вихрь равна нулю, который соответствует комплексному потенциалу без центрального вихря.

На основе сравнительного анализа полученных этими двумя способами касательных скоростей на поверхности цилиндра с соответствующей скоростью, полученной Милн-Томсоном, требуется принять подходящий расчетный случай и показать возможность применения модифицированного МДВ для расчета силы, действующей на тело.

### Решение задачи методом дискретных вихрей

На контуре цилиндра через равные промежутки  $D_j = 2\pi/n$  располагаются  $n$  дискретных вихрей (рис. 1):

$$z_j = R(\cos j_j + i \sin j_j), \text{ где } j_j = D_j \cdot (j - 1), j = 1, 2, \dots, n.$$

Посередине между дискретными вихрями располагаются контрольные точки:

$$z_i^T = R(\cos y_i + i \sin y_i), \text{ где } y_i = D_j / 2 + D_j \cdot (i - 1), i = 1, 2, \dots, n.$$

Положение внешнего вихря постоянной интенсивности  $\Gamma$  в начальный момент времени задаем в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$

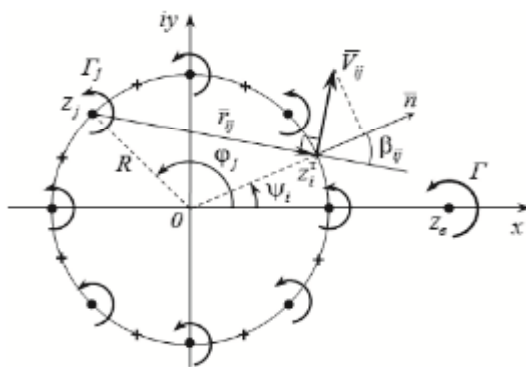


Рис. 1. Расчетная схема

Скорость, индуцированная  $j$ -м присоединенным вихрем в  $i$ -й контрольной точке определяется по формуле Био-Савара:

$$V_{ij} = \Gamma_j / 2\pi r_{ij}, \quad (1)$$

где  $r_{ij}$  – расстояние от  $j$ -го вихря до  $i$ -й контрольной точки,  $\Gamma_j$  – интенсивность присоединенного вихря, которую предстоит определить из условия непроницаемости контура цилиндра, т.е. при  $V_n^i = 0$ .

Проецируя скорость (1) индуцированную каждым вихрем в каждой контрольной точке на нормаль в этой точке получаем квадратную матрицу коэффициентов скоростей  $n$ -го порядка  $A = (a_{ij}) = (\sin b_{ij} / 2\pi r_{ij})$ , где  $b_{ij}$  – угол между нормалью и вектором  $\vec{r}_{ij}$  в контрольной точке  $z_i^T$ . Составляем матрицу столбец  $B$ , свободные члены которой известны и представляют собой проекцию скорости от свободного вихря на внутреннюю нормаль в каждой контрольной точке:

$$B = (b_i) = (\text{Пр}_{\cdot n} V_i) = (-\Gamma \sin \beta_i / 2\pi r_i). \tag{2}$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений, решением которой обеспечивается непроницаемость цилиндра:

$$AX = B, \tag{3}$$

где  $X$  – столбец неизвестных интенсивностей присоединенных вихрей на контуре цилиндра  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Данная система имеет линейно зависимые уравнения и содержит множество решений. Поэтому вводят дополнительное условие для определения интенсивностей: 1) циркуляция по контуру цилиндра равна нулю [7], [8] или 2) циркуляция по общему контуру, охватывающему цилиндр и свободный вихрь равна нулю [1]-[5], [9]-[11], т.е.:

$$1) \sum_{j=1}^n \Gamma_j = 0 \text{ или } 2) \sum_{j=1}^n \Gamma_j + \Gamma = 0. \tag{4}$$

Система уравнений (3) с дополнительным условием (4) принимает вид:

$$\begin{cases} a_{11}\Gamma_1 + a_{12}\Gamma_2 + \mathbf{K} + a_{1n}\Gamma_n + \mathbf{c} = b_1, \\ a_{21}\Gamma_1 + a_{22}\Gamma_2 + \mathbf{K} + a_{2n}\Gamma_n + \mathbf{c} = b_2, \\ \mathbf{K} \\ a_{n1}\Gamma_1 + a_{n2}\Gamma_2 + \mathbf{K} + a_{nn}\Gamma_n + \mathbf{c} = b_n, \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \mathbf{K} + \Gamma_n = 0 \text{ или } -\Gamma. \end{cases} \tag{5}$$

Решив данную систему методом Гаусса находим интенсивности  $\Gamma_j$  присоединенных вихрей на контуре цилиндра. Регуляризирующая переменная  $\epsilon \gg 0$  при  $n \gg \infty$ , устраняет переопределенность. В настоящих расчетах  $\epsilon \gg 0$  при числе дискретных вихрей  $n = 270$ .

Для построения поля скоростей воспользуемся комплексным потенциалом:

$$F(z) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{z - z_j} + \Gamma \ln(z - z_0) + \frac{\Gamma}{z - z_0}$$

Тогда скорость  $v$  в любой точке  $z$  плоскости выражается зависимостью:

$$v = \frac{dF}{dz} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{z - z_j} + \frac{\Gamma}{z - z_0} + \frac{\Gamma}{z - z_0} \tag{6}$$

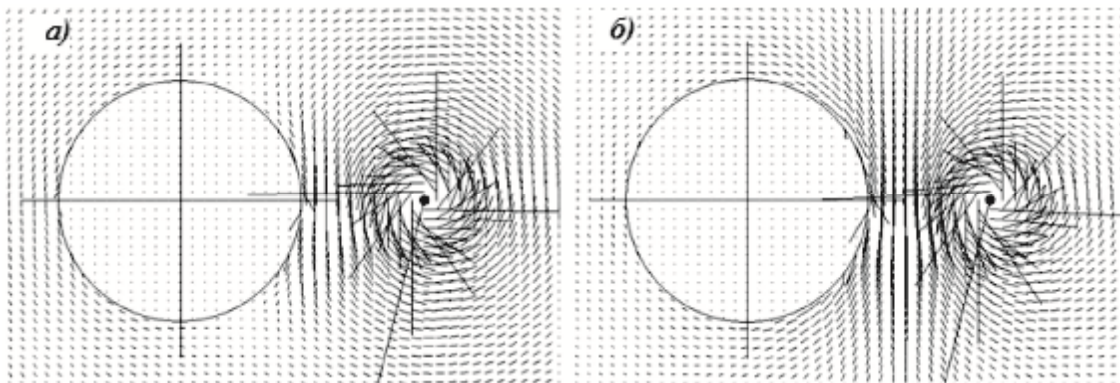


Рис. 2 – Поле скоростей около цилиндра в присутствии вихря:

а – циркуляция по контуру цилиндра равна нулю,

б – циркуляция по общему контуру, охватывающему цилиндр и свободный вихрь равна нулю

На рис. 2 приведены поля скоростей около цилиндра для двух случаев, когда интенсивности присоединенных вихрей определялись решением системы (5) при  $\sum_{j=1}^n \Gamma_j = 0$  (рис. 2а), а в случае  $\sum_{j=1}^n \Gamma_j = -\Gamma$  (рис. 2б). Поля скоростей заметно отличаются. Если в первом случае на поверхности цилиндра имеются две критические точки, то во втором они отсутствуют.

Для определения положения свободного вихря в следующий момент времени решаем дифференциальное уравнение движения этого вихря методом Эйлера:

$$z_{\sigma}^{t+Dt} = z_{\sigma}^t + v_{\sigma} \times Dt, \tag{7}$$

где  $Dt$  – шаг по времени,  $v_{\sigma}$  – скорость свободного вихря находится по (6) путем исключения составляющей скорости от самого вихря, т.е. вихрь движется с местной скоростью течения:

$$v_{\sigma} = \left. \frac{d\bar{F}}{dz} \right|_{z=z_{\sigma}} = \frac{i}{2p} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{1}{\bar{z}_{\sigma} - \bar{z}_j}. \tag{8}$$

После определения нового положения свободного вихря заново формируется правая часть системы уравнений (5), находятся новые интенсивности присоединенных вихрей и по (7) определяется последующее положение свободного вихря. Таким образом, выражения (2), (5), (7) образуют замкнутый цикл численного метода дискретных вихрей.

Сила, действующая на цилиндр от вихревой нити, легко находится по теореме об изменении импульса силы [12]:

$$Y + iZ = ip \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \Gamma_j \times z_j + \Gamma \times z_{\sigma} \right) = ip \left( \sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j \times z_j + \Gamma \times \dot{z}_{\sigma} \right). \tag{9}$$

Например, при  $R = 6$  м,  $n = 360$ ,  $\Gamma = 40$  м<sup>2</sup>/с,  $z_{\sigma} = 12 + 0 \cdot i$  м,  $r = 1$  кг/м<sup>2</sup> сила действующая на цилиндр равна  $F = 5,305164$  Н в первом случае и  $F = 21,219116$  Н во втором случае.

Давление в контрольной точке  $z_i^T$  поверхности цилиндра для неустановившегося течения определяется по интегралу Коши-Лагранжа:

$$p_i^T = -r \frac{\sum_{\sigma} v_{\sigma}^T)^2}{2} + \frac{\sum_{\sigma} \dot{\Gamma}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t}}{\sum_{\sigma} \dot{\Gamma}_{\sigma}}. \tag{10}$$

Как показали настоящие расчеты, скорость на поверхности цилиндра, вычисленная методом дискретных вихрей в два раза меньше скорости найденная через комплексный потенциал. Поэтому при использовании (10) скорость на поверхности рекомендуют увеличивать добавлением средней скорости от двух соседних вихрей в контрольной точке [13], т.е. выражение (6) запишется в виде:

$$v_i^T = \frac{i}{2p} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma_j}{\bar{z}_i^T - \bar{z}_j} + \frac{\Gamma}{\bar{z}_i^T - \bar{z}_{\sigma}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j}{\sum_{j=1}^n \dot{\Gamma}_j} + \frac{\Gamma_{j-1}}{2l_{j-1}} \frac{\partial}{\partial t},$$

где  $l_j$  – длина дуги контура, занимаемая  $j$ -ым дискретным вихрем. Изменение потенциала скорости в данной критической точке за время  $Dt$ :

$$\frac{\sum_{\sigma} \dot{\Gamma}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t}}{\sum_{\sigma} \dot{\Gamma}_{\sigma}} = \operatorname{Re} \left[ \frac{\sum_{\sigma} \dot{\Gamma}_{\sigma} F(z_i^T)}{\sum_{\sigma} \dot{\Gamma}_{\sigma}} \right] = \sum_{j=1}^n \frac{\dot{\Gamma}_j}{2p} \arg(z_i^T - z_j) + \operatorname{Re} \left[ \frac{\sum_{\sigma} \dot{\Gamma}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial t}}{2p(z_i^T - z_{\sigma})} \right].$$

По построению распределения давления от изменения потенциала скорости было выявлено необходимость изменять знак у  $\arg(z_i^T - z_j)$  на  $\arg(z_j - z_i^T)$ , когда  $\operatorname{Re}(z_i^T) < 0$ .

Сила, вычисленная интегрированием давления при тех же исходных данных, не сильно отличается от ранее полученных значений:  $F = 5,304061$  Н в первом случае и  $F = 21,220656$  Н во втором случае.

Для проверки полученных результатов воспользуемся комплексным потенциалом, состоящим из потенциала внешнего вихря, инверсионного вихря и центрального вихря:

$$F(z) = \frac{i\Gamma}{2p} \frac{\partial}{\partial t} \ln(z - z_{\sigma}) + \ln\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_{\sigma}}\right) - \ln(z) \frac{\partial}{\partial t}. \tag{11}$$

Комплексный потенциал такого течения получается преобразованием комплексного потенциала вихря, согласно теореме об окружности [6]. Поля скоростей течения (11) с учетом и без учета центрального вихря показаны на рис. 3. Сравнивая рис. 2 и 3 можно заметить схожесть поля скоростей вне цилиндра. Однако, вблизи поверхности цилиндра (рис. 2) метод дискретных вихрей занижает скорость. У самой поверхности отмечается двукратное занижение касательной скорости, которая постепенно увеличивается при удалении от поверхности и выравнивается примерно на  $1,05R$ .

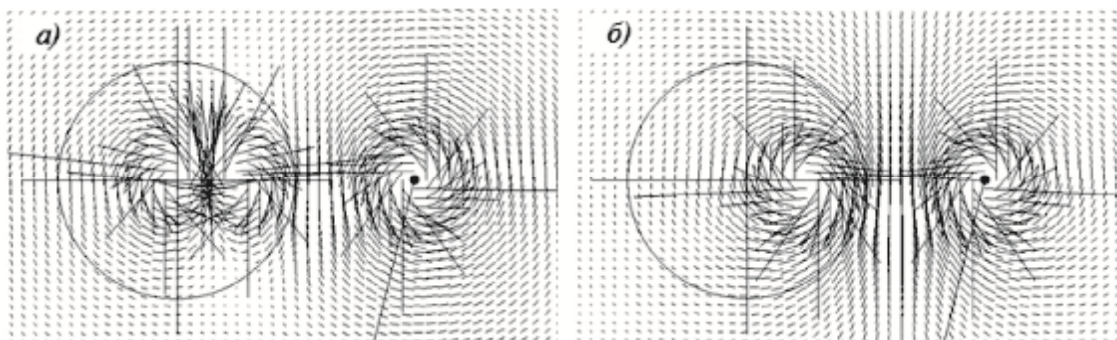


Рис. 3. Поле скоростей около цилиндра в присутствии вихря:  
а – с учетом комплексного потенциала центрального вихря, б – без учета центрального вихря

Из полученных результатов можно установить, что для метода дискретных вихрей при моделировании движения вихревой нити около цилиндра будет правильным интенсивности присоединенных вихрей находить из условия равенства нулю циркуляции по контуру цилиндра, что будет удовлетворять теореме об окружности.

Учет центрального вихря такой же интенсивности и знака что и внешний (11) ведет к уменьшению скорости перемещения внешнего вихря вокруг цилиндра. Сила, действующая на цилиндр с учетом центрального вихря в разы меньше силы без центрального вихря.

### Заключение

На основе расчетов, проведенных методом дискретных вихрей и с применением комплексного потенциала скорости, показано, что вихревая нить около круглого цилиндра движется по круговой траектории. Если к цилиндру никакие циркуляции не приложены, то при моделировании движения вихревой нити около цилиндра будет правильным интенсивности присоединенных вихрей находить из условия равенства нулю циркуляции по контуру цилиндра, что будет удовлетворять теореме об окружности.

При вычислении распределения давления на поверхности цилиндра и последующего интегрирования для определения силы действующей на цилиндр в методе дискретных вихрей необходимо завышать касательную скорость.

### Список библиографических ссылок

1. Белоцерковский С.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
2. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
3. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture // J. of Fluids Engineering, 1989, Vol. 111. – P. 5-52.
4. Сарпкая Т., Ириг. Внезапно начинающееся течение около прямоугольной призмы. Эксперименты и модель дискретных вихрей // Теоретические основы. 1986, № 1. – С. 198-213.
5. Sarpkaya T. An Analytical Study of Separated Flow About Circular Cylinders // ASME Journal of Basic Engineering, 1968, Vol. 90. – P. 511-520.

6. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 670 с.
7. Gebert G.A. Determination of Slender Body Aerodynamics Using Discrete Vortex Methods // *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1994, Vol. 31, № 2, March-April. – P. 200-207.
8. David H. Bridges, Hans G. Hornung, Elliptic Tip Effects on the Vortex Wake of an Axisymmetric Body of Incidence // *AIAA Journal*, 1994, Vol. 32, № 7. – P. 1437-1445.
9. Sarpkaya T., Schoaff R. Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding by a Circular Cylinder // *AIAA Journal*, 1979, Vol. 17, № 11. – P. 1193-1200.
10. Wardlow A. B. Jr. Multivortex Model of Asymmetric Shedding Slender Bodies at High Angle of Attack // *AIAA Paper*, № 75-123, 1975.
11. Крайко А.Н., Реент К.С. Невязкая природа несимметрии отрывного обтекания симметричных тел // *ПММ*, 1999, Т.63, Вып. 1. – С. 63-70.
12. Bryson A.E. Symmetric vortex separation on circular cylinders and cones // *J. of Applied Mechanics*, 1959, Vol. 26, № 4. – P. 643-648.
13. Никонов В.В., Шахов В.Г. Исследование моделирования двумерного вихревого нестационарного течения в многосвязной области // *Изв. Вузов Авиационная техника*, 2002, № 1. – С. 24-26.

**Gumerov A.V.** – candidate of technical sciences, senior lecturer

E-mail: [anvar\\_gumerov@list.ru](mailto:anvar_gumerov@list.ru)

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

### **Calculation of the movement of vortex filament around the circular cylinder using the method of discrete vortices**

#### **Resume**

The article discussed the motion of the vortex filament of discrete vortices around a stationary circular cylinder in inviscid incompressible fluid by known method is modeled. The intensities of the bound vortices on the contour of the cylinder, except for equality to zero of the normal velocity at the control points, defined as of the condition of equality to zero the circulation along the contour of the cylinder, so of the condition of equality to zero the circulation along the contour covering the cylinder and a free vortex.

This article examines the issue of the need to consider or not the central vortex (the use of the theorem of circle) in order to obtain the correct movement of the vortex filament around a cylinder, as some researchers in their calculations introduce central vortex, while others do not.

To check the obtained results the additional calculations are carried out with a complex potential flow, which consists of the capacity of the external vortex, inversion vortex and central vortex. Determined the force of the vortex filament on the cylinder by the impulse method and by the formula for the Cauchy-Lagrange. Also marked the underestimation of the speed on the cylinder surface by the method of discrete vortices, which can lead to incorrect calculation of the surface pressure, if not to introduce the additive of an average speed between two neighboring vortices in each checkpoint.

**Keywords:** the method of discrete vortices, vortex filament, the circular cylinder surface impermeability, the theorem of circle, unsteady flow, complex potential flow.

#### **Reference list**

1. Belotserkovsky S.M. Mathematical modeling of plane separated flow bodies. – М.: Nauka, 1988. – 232 p.
2. Belotserkovsky S.M., Nisht M.I. Separated and unseparated flow around thin wings of an ideal fluid. – М.: Nauka, 1978. – 352 p.
3. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture // *J. of Fluids Engineering*, 1989, Vol. 111. – P. 5-52.

4. Sarpkaya T. Ihrig. Impulsively Started Steady Flow About Rectangular Prism: Experiments and Discrete Vortex Analysis // *Theoretical foundations*, 1986, № 1. – P. 198-213.
5. Sarpkaya T. An Analytical Study of Separated Flow About Circular Cylinders // *ASME Journal of Basic Engineering*, 1968, Vol. 90. – P. 511-520.
6. Milne-Thomson L.M. *Theoretical Hydrodynamics*. – M.: Mir, 1964. – 670 p.
7. Gebert G.A. Determination of Slender Body Aerodynamics Using Discrete Vortex Methods // *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1994, Vol. 31, № 2. – P. 200-207.
8. David H. Bridges, Hans G. Hornung, Elliptic Tip Effects on the Vortex Wake of an Axisymmetric Body of Incidence // *AIAA Journal*, 1994, Vol. 32, № 7. – P. 1437-1445.
9. Sarpkaya T., Schoaff R. Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding by a Circular Cylinder // *AIAA Journal*, 1979, Vol. 17, № 11. – P. 1193-1200.
10. Wardlaw A.B. Jr. Multivortex Model of Asymmetric Shedding Slender Bodies at High Angle of Attack // *AIAA Paper No. 75-123*, 1975.
11. Kraiko A.N., Reent K.S. Non-viscous nature of the symmetry of separated flow around symmetrical bodies // *PMM*, 1999, Vol. 63, № 1. – P. 63-70.
12. Bryson A.E. Symmetric vortex separation on circular cylinders and cones // *J. of Applied Mechanics*, 1959, Vol. 26, № 4. – P. 643-648.
13. Nikonov V.V., Shahov V.G. The study of two-dimensional vortex simulation of unsteady flow in a multiply connected domain // *Izv. VUZ. Aviatsionnaya Tekhnika*, 2002, № 1. – P. 24-26.