



УДК 624.042.6

**Фардиев Р.Ф.** – кандидат технических наук, старший преподавательE-mail: [Fardiev@kgasu.ru](mailto:Fardiev@kgasu.ru)**Ашрапов А.Х.** – кандидат технических наук, ассистентE-mail: [32116@mail.ru](mailto:32116@mail.ru)**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1

**Применение теории составных стержней  
к определению характера распределения напряжений  
в поперечном сечении усиленного внецентренно сжатого элемента**

**Аннотация**

В статье рассмотрены результаты теоретических исследований напряжённо-деформированного состояния внецентренно сжатого элемента, усиленного железобетонной обоймой. В качестве теоретической основы использована теория составных стержней. В результате решения теоретической задачи получены аналитические выражения для определения нормальных напряжений в поперечном сечении усиленного элемента и касательных напряжений по контактному шву. Результаты расчётов по предложенному подходу сравнены с ранее выполненными результатами исследований.

**Ключевые слова:** составные стержни, усиление конструкций, железобетонная обойма, контактный шов, сжатый элемент.

Для оценки прочности усиленного элемента важным моментом является определение величины и характера распределения усилий, приходящихся на обойму и на основной элемент. На сегодняшний день существует деформационный метод определения напряжений и усилий [1, 2], но в его основу заложена гипотеза плоских сечений, которая может быть нарушена для усиленного железобетонной обоймой сечения элемента.

Для решения данной задачи в случае внецентренного сжатия для длинных элементов предлагается использовать теорию составных стержней [3], вводя некоторые изменения, связанные со сложным напряженно-деформированным состоянием усиленного элемента.

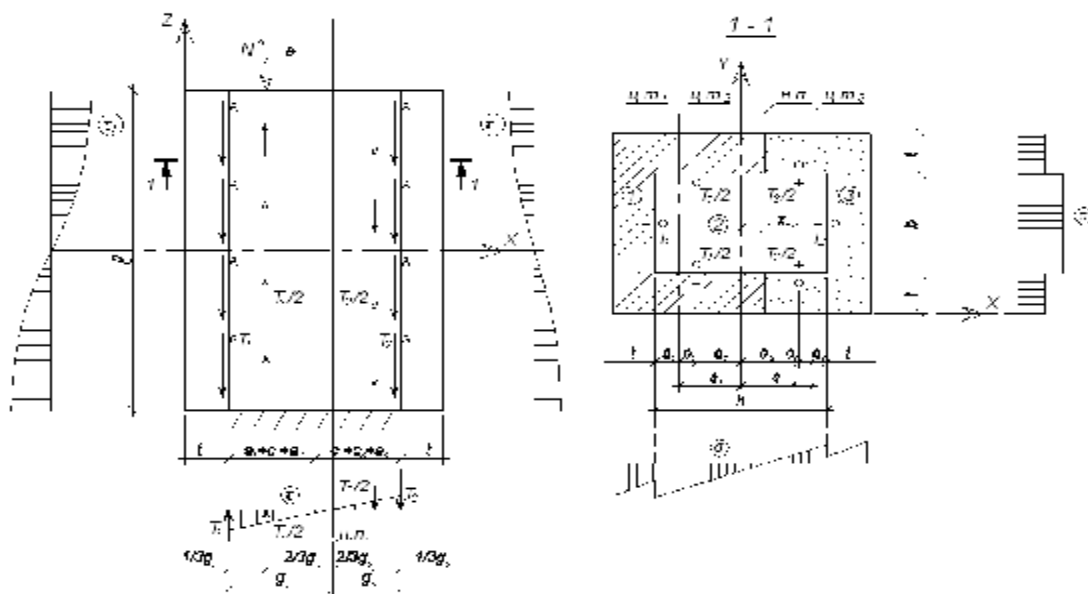


Рис. 1. Расчётная схема

Внецентренно сжатый элемент в поперечном сечении представляется в виде пакета из трёх стержней (рис. 1): стержня из основного усиливаемого элемента, стержня из части обоймы расположенной слева от нулевой линии сечения, стержня из части обоймы расположенной справа от нулевой линии сечения. Координата нулевой линии предварительно определяется из известного уравнения курса сопротивления материалов:

$$x_{н.л.} = \frac{(h + 2t)^2}{12e}, \quad (1)$$

где  $e$  – координата приложения силы  $N$ ,  $h$  – высота сечения.

Рассматриваемая система рассчитывается методом сил. В качестве основной системы стержень, лишенный связей сдвига, действие которых заменено неизвестными  $T_1$  и  $T_2$ .

Общая жёсткость стержня, лишённого связей сдвига будет равна:

$$SEI = E_1 I_y^1 + E_2 I_y^2 + E_3 I_y^3. \quad (2)$$

Касательные усилия вызывают изгибающие моменты в составляющих стержнях:

$$\begin{aligned} M_1 &= T_1 a_1 - 2 \frac{T_1}{2} c_1 = T_1 a_1 - T_1 c_1, \\ M_2 &= -T_1 (a_2 + c_1 + a_1) b - 2 \frac{T_1}{2} a_2 - T_2 (c_2 + c_3 + a_3) - 2 \frac{T_2}{2} c_2 = \\ &= -T_1 a_1 - T_1 c_1 - 2 T_1 a_2 - T_2 c_3 - T_2 a_3 - 2 T_2 c_2, \\ M_3 &= T_2 a_3 - 2 \frac{T_2}{2} c_3 = T_2 a_3 - T_2 c_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Суммарный изгибающий момент согласно методу сил будет равен сумме изгибающего момента от внешней нагрузки и моментов в каждом из стержней:

$$M = M^0 + N^0 e + M_1 + M_2 + M_3 = N e - 2 T_1 s_1 - 2 T_2 s_2, \quad (4)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  – расстояния между центрами тяжести стержней.

Продольные усилия в составляющих стержнях будут равны:

$$\begin{aligned} N_1 &= -2 T_1, \\ N_2 &= -N^0 + 2 T_1 - 2 T_2, \\ N_3 &= 2 T_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси пакета стержней запишется так же как и для изгибаемого элемента:

$$x'' = - \frac{M}{SEI}. \quad (6)$$

Суммарный сдвиг крайних волокон двух стержней будет равен разности сдвига двух смежных крайних волокон расположенных по обе стороны от контактного шва. Первая производная от абсолютного удлинения по длине шва равна относительному удлинению. Учитывая это выражение (8) примет вид:

$$D' = (D_i)' - (D_{i+1})' = e_i - e_{i+1}. \quad (7)$$

Относительное удлинение крайних волокон стержней определяется из выражений:

$$\begin{aligned} e_1^{раст} &= x'' \frac{t}{2} = - \frac{Mt/2}{SEI} - \text{растянутых волокон 1-го стержня;} \\ e_1^{сжат} &= e_2^0 - x'' (a_1 + c_1 + a_2) = \frac{N_2}{E_2 A_2} + \frac{M(a_1 + c_1 + a_2)}{SEI} - \text{сжатых волокон 2-го стержня;} \\ e_2^{раст} &= e_2^0 + x'' (c_2 + c_3 + a_3) = \frac{N_2}{E_2 A_2} - \frac{M(c_2 + c_3 + a_3)}{SEI} - \text{растянутых волокон 2-го стержня;} \\ e_2^{сжат} &= -x'' \frac{t}{2} = \frac{Mt/2}{SEI} - \text{сжатых волокон 3-го стержня.} \end{aligned} \quad (8)$$

Суммарный сдвиг крайних волокон первого и второго стержня согласно выражению (7) с учётом (8) будет равен:

$$\begin{aligned} D_1' &= e_1^{раст} - e_1^{сжат} = - \frac{N_2}{E_2 A_2} - \frac{M(1)}{SEI} - \text{первого и второго стержня;} \\ D_2' &= e_2^{раст} - e_2^{сжат} = \frac{N_2}{E_2 A_2} - \frac{M(2)}{SEI} - \text{второго и третьего стержня.} \end{aligned} \quad (9)$$

В выражениях (9) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (1) &= (a_1 + c_1 + a_2 + t/2), \\ (2) &= (c_2 + c_3 + a_3 + t/2). \end{aligned} \quad (10)$$

Для того чтобы основная система стала эквивалентной заданной, необходимо приравнять сдвиги в швах погонным сдвигающим усилиям, деленным на коэффициент жесткости шва:

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{t_i}{x} = \frac{T_i'}{x}, \\ D_i' &= \frac{T_i''}{x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициент жёсткости шва  $\zeta$  зависит от податливости соединения сборного и монолитного бетонов, наличия шпоночного соединения, поперечной арматуры пересекающей контактный шов, наличия обработки контактной поверхности.

Для получения уравнений с известным решением для трёх стержней найдём сумму и разность сдвигов  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{T_1''}{x} + \frac{T_2''}{x} &= - \frac{M((1)+(2))}{SEI} \\ \frac{1}{x} \frac{T_1''}{x} - \frac{T_2''}{x} &= \frac{2N^0}{E_2A_2} - \frac{M((2)-(1))}{SEI}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из уравнений (10) следует:

$$\begin{aligned} (1)+(2) &= h+t, \\ (2)-(1) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Введём обозначения:  $T_a$  – антисимметричная часть совокупности усилий,  $T_c$  – симметричная часть совокупности усилий:

$$\begin{aligned} T_a &= T_1 + T_2, \\ T_c &= T_1 - T_2. \end{aligned} \quad (14)$$

С учётом (14) система уравнений (12) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{T_a''}{x} &= \frac{2(h+t)(T_1s_1 + T_2s_2)}{SEI} - \frac{N^0e}{SEI}, \\ \frac{1}{x} \frac{T_c''}{x} &= - \frac{4T_c}{E_2A_2} + \frac{2N^0}{E_2A_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где выражение в скобках 1-го уравнения можно представить в виде:

$$T_1s_1 + T_2s_2 = \frac{T_a(s_1 + s_2)}{2} + \frac{T_c(s_1 - s_2)}{2} \gg \frac{T_a(s_1 + s_2)}{2}. \quad (16)$$

С учётом (16) уравнения (15) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{T_a''}{x} &= \frac{(h+t)(s_1 + s_2)}{SEI} T_a - \frac{N^0e}{SEI} = g_a T_a + d_a \\ \frac{1}{x} \frac{T_c''}{x} &= - \frac{4}{E_2A_2} T_c + \frac{2N^0}{E_2A_2} = g_c T_c + d_c. \end{aligned} \quad (17)$$

где  $g_a, \delta_a, g_c, \delta_c$  – коэффициенты, определяемые из выражений:

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{(h+t)(s_1 + s_2)}{SEI}, \quad d_a = - \frac{N^0e}{SEI} \\ g_c &= - \frac{4}{E_2A_2}, \quad d_c = \frac{2N^0}{E_2A_2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Система уравнений (17) имеет известное решение:

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{d_a}{g_a} \frac{\cosh(l_a x)}{\cosh(l_a l)} - 1 \\ T_c &= \frac{d_c}{g_c} \frac{\cosh(l_c x)}{\cosh(l_c l)} - 1 \end{aligned} \quad (19)$$

При этом касательные напряжения определяются из выражений:

$$\begin{aligned} \ddot{t}_a &= T_a' = \frac{d_a l_a}{g_a} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_a x)}{\operatorname{ch}(\lambda_a l)} - 1 \frac{\ddot{\delta}}{\delta} \\ \ddot{t}_c &= T_c' = \frac{d_c l_c}{g_c} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_c x)}{\operatorname{ch}(\lambda_c l)} - 1 \frac{\ddot{\delta}}{\delta} \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\operatorname{sh} \lambda x$  – гиперболический синус,  $\operatorname{ch} \lambda x$  – гиперболический косинус, определяемые из выражений:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\lambda x) &= \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}, \\ \operatorname{sh}(\lambda x) &= \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}; \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\lambda_a, \lambda_c$  – коэффициенты, определяемые согласно выражениям:

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \sqrt{g_a x_a} \\ \lambda_c &= \sqrt{g_c x_c} \end{aligned} \quad (22)$$

При достаточно жёстком контактном шве при  $\zeta > 10$  выражения (22) примут вид:

$$\operatorname{ch} \lambda x = \operatorname{sh} \lambda x \gg \frac{e^{\lambda x}}{2}. \quad (23)$$

При этом система уравнений (20) примет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{t}_a &= \frac{d_a}{g_a} (e^{\lambda_a(x-l)} - 1) \\ \ddot{t}_c &= \frac{d_c}{g_c} (e^{\lambda_c(x-l)} - 1) \end{aligned} \quad (24)$$

При известных  $\tau_a$  и  $\tau_c$  искомые напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  можно выразить из выражений (14):

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\tau_c + \tau_a}{2}, \\ \tau_2 &= \frac{\tau_a - \tau_c}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Неизвестные напряжения в каждой из стержней можно определить из выражения:

$$s_i = \frac{N_i}{A_i} + \frac{M_i x_i}{I_i}, \quad (26)$$

где  $N_i$  – усилия определяемые согласно выражению (5),  $M_i$  – изгибающие моменты в стержнях, определяемые из выражения:

$$M_i = -x'' E_i I_i = \frac{M}{SEI} E_i I_i. \quad (27)$$

Учитывая уравнения (5, 6) выражения для определения неизвестных напряжений для составляющих стержней примут вид:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{2T_1}{A_1} + \frac{(T_1 a_1 - T_1 c_1) E_1 x}{SEI}, \\ s_2 &= \frac{-N^0 + 2T_1 - 2T_2}{A_2} + \frac{(-T_1 a_1 - T_1 c_1 - 2T_1 a_2 - T_2 c_3 - T_2 a_3 - 2T_2 c_2) E_2 x}{SEI}, \\ s_3 &= -\frac{2T_2}{A_3} + \frac{(T_2 a_3 - T_2 c_3) E_3 x}{SEI}. \end{aligned} \quad (28)$$

При известных касательных усилиях из выражения (35) определяется уточнённое положение нулевой линии:

$$x_{н.л.} = \frac{(N^0 - 2T_1 + 2T_2) SEI}{A_2 E_2 (-T_1 a_1 - T_1 c_1 - 2T_1 a_2 - T_2 c_3 - T_2 a_3 - 2T_2 c_2)}. \quad (29)$$

Расчёт производится последовательными приближениями с уточнением положения нулевой линии до достижения требуемой точности определения усилий.

Для проверки полученных аналитических выражений было выполнено сопоставление нормальных напряжений в поперечном сечении усиленного элемента (рис. 2)

по полученным аналитическим выражениям и согласно подходу основанному на кусочном законе распределения напряжений [4, 5].

Для выполнения расчёта рассмотрен элемент длиной 1 м с поперечным сечением  $150 \times 200$  см, усиленный железобетонной обоймой толщиной 3 см.

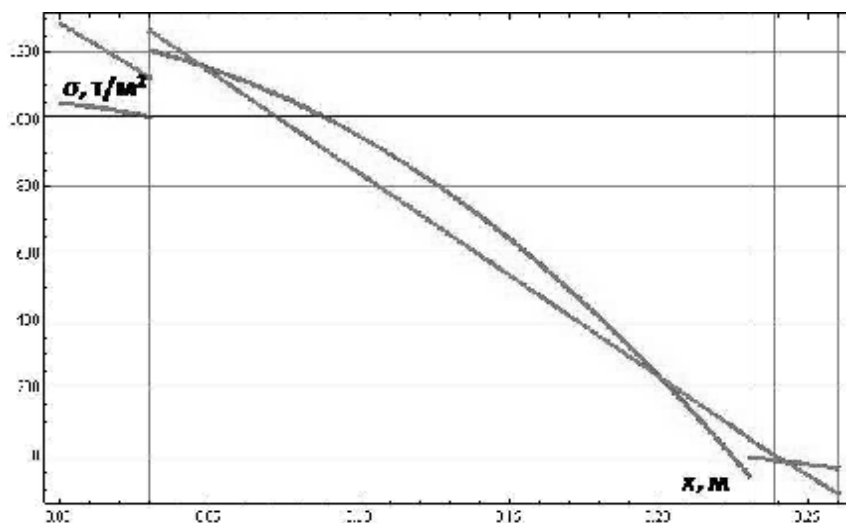


Рис. 2. График зависимости нормальных напряжений в поперечном сечении элемента: при  $z = 0$ , по предложенной методике (линейная зависимость) и по ранее предложенному подходу (нелинейная зависимость)

Анализ полученных результатов показал что предложенный подход расчёта достаточно хорошо коррелируется с результатами ранее выполненных исследований.

Согласно принятой расчётной схеме касательные напряжения между стержнями должны быть максимальными при  $z = 0$ , и минимальными при  $z = l$ , что подтверждается полученными графиками (рис. 3).

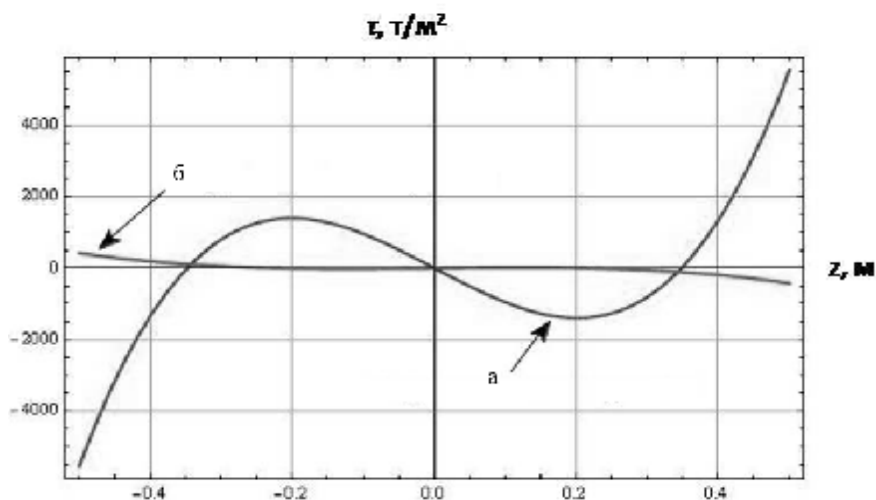


Рис. 3. График зависимости касательных напряжения вдоль контактного шва: а – между 1-ым и 2-ым элементами, б – между 2-м и 3-м элементами

Данные о характере распределения напряжений по контактному шву позволяют произвести оценку его прочности по известным методикам [6, 7, 8] выполнить проверку прочности поперечного сечения.

Таким образом, на основании теории составных стержней получено решение задачи определения характера распределения усилий между обоймой и колонной в случае усиления внецентренно нагруженного элемента железобетонной обоймой.

### Список библиографических ссылок

1. Бабич В.И., Кочкарев Д.В. Расчет элементов железобетонных конструкций деформационным методом // Бетон и железобетон, 2004, № 2. – С. 12-16.
2. Залесов А.С., Чистяков Е.А., Ларичева И.Ю. Новые методы расчёта по нормальным сечениям на основе деформационной расчётной модели // Бетон и железобетон. 1997, № 5. – С. 31-34.
3. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
4. Фардиев Р.Ф., Каюмов Р.А., Мустафин И.И. Расчёт внецентренно сжатого элемента усиленного железобетонной обоймой с учётом предыстории загрузки и нелинейных свойств бетона // Известия КГАСУ, 2011, № 1 (15). – С. 109-114.
5. Фардиев Р.Ф., Мустафин А.И. Исследование усиленных обоймой внецентренно сжатых железобетонных элементов с учётом напряжённого состояния до усиления // Интеграция, партнёрство и инновации в строительной науке и образовании, МГСУ, 2012. – С. 152-157.
6. Валеев Г.С., Фатхуллин В.Ш. Применение сборно-монолитного железобетона при реконструкции зданий и сооружений // Известия вузов. Строительство, 1994. – С. 114-117.
7. Гроздов В.Т., Сергеев С.Л. К вопросу учёта прочности контактной зоны при расчётах железобетонных изгибаемых конструкций, усиленных способами наращивания сечений // Известия вузов. Строительство, 1996, № 4. – С. 34-38.
8. Сунгатуллин Я.Г. Экспериментально-теоретические основы расчёта сопротивляемости сдвигу армированного и неармированного контактов сборно-монолитных конструкций // Сборные и сборно-монолитные конструкции: сборник научных трудов. – Казань. – С. 90-146.

**Fardiev R.F.** – candidate of technical sciences, senior lecture

E-mail: [Fardiev@kgasu.ru](mailto:Fardiev@kgasu.ru)

**Ashrapov A.H.** – candidate of technical sciences, assistant

E-mail: [32116@mail.ru](mailto:32116@mail.ru)

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

### Application of the theory of compound bars for the assessment of stress pattern in the cross section of a strengthened beam column

#### Resume

This study deals with the problem of assessment of stress-strain behavior of reinforced structures. The beam column strengthened by a collar is viewed as a complex compound structure of variable cross-section consisting of interconnected bars. Such an approach allowed us to obtain data on the three-dimensional stress state of the structure that provides an opportunity to estimate the strength of the contact surface between the strengthened element and the collar, as well as to assess the strength of the whole element. A distinctive feature of this approach is a departure from the plane-sections hypothesis that makes it possible to get more reliable data on the stress-strain behavior of structures. To test the received expressions the article presents the results of comparison of calculations of the strengthened element on the suggested approach and existing approaches. Analysis of the obtained results showed that the proposed approach of calculation is well correlated with the results of previous studies. A graphical representation of the results of estimation of the stress on the contact surface corresponds to the physical model of the strengthened element. The obtained results can be used in the calculation of strengthening columns, buildings and structures supports when strengthening by reinforced concrete collar.

**Keywords:** compound bars, strengthening of concrete structures, reinforced concrete collar, contact surface, compression element.

**Reference list**

1. Babich V.I., Kochkarev D.V. Calculation of reinforced concrete structures by deformation // Concrete and reinforced concrete, 2004, № 2. – P. 12-16.
2. Zalesov A.S., Chistyakov E.A., Laricheva I.Y. New methods of normal section calculation on the basis of a deformation design model // Concrete and reinforced concrete, 1997, № 5 – P. 31-34.
3. Rzhantsyn A.R. Compound bars and plates. – M.: Stroiizdat, 1986. – 316 p.
4. Fardiev R.F., Kayumov R.A., Mustafin I.I. Calculation of a beam column strengthened by a reinforced concrete collar with allowance for previous load history and nonlinear properties of concrete // Izvesiya KGASU, 2011, № 1 (15). – P. 109-114.
5. Fardiev R.F., Mustafin A.I. The study on the reinforced concrete beam columns strengthened by a collar with allowance for stress state before strengthening // «Integration, partnership and innovation in construction science and education». Moscow State University of Civil Engineering, 2012, – P. 152-157.
6. Valeev G.S., Fatkhullin V.S. Application of prefabricated reinforced concrete in reconstruction of buildings and structures // News of Higher Educational Institutions. Construction, 1994. – P. 114-117.
7. Grozdov V.T., Sergeev S.L. The question of allowance for strength of the contact zone under the calculation of reinforced concrete bending structures strengthened by the extension of cross sections // News of Higher Educational Institutions. Construction, 1996, № 4. – P. 34-38.
8. Sungatullin Y.G. Experimental and theoretical basis of the calculation of shear resistance of reinforced and non-reinforced contacts of cast-in-place and precast structures // Cast-in-place and precast structures: collection of research papers. – Kazan, 1975. – P. 90-146.