



УДК 621.86 78

**Земдиханов М.М.** – кандидат технических наукE-mail: [mr.minsur@mail.ru](mailto:mr.minsur@mail.ru)**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1

### Обоснование формы колена трубопровода для транспортирования сыпучих материалов

#### Аннотация

В статье проведен анализ известных устройств для снижения износа поверхности колен пневмопроводов на изгибах. Предложено теоретическое обоснование формы изгиба колена пневмопровода сыпучих материалов, обеспечивающей движение частиц материала с постоянным давлением на стенку колена и, следовательно, обуславливающий равномерный износ криволинейного участка. При этом увеличивается срок службы колена пневмопровода. Получены уравнения, определяющие форму и размеры колена в зависимости от свойств транспортируемого материала и параметров пневмотранспортирующего устройства.

**Ключевые слова:** пневмопровод, частица материала, колено, радиус кривизны, уравнение.

Предприятия, производящие строительные конструкции и материалы широко применяют системы пневмотранспорта для транспортировки и смешивания сыпучих материалов, таких как цемент, литейный песок, известь, зола, металлическая пыль, шлак и другие. Пневмотранспорт прогрессивным способом механизации и автоматизации перемещения насыпных грузов. Он имеет следующие преимущества по сравнению с другими видами транспортирующих устройств: возможность транспортирования на большие расстояния в любом направлении (по горизонтали, по вертикали или под наклоном); возможность решения транспортных проблем для производств со сложной компоновкой; отсутствие потерь сыпучих материалов и загрязнения, запыления за счет герметичности трубопроводов; высокая надежность при минимальном обслуживании; модульный принцип изготовления, обеспечивающий простоту монтажа и замены элементов; непрерывность выполнения операций и возможность их автоматизации.

Вместе с тем у пневмотранспортирующих устройств имеются и недостатки. Одним из них является быстрый износ пневмопровода при транспортировке абразивных частиц, в особенности на начальном участке изогнутой части или колена.

Для уменьшения износа поверхности стенки колена предлагается дополнительное устройство на изогнутом участке [1]. Также предлагается установка внутри коленчатого участка дополнительных износостойких вкладышей [2, 3, 4]. Эти дополнения приводят к удорожанию конструкции, и при этом повышается вероятность забивания колена.

Ниже автором теоретически обоснована форма кривой, представляющей радиус кривизны изгиба колена пневмопровода, которая обеспечивает движение материала по стенке колена с постоянным давлением. За счет постоянства давления частиц материала на стенку колена по всей ее длине обеспечивается равномерный износ стенки и увеличивается срок ее службы. Также можно задавать величину давления частицы материала на стенку, не превышающее значения, вызывающего разрушение материала.

Определим уравнение кривой, удовлетворяющей вышеуказанным требованиям.

Частицы материала поступают на криволинейную поверхность колена с начальной скоростью  $v_0$  (рис. 1). На движущуюся частицу действуют сила тяжести  $mg$ , центробежная сила  $m \frac{v^2}{r}$ , сила нормального давления  $N$ , сила трения  $fN$  и сила воздушного напора  $F_e$ . Проектируя силы на нормаль и касательную, запишем дифференциальные уравнения [6]:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \cos \alpha + F_e - fN, \quad (1)$$

$$N = m \frac{v^2}{r} + mg \sin \alpha = const, \quad (2)$$

где  $m$  – масса частицы материала;

$v$  – скорость частицы;

$\alpha$  – угол между осью  $x$  и касательной к образующей поверхности колена;

$f$  – коэффициент трения частицы материала о поверхность колена;

$r$  – радиус кривизны колена трубопровода.

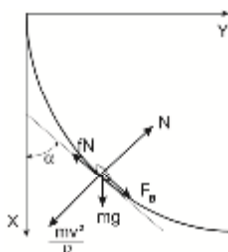


Рис. Схема сил, действующих на частицу при движении по поверхности колена

Размеры колена ограничиваются габаритами и материалоемкостью пневмопровода и поэтому при движении частиц материала по поверхности колена с малыми радиусами кривизны силы нормального давления в десятки раз превышают силу тяжести и силу напора воздушного потока. Поэтому, при рассмотрении движения частиц по поверхности колена, им можно пренебречь, тогда уравнения (1) и (2) запишем в виде:

$$m \frac{dv}{dt} = -fN, \quad (3)$$

$$N = m \frac{v^2}{r} = const. \quad (4)$$

Заменяя в уравнении (3):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}, \quad (5)$$

где  $ds$  – дифференциал длины дуги образующей, приводим его к интегралу:

$$m \int_{v_0}^v v dv = -fN \int_0^s ds, \quad (6)$$

где  $v_0$  – скорость частицы материала при поступлении на поверхность колена. После интегрирования получим:

$$v^2 = -2fNs / m + v_0^2. \quad (7)$$

Из уравнений (4) и (7) после преобразований имеем:

$$r = \frac{m}{N} v_0^2 - 2fs. \quad (8)$$

Как известно [6] длина дуги определяется через интеграл:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (y\phi)^2} dx. \quad (9)$$

После подстановки интеграла (9) в выражение (10) получим:

$$r = \frac{m}{N} v_0^2 - 2f \int_0^x \sqrt{1 + (y\phi)^2} dx. \quad (10)$$

Также известно [7], что радиус кривизны кривой определяется по зависимости:

$$r = \frac{[1 + (y\phi)^2]^{3/2}}{y\phi}. \quad (11)$$

Приравняв правые части уравнений (10) и (11) получим:

$$\frac{[1 + (y\phi)^2]^{3/2}}{y\phi} = \frac{m}{N} v_0^2 - 2f \int_0^x \sqrt{1 + (y\phi)^2} dx. \quad (12)$$

Продифференцируем данную зависимость по  $x$  и после некоторых преобразований имеем:

$$3(y\dot{\varphi}^2 y\dot{\varphi} - y\dot{\varphi}[1+(y\dot{\varphi}^2)] + 2f(y\dot{\varphi}^2) = 0. \quad (13)$$

Понизим порядок уравнения (13) на единицу, что возможно ввиду того, что переменная  $x$  не входит явно в уравнение [8]. Положим  $y\dot{\varphi} = p$ , тогда:

$$y\dot{\varphi} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p\dot{\varphi} \text{ и } y\dot{\varphi} = \frac{dp}{dy} p \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dp}{dy dx} + p \frac{dp^2}{dy dx} = (p\dot{\varphi})^2 p + p\dot{\varphi} p^2.$$

После подстановки уравнение (13) примет вид:

$$p\dot{\varphi}(1+p^2) + (p\dot{\varphi})^2(1-2p^2-2fp) = 0, \quad p \neq 0. \quad (14)$$

$$p\dot{\varphi} = \frac{dQ}{dy} \frac{dp}{dp} = \frac{dQ}{dp} \frac{dp}{dy} = \frac{dQ}{dp} Q. \quad (15)$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\dot{\varphi} \frac{dQ}{Q} = \dot{\varphi} \frac{2p^2 + 2fp - 1}{p(1+p^2)} dp. \quad (16)$$

В уравнении (16) интеграл справа от знака равенства представим в виде:

$$\dot{\varphi} \frac{2p^2 + 2fp - 1}{p(1+p^2)} dp = \dot{\varphi} \left( \frac{A}{p} + \frac{Cp + D}{1+p^2} \right) dp, \quad (17)$$

где  $1 - 2p^2 - 2fp = A(1+p^2) + Cp^2 + Dp$ . Приравнявая  $p = 0$ , определяем:  $A = -1$ ,  $C = 3$ ,  $D = 2f$ .

Решив полученный интеграл, находим:

$$Q = \frac{(1+p^2)^{1.5} e^{2f \arctg p}}{p} e^{c_1}. \quad (18)$$

Определим из начальных условий  $c_1$ . Так как:

$$Q = \frac{dp}{dy} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = \frac{y\dot{\varphi}}{y\dot{\varphi}} = \frac{y\dot{\varphi}}{p}, \quad (19)$$

тогда формулу (18) запишем в виде:

$$y\dot{\varphi} = e^{c_1} (1+p^2)^{1.5} e^{2f \arctg p}. \quad (20)$$

С другой стороны начальное значение радиуса  $r_0$  кривизны образующей колена определяется из условия:

$$r_0 = \frac{v_0^2}{W_{дон}}, \quad (21)$$

где  $W_{дон}$  – максимально допустимое центростремительное ускорение при взаимодействии частиц материала с поверхностью колена.

Тогда, учитывая данное выражение и воспользуясь уравнениями (11) и (20) получаем формулу для определения  $e^{c_1}$ :

$$e^{c_1} = \frac{W_{дон}}{v_0^2 e^{2f \arctg p_0}}. \quad (22)$$

Обозначим  $e^{c_1}$  как  $C_1$  и учитывая, что  $p_0 = tg a_0$ , запишем:

$$C_1 = \frac{W_{дон}}{v_0^2 e^{2fa_0}}, \quad (23)$$

где  $a_0$  – начальное значение угла  $a$ .

Для решения уравнения (18) подставим вместе  $Q$  дифференциал  $\frac{dp}{dy}$ , тогда данное уравнение приводится следующему интегралу:

$$\dot{\varphi} dy = \frac{1}{C_1} \dot{\varphi} \frac{p e^{-2f \arctg p}}{\sqrt{1+p^2}(1+p^2)} dp. \quad (24)$$

Сделаем подстановку  $\arctg p = q; \frac{dp}{1+p^2} = dq; p = \operatorname{tg} q$ . Тогда:

$$\dot{\sigma} t y = \frac{1}{C_1} \dot{\sigma} e^{-2fq} \sin q dq.$$

Применив для данного выражения метод интегрирования по частям, получим:

$$\dot{\sigma} t y = \frac{-1}{C_1} (e^{-2fq} \cos q + 2f \dot{\sigma} e^{-2fq} \cos q dq). \tag{25}$$

Для интеграла в правой части также воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\dot{\sigma} e^{-2fq} \cos q dq = e^{-2fq} \sin q + 2f \dot{\sigma} e^{-2fq} \sin q dq. \tag{26}$$

Подставив правую часть выражения (26) в уравнение (25), определяем  $y$ :

$$y = \frac{2f \sin q + \cos q}{-C_1(1+4f^2)e^{2fq}} + C_2.$$

Учитывая, что  $q = \arctg p = \arctg \operatorname{tg} a = a$ , а также формулу (23), получим зависимость  $y$  от параметра  $a$ , являющегося углом между касательной к искомой кривой и осью  $x$ , в следующем виде:

$$y = - \frac{v_0^2 e^{2fa_0} (2f \sin a + \cos a)}{W_{oon} (1+4f^2) e^{2fa}} + C_2. \tag{27}$$

Определим  $C_2$  из начальных условий. Допустим при условии  $y = 0, a = a_0 = 0$  и, тогда  $C_2 = \frac{v_0^2}{(1+4f^2)W_{oon}}$ , следовательно, уравнение (27) запишется в виде:

$$y = \frac{v_0^2}{(1+4f^2)W_{oon}} \frac{2f \sin a + \cos a}{e^{2fa}}. \tag{28}$$

Для получения уравнения радиуса кривизны колена в параметрической форме далее аналогично определяем зависимость  $x$  от параметра  $a$ . Заменяя:

$$y\phi = \frac{1}{x\phi} \text{ и } y\phi = - \frac{x\phi}{(x\phi)^3}, \tag{29}$$

выражение (11) запишем в виде:

$$r = - \frac{[1+(x\phi)^2]^{3/2}}{x\phi}. \tag{30}$$

Также подставив:

$$y\phi = \frac{1}{x\phi}, \tag{31}$$

уравнение (10) приводим к виду:

$$r = \frac{mv_0}{N} - 2f \int_0^y \sqrt{1+(x\phi)^2} dy. \tag{32}$$

Приравняв правые части формул (30) и (32) и после их дифференцирования, проведя некоторые преобразования, получим:

$$3x\phi x\phi - x\phi [1+(x\phi)^2 - 2f(x\phi)^2] = 0. \tag{33}$$

Далее проведем замену:

$$x\phi = F_x; x\phi = FF_x x\phi = F[(F_x)^2 + FF_x] \tag{34}$$

и после преобразований уравнение (33) примет вид:

$$FF_x(1+F^2) + (F_x)^2(1+2fF - 2F^2) = 0. \tag{35}$$

Введением повторной замены:  $\frac{dF}{dx} = T_F; F_x\phi = T_F T_F\phi$ ,

$$T = \frac{(1+F^2)^{3/2}}{F e^{2f \arctg F}} e^{c_3}. \tag{36}$$

Определим  $e^{c_3}$  из начальных условий. Так как:

$$T = \frac{dF}{dx} = \frac{dx\phi}{dx} \frac{dy}{dy} = \frac{x\phi}{x\phi} = \frac{x\phi}{F}, \tag{37}$$

тогда формулу (36) запишем в виде:

$$x_{\text{доп}} = e^{c_3} (1 + F^2)^{1.5} e^{2f \arctg F}. \tag{38}$$

Также уравнение (38) запишем в виде:

$$r = - \frac{(1 + F^2)^{\frac{3}{2}}}{x_{\text{доп}}}. \tag{39}$$

С другой стороны начальное значение  $r_0$  определяется из условия:

$$r_0 = \frac{v_0^2}{W_{\text{доп}}}. \tag{40}$$

Тогда, учитывая данное условие и, воспользуясь уравнениями (38), (39), получаем формулу для определения  $e^{c_3}$ :

$$e^{c_3} = \frac{W_{\text{доп}}}{v_0^2 e^{2f \arctg F_0}}. \tag{41}$$

Обозначим  $e^{c_3}$  как  $C_3$  и учитывая, что  $F_0 = 1/\text{tga}_0 = \text{tg}(\rho/2 - a_0)$ , запишем:

$$C_3 = \frac{W_{\text{доп}}}{v_0^2 e^{2f(\rho/2 - a_0)}}. \tag{42}$$

Для решения уравнения (38) подставим вместо  $T$  дифференциал  $\frac{dF}{dx}$ , тогда это уравнение приводится к следующему интегралу:

$$\int dx = \frac{1}{C_3} \int \frac{F e^{2f \arctg F}}{(1 + F^2)^{\frac{3}{2}}} dF. \tag{43}$$

Решим данный интеграл теми же методами, которые были применены выше для интеграла (24).

Далее подставив  $F = 1/\text{tga} = \text{tg}(\frac{\rho}{2} - a)$ , а также  $C_3$  из выражения (42) и предположив, что угла  $a_0 = 0$ , после преобразований получим искомую зависимость в следующем виде:

$$x = \frac{v_0^2 (2f \cos a - \sin a)}{W_{\text{доп}} (1 + 4f^2) e^{2fa}} + C_4. \tag{44}$$

Определим  $C_4$  из начальных условий. Допустим при условии  $x = 0$ ,  $a = a_0 = 0$  и тогда  $C_4 = - \frac{2fv_0^2}{(1 + 4f^2)W_{\text{доп}}}$ , следовательно, уравнение (44) запишется в виде:

$$x = \frac{v_0^2}{(1 + 4f^2)W_{\text{доп}}} \frac{2f \cos a - \sin a}{e^{2fa}} - 2f \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}. \tag{45}$$

Таким образом, получены уравнения искомой кривой в параметрическом виде, где параметром является угол  $a$  между касательной к этой кривой и осью  $x$ :

$$y = \frac{v_0^2}{(1 + 4f^2)W_{\text{доп}}} \frac{2f \sin a + \cos a}{e^{2fa}} - 2f \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}, \tag{46}$$

$$x = \frac{v_0^2}{(1 + 4f^2)W_{\text{доп}}} \frac{2f \cos a - \sin a}{e^{2fa}} - 2f \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}, \tag{47}$$

или, после введения обозначений для постоянных, уравнения (46) и (47) приводим к следующему виду:

$$\begin{cases} y = a(1 - \frac{b \sin a + \cos a}{e^{ba}}), \\ x = a(\frac{b \cos a - \sin a}{e^{ba}} - b), \end{cases} \tag{48}$$

где  $a = \frac{v_0^2}{(1 + 4f^2)W_{\text{доп}}}$ ;  $b = 2f$ .

Как видно из полученных выражений (48), форма и размеры поверхности колена пневмопровода зависят от таких параметров, как коэффициент трения  $f$  между частицей материала и поверхностью колена, скорости  $v_0$  материала при поступлении на эту поверхность и допустимой величины центростремительного ускорения  $W_{дон}$  при движении материала по ней. Задаваясь конкретными значениями этих параметров можно определить необходимую форму и размеры колена пневмопровода.

### Список библиографических ссылок

1. Поворотный участок трубопровода пневмотранспортной установки: пат. 137277, Рос. Федерация. № 2013142048/11; заявл. 13.09.13; опубл. 10.02.14. Бюл. № 4. – 3 с.
2. Колено трубопровода для транспортирования пылевидных материалов: пат. 80915, Рос. Федерация. № 2008139254/22; заявл. 02.10.2008; опубл. 27.02.2009. Бюл. № 6. – 3 с.
3. Колено стального трубопровода: пат. 2118737, Рос. Федерация. № 96123795/06; заявл. 19.12.96; опубл. 10.09.98. Бюл. № 25. – 3 с.
4. Поворотный участок трубопровода для транспортирования сыпучих материалов: пат. 2085462, Рос. Федерация. № 93052936/11; заявл. 19.12.96; опубл. 27.07.1997. Бюл. № 21. – 3 с.
5. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатой поверхности сельскохозяйственных машин. – Киев: Изд-во украинской академии сельскохозяйственных наук, 1990. – 283 с.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 545 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том (часть) 2.: Учебник для втузов. – М.: Интеграл-Пресс, 2010. – 544 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Лань, 2003. – 832 с.

**Zemdikhanov M.M.** – candidate of technical sciences

E-mail: [mr.minsur@mail.ru](mailto:mr.minsur@mail.ru)

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

### Justification of form of pipeline elbow for transportation the loose materials

#### Resume

The article analyzes the prior art to reduce the wear elbow of pipeline. In this article is theoretically justified form of bending the elbow of pipeline for the transportation of abrasive loose materials to ensure the movement of the material at a constant pressure to the surface of the elbow and thus, ensures uniform wear of the curved portion. This increases the service life elbow of pipeline for transportation of abrasive loose materials. The author obtained the equations that define the shape and size of the elbow depending on the properties of the transported material and parameters pneumatic conveying. The form of bending the elbow of pipeline depends on parameters such as the coefficient of friction between the particle material and the surface of the elbow, material velocity at entry to this surface and the permissible value of the centripetal acceleration during the motion of the material on it. After assigning specific values of these parameters we can determine the required shape and size of the elbow.

**Keywords:** pipeline, particle material, the elbow, the radius of curvature, the equation.

**Reference list**

1. Elbow of pipeline the pneumatic installation: the patent 137277 Russian Federation. № 2013142048/11; it is declared 13.09.13; it is published 10.02.14. The bulletin № 4. – 3 p.
2. Elbow of pipeline for transportation of powdered materials: the patent 80915 Russian Federation. № 2008139254/22; it is declared 19.12.96; it is published 27.02.09. The bulletin № 6. – 3 p.
3. Steel pipeline elbow: the patent 2118737 Russian Federation. № 96123795/06; it is declared 19.12.96; it is published 10.09.98. The bulletin № 25. – 3 p.
4. Elbow of pipeline for transportation of loose materials: the patent 2085462 Russian Federation. № 93052936/11; it is declared 19.12.96; it is published 27.07.97. The bulletin № 21. – 3 p.
5. Vasilenko P.M. The theory of motion of a particle on a rough surface of agricultural machinery. – Kiev: Izd-vo ukrainской akademii sel'skokhozyaystvennykh nauk, 1990. – 283 p.
6. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. Handbook of mathematics for engineers and students of technical colleges. – M.: Nauka, 1986. – 545 p.
7. Piskunov N.S. Differential and integral calculus. Tom (part) 2.: Textbook for technical colleges. – M.: Integral Press, 2010. – 544 p.
8. Korn G., Korn T. Handbook of mathematics for scientists and engineers. – M.: Lan, 2003. – 832 p.