

УДК 536.24:532.52

Володин Ю.Г. – кандидат технических наук, доцентE-mail: yu.g.volodin@mail.ru**Марфина О.П.** – кандидат технических наукE-mail: o_marfina@mail.ru**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

О границах применения математической модели нестационарного течения несжимаемого газа в осесимметричных каналах**Аннотация**

Для математической модели турбулентного пограничного слоя, разработанной с позиций параметрических методов и описывающей нестационарное неизотермическое течение несжимаемого газа в осесимметричных каналах с теплообменом, определены границы применения. В рассмотренной математической модели уравнения движения, неразрывности и энергии, замыкающие соотношения для коэффициентов трения и теплоотдачи при соответствующих краевых условиях позволяют выполнить анализ влияния конкретного воздействия на процессы переноса с последующим синтезом явлений – изучением их совместного воздействия и установления корреляционных связей между ними.

Ключевые слова: границы, нестационарность, неизотермичность, математическая модель, газовый поток, осесимметричный канал.

Математическое моделирование физических явлений является весьма перспективным направлением научных исследований. Однако не всегда та или иная математическая модель адекватно описывает физическое явление. Причины здесь разные. Использование математических моделей для описания физических явлений ограничивается рамками принимаемых допущений, что в итоге описывается границами применения рассматриваемой математической модели.

В работах [1, 2] приведена математическая модель нестационарного неизотермического течения несжимаемого газа в осесимметричных каналах и проведено численное исследование нестационарного неизотермического течения несжимаемого газа в условиях внутренней задачи. На основе выполненных численного исследования и физического эксперимента [2, 3] определим границы применимости приведенной математической модели.

При выполнении численного исследования показано, что ускорение потока приводит к увеличению, а замедление – к уменьшению относительного коэффициента трения Y_S . Причем, $\bar{\tau}_{w0}^*$ – обобщающий параметр трения, аккумулирует воздействие продольного градиента давления и нестационарности, т. е. ускорение или замедление потока, обусловленные изменением геометрии обтекаемой поверхности либо переменными во времени параметрами потока, формирующими один из видов нестационарности. Известно, что в диффузорах при больших углах раскрытия происходит отрыв пограничного слоя.

Согласно [4] обобщающий параметр трения равен:

$$\bar{\tau}_{w0}^* = - \frac{2\delta}{C_f} \times \frac{1}{w_0^2} \frac{\nabla w_0}{\nabla t} - \frac{2\delta}{C_f} \times \frac{1}{w_0} \frac{\nabla w_0}{\nabla x} - \frac{\delta}{r_0} = z + l - \frac{\delta}{r_0}. \quad (1)$$

При отрыве пограничного слоя:

$$\bar{\tau}_{w0}^* = 2Y_S + l_0 + z_0 - \frac{d}{r_0} Y_S. \quad (2)$$

Здесь l_0 – параметр продольного градиента давления, z_0 – параметр динамической нестационарности. В точке отрыва величина Y_S стремится к нулю и $\bar{\tau}_{w0}^* \rightarrow \bar{\tau}_{w0cr}^*$. В рассматриваемом случае нестационарного течения отрыв потока может произойти не за счет пространственного изменения характера течения обтекаемой поверхности, а в

результате временных его эволюций. Действительно, величина параметра продольного градиента давления l_0 в конфузорном канале и на начальном участке цилиндрического канала отрицательна всегда, так как $\frac{\tau_{w0}}{\tau_x} > 0$. В тоже время параметр динамической нестационарности z_0 при $\frac{\tau_{w0}}{\tau_t} < 0$ положителен. Может сложиться ситуация, когда $|z_0|$ много больше $|l_0|$ и параметр $\tau_{w0} \otimes \tau_{w0kp}$, т.е. причиной отрыва будет являться нестационарность. Тогда проинтегрируем выражение (3):

$$\sqrt{\frac{C_f}{C_{f0}}} = \sqrt{Y_s} = \frac{2 \chi (1 - w_1) \ln \xi_{10}}{(1 - w_{10}) \chi [1 + \sqrt{f_h + (1 - f_h) w_1}] A} \quad (3)$$

Здесь $A = \int_{x_1}^1 \frac{\tau_x}{\tau_0} \frac{dx}{x}$, w_{10} и x_{10} значения относительной скорости на границе вязкого

подслоя и его толщина в стандартных условиях. Из выражения (3) видно, что конечная реализация зависимости связана с распределением касательных напряжений (4-5) [4, 5]:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{\tau_{w0} \chi}{Y_s (1 + 2\chi)}; \tau_{w0} \geq 0; \quad (4)$$

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{(Y_s + \tau_{w0}) \chi}{(1 - \chi) Y_s} - \frac{(Y_s + \tau_{w0}) \chi^d}{(1 - \chi) Y_s}; \tau_{w0} \leq 0, \quad (5)$$

Соотношения (3)-(5) совместно с зависимостями для относительных толщин вязкого подслоя и скорости на его границе [4]:

$$\xi_{10} = 11,6 \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \text{Re}_w^{**} \frac{\delta}{\delta^{**}} \sqrt{\frac{C_f}{2} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \frac{\xi_{10}}{2} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0}^{-1}} \quad (6)$$

и

$$w_1 = \text{Re}_w^{**} \frac{d}{\delta^{**}} \frac{C_f}{2} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \frac{x_{10}}{2} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \quad (7)$$

образуют систему уравнений, которая при заданных значениях Re_w^{**} , τ_{w0} , φ_h и $\frac{d}{r_0}$

позволяет рассчитать эволюцию относительного коэффициента трения.

Разрешая полученный результат относительно τ_{w0kp} при $Y_a = 0$, находим:

$$\tau_{w0kp} = 2 \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \frac{2 \chi (1 - \omega_{1kp})}{[1 + \sqrt{\varphi_h + (1 - \varphi_h) \omega_{1kp}}] \sqrt{C_{f0}/2} \ln |C| \frac{\tau_{w0}}{\tau_0}^{-2}}, \quad (8)$$

где

$$C = 2 \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} + \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \left(\sqrt{1 + 2 \xi_{1kp}} - \sqrt{2 \xi_{1kp}} \right)^2}, \quad (9)$$

$$w_{1kp} = \text{Re}_w^{**} \frac{d}{\delta^{**}} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \frac{C_{f0}}{2} \frac{x_{1kp}^2}{2} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0}, \quad (10)$$

$$\xi_{1kp} = \sqrt{\frac{2 \text{Re}_w^{**} \frac{d}{\delta^{**}} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \frac{x_{1kp}^2}{2}}{\frac{C_{f0}}{2} \frac{\tau_{w0}}{\tau_0}}}, \quad (11)$$

$$\frac{\tau_{w0}}{\tau_0} \frac{d}{\delta^{**}} = \frac{1}{r_0} w (1 - w) \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} - \frac{y}{r_0} \cos \alpha \frac{\tau_{w0}}{\tau_0} dx, \quad (12)$$

$$w_{икр} = 1 + \frac{1 - \varphi_h C_{f0}}{2c^2} D_{икр} - \sqrt{\frac{\tau_{w0кр}}{2} \left(\frac{\tau_{w0кр}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\tau_{w0кр}^2}{\rho}} \left(\sqrt{1 + 2x_i} - \sqrt{2x_i} \right)^2 \right)} \cdot \left(\frac{\tau_{w0кр}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\tau_{w0кр}^2}{\rho}} \right) - 1 + \frac{\varphi_h C_{f0}}{c^2} D_{икр}, \quad (13)$$

$$D_{икр} = \sqrt{\frac{\tau_{w0кр}}{2}} \ln \left| \frac{\tau_{w0кр}}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\tau_{w0кр}^2}{\rho}} \left(\sqrt{1 + 2x_i} - \sqrt{2x_i} \right)^2 \right|. \quad (14)$$

Решая (8)-(14), получим критическую величину параметра трения. Результаты решения аппроксимированы в виде логарифмической зависимости для случая $\varphi_h = 1$ и $Re^{**} > 500$.

$$\tau_{w0кр} = 23,21 \ln Re^{**} - 50,34, \quad (15)$$

$$w_{икр} = x_{икр}^{0,43}. \quad (16)$$

На рис. 1 приведены результаты математического эксперимента по определению критического параметра трения в функции числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса, с увеличением величины которого устойчивость потока к внешнему возмущению возрастает, и величина параметра трения увеличивается. Увеличивается величина параметра трения и с уменьшением энтальпийного фактора f_h . Отсюда следует, что путем охлаждения поверхности отрыв потока можно затянуть.

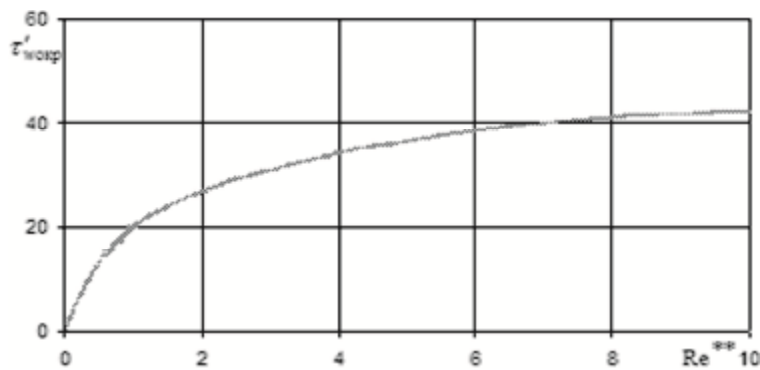


Рис. 1. Зависимость критического параметра трения в функции числа Re^{**}

Ускорение потока возникает при изменении геометрии обтекаемой поверхности (например, конфузур), при изменении во времени скорости потока (или расхода), при резком увеличении температуры рабочего тела и т. д. Известно, что при сильном ускорении потока формируется явление ламинаризации турбулентного пограничного слоя (ТПС). Количественная оценка границ явления ламинаризации чаще выполняется по

величине параметра ускорения $K = - \frac{v}{w_0^2} \times \frac{\partial w_0}{\partial x}$, который иногда представляют в виде

$$K = - \frac{v}{\rho_0 w_0^3} \times \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (17)$$

Используя уравнение движения, записанное для области потенциального ядра:

$$r_0 \frac{\partial w_0}{\partial t} + r_0 w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (18)$$

приведем параметр K к виду:

$$K = - \frac{v}{w_0^2} \times \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{v}{w_0^3} \times \frac{\partial w_0}{\partial t}. \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что причиной ламинаризации ТПС может являться не только пространственное ускорение, но и временное – нестационарность.

С другой стороны параметр трения τ_{w0} , как обобщающий параметр, учитывающий влияние продольного градиента давления (пространственное ускорение) через параметр

Γ и влияние динамической нестационарности (временное ускорение) через параметр z , согласно [4] имеет вид:

$$\tau_{\phi} = 1 + z = - \frac{2\delta}{C_f} \frac{1}{w_0} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{2\delta}{C_f} \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial w_0}{\partial t}. \quad (20)$$

В правых половинах выражений (19 и 20) присутствуют похожие слагаемые. Перепишем (19) в виде:

$$K = - \frac{v}{w_0} \frac{\partial I}{\partial w_0} \times \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{I}{w_0^2} \times \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (21)$$

и (20) в виде:

$$\tau_{\phi} = - \frac{2\delta}{C_f} \frac{\partial I}{\partial w_0} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial w_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (22)$$

Слагаемые в скобках выражений (21 и 22) имеют одинаковый вид, тогда:

$$K \frac{w_0}{v} = \tau'_{\phi} \frac{C_f}{2\delta}, \quad (23)$$

или

$$K = \tau'_{\phi} \frac{v}{\delta w_0} \frac{C_f}{z} = \tau'_{\phi} \frac{1}{Re_{\delta}} \frac{C_f}{z}, \quad (24)$$

где $Re_{\delta} = \frac{\delta w_0}{v}$. Таким образом, параметр ускорения K является функцией обобщающего параметра трения τ'_{ϕ} , числа Re_{δ} и коэффициента трения C_f . С позиций параметрической теории ТПС параметр трения τ'_{ϕ} является обобщающей функцией, позволяющей учитывать воздействие различных дестабилизирующих факторов (нестационарность, продольный градиент давления и др.) через соответствующие факторам параметры.

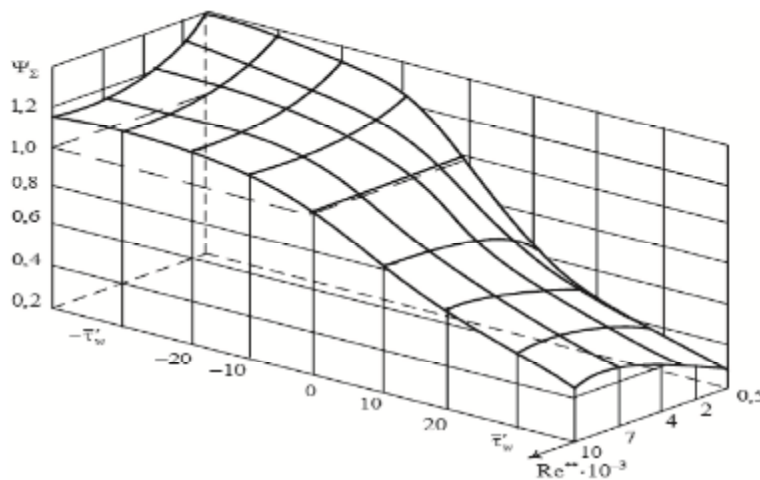


Рис. 2. Влияние параметра трения τ'_{ϕ} и числа Re^{**} на относительный коэффициент трения в изотермических условиях

В работах [6, 7, 8], показано влияние обобщающего параметра трения τ'_{ϕ} на характеристики динамического пограничного слоя и коэффициент трения, на характеристики теплового пограничного слоя и коэффициент теплоотдачи, а также влияние изменения величин чисел Re , Re^{**} , Re_{δ}^{**} . На рис. 2 показаны такие зависимости.

В ряде работ, посвященных ламинаризации ТПС, указываются числовые значения параметра ускорения K , определяющие границу области ламинаризации, а в (25) приводится обобщающая зависимость:

$$K_{cp} = 1,2 \cdot 10^{-6} + 1,1 \cdot 10^{-10} \cdot Re^{**} + 10^{-13} (Re^{**})^2. \quad (25)$$

Переходя от параметра K к параметру $\bar{\tau}_w'$ имеем:

$$\bar{\tau}_w' = \frac{K Re_B}{C_{f0}/2}. \quad (26)$$

Если подставим в (26) значения критической величины K , то получим границу области ламинаризации ТПС на поверхности $\Psi = \frac{C_f}{C_{f0}} = f(\bar{\tau}_w', Re_B)$.

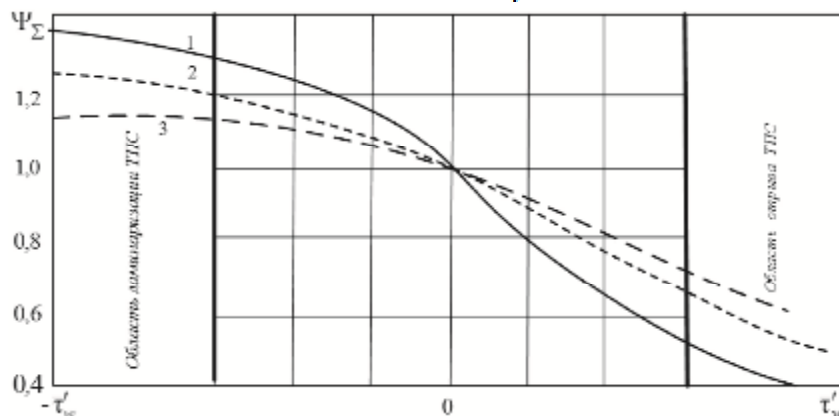


Рис. 3. Зависимость относительного коэффициента трения Ψ_S от обобщающего параметра трения $\bar{\tau}_w'$ и характерного числа Re^{**} : 1 – $Re^{**}=400$, 2 – $Re^{**}=2000$, 3 – $Re^{**}=4000$

Здесь C_{f0} определяется как $C_{f0} = \frac{0,0256}{Re^{**0,25}}$. Из проведенного анализа следует, что параметр ускорения K является характеристикой динамического пограничного слоя и обозначим его через $K_{дин}$.

На рис. 3 показана зависимость относительного коэффициента трения Ψ_S от обобщающего параметра трения $\bar{\tau}_w'$ и характерного числа Re^{**} , а также нанесены условные границы области отрыва ТПС и области ламинаризации ТПС. Граница области отрыва ТПС определяется по выражению (8), а граница области ламинаризации ТПС по выражению (26).

Вывод

Подводя итог, следует отметить, что приведенная в [1, 2] математическая модель адекватно описывающая нестационарное неизотермическое течение с теплообменом несжимаемого газа в осесимметричных каналах в пределах, которые определяются явлением отрыва ТПС при замедлении потока и явлением ламинаризации при ускорении потока. Для определения границ применимости данной математической модели приводятся соответствующие выражения, констатирующие одно (8) либо другое (26) явления.

Список библиографических ссылок

1. Марфина О.П., Володин Ю.Г. Математическое моделирование нестационарного течения несжимаемого газа с теплообменом в осесимметричных каналах технологического оборудования. // Известия КГАСУ, 2014, № 1. – С. 155-163.
2. Володин Ю.Г., Марфина О.П. Математическое моделирование пусковых режимов энергетических установок. – СПб.: Изд. «Инфо-да», 2007. – 128 с.
3. Володин Ю.Г., Яковлев М.В. Нестационарность и ламинаризация ТПС в пусковых режимах энергетических установок. – СПб.: Изд. «Инфо-да». 2008. – 160 с.
4. Фафурин А.В. Законы трения и теплоотдачи в турбулентном пограничном слое // Тепло- и массообмен в двигателях летательных аппаратов, 1979. – Казань, Вып. 2. – С. 62-69.
5. Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. – Л.: Судостроение, 1973. – 256 с.

6. Володин Ю.Г., Марфина О.П. Расчет коэффициентов трения и теплоотдачи при нестационарном неизотермическом течении несжимаемого газа в осесимметричных каналах // Изв. ВУЗов. Машиностроение, 2007, № 3. – С. 21-26.
7. Володин Ю.Г., Марфина О.П. Расчет нестационарного неизотермического течения несжимаемого газа в осесимметричных каналах энергетических установок // Изв. ВУЗов: Машиностроение, 2007, № 5. – С. 39-42.
8. Володин Ю.Г. Исследование теплообмена при пуске энергоустановки. // Теплоэнергетика, 2007, № 5. – С. 61-63.
9. Нэш-Уэббер, Оутс. Инженерный метод расчета ламинаризации течения в сопле // Теоретические основы инженерных расчетов. Сер. Д., 1972, Т. 94, № 4. – С. 205-213.

Volodin Yu.G. – candidate of technical sciences, associate professor

E-mail: yu.g.volodin@mail.ru

Marfina O.P. – candidate of technical sciences

E-mail: o_marfina@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

On the limits of the application of a mathematical model of unsteady compressible gas flow in axisymmetric channels

Resume

A mathematical modeling of the physical phenomena is very perspective direction of scientific researches. However not always one or another mathematical model describes the physical phenomenon adequately. Reasons are different. The use of mathematical models for description of the physical phenomena is limited to the scopes of the accepted assumptions, that in the total is described by the borders of application of the examined mathematical model. The presented mathematical model of turbulent frontier layer, for that the borders of application are certain, describes the unsteady-state non-isothermal flow of incompressible gas in axle symmetric channels with a heat exchange. Research is built on the basis of numeral decision of non-stationary equalizations of frontier layer with the use of closing correlations for the coefficients of friction and heat emission at corresponding regional.

Keywords: restrictions, unsteady-state, non-isothermal, mathematical model, gaseous flow, axle symmetric canal.

Reference list

1. Marfina O.P., Volodin Yu.G. Mathematical model the unsteady-state current non-compressible gas with heat transfer in the axle symmetric canals of technological equipment. // Izvestiya KGASU, 2014, № 1. – P. 155-163.
2. Volodin YU.G., Marfina O.P. Mathematical modeling of starting regimes at the energy plants. – SPb.: Publishing house «Info-yes», 2007. – 128 p.
3. Volodin Yu.G., Yakovlev M.V. The unsteady-state and laminarization TBL into starting regimes at the energy plants. – SPb.: Publishing house «Info-yes», 2008. – 160 p.
4. Fafurin A.V. Laws friction and heat delivery in the turbulent boundary layer // Heat- and mass exchange in motors of the flying apparatus, 1979. – Kazan, Discharge 2. – P. 62-69.
5. Fedyayevskiy K.K., Ginevskiy A.S., Kolesnikov A.V. Calculation of the turbulent boundary layer of non-compressed liquid. – L.: Ship construction, 1973. – 256 p.
6. Volodin Yu.G., Marfina O.P. Calculation coefficients friction and heat delivery at the unsteady-state non-isothermal current non-compressible gas in the axle symmetric canals. // Izvestiya vuzov. Machine construction, 2007, № 3. – P. 21-26.
7. Volodin Yu.G., Marfina O.P. Calculation the unsteady-state non-isothermal current of non-compressible gas in axle symmetric channels at the energy plants // Izvestiya vuzov. Machine construction, 2007, № 5. – P. 39-42.
8. Volodin Yu.G. Research heat transfer at the start of energy plant // Heat power engineering, 2007, № 5. – P. 61-63.
9. Nesh-Webber, Outs. Engineering method of calculation laminarization current into nozzle // Trans. ASME. Ser. D., 1972, Vol. 94, № 4. – P. 190-198.