УДК 532.5:621.694:519.6
Горская Т.Ю. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: tatyana_gorskaya@mail.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1
Галимянов А.Ф. – кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: anis_59@mail.ru
Казанский (Поволжский) федеральный университет
Адрес организации: 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно-интегральным оператором

Аннотация

В работе представлены результаты теоретического обоснования применения метода Бубнова-Галеркина для нахождения численного решения уравнений с дробными интегралами Римана-Лиувилля. Задана структура численного решения и получена оценка погрешности приближенного решения по метрике энергетического пространства, порожденного оператором дробного интегрирования. Для частного случая дробно-интегрального уравнения приведена оценка сходимости приближенного решения к точному решению исходной задачи.

Ключевые слова: дробные интегралы Римана-Лиувилля, дробные интегралы Вейля, операторы дробного интегрирования.

Введение

В настоящее время весьма активно проводится изучение уравнений с дробно-интегральными операторами. Существует ряд теоретических и прикладных задач, которые приводят к необходимости решения уравнений с операторами дробного интегрирования. К таким задачам относятся задачи диффузии, электрохимических процессов. Данные задачи, как правило, точно не решаются, поэтому весьма остро стоят вопросы разработки и применения приближенных методов решения с последующим их теоретическим обоснованием для этих уравнений. Отметим, что в последнее время в научной литературе появляются работы, в которых предложены численные методы для некоторых классов уравнений (см., напр. [1-7]). Однако, несмотря на достигнутый успех в этом направлении, остается открытым вопрос теоретического обоснования применения приближенных методов для более общего класса подобных задач.

В работе предлагается обобщенный метод Бубнова-Галеркина для нахождения приближенного решения дробно-интегральных уравнений. Получены оценки сходимости приближенного решения к точному решению по метрике энергетического пространства, порожденного дробно-интегральным оператором. Построенный вычислительный метод проиллюстрирован на частном примере и приведена оценка метода.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение:

$$I^{(\alpha)}u + Tu = f, u, f \in L_2[0,2\pi], \tag{1}$$

где $I^{(\alpha)} = \frac{\left(I_+^{(\alpha)} + I_-^{(\alpha)}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$ выражается с помощью операторов дробного интегрирования $I_\pm^{(\alpha)}$, определяемых для дробных интегралов Вейля для функций $\varphi(x) \in L_1(a,b)$, по формулам:

$$\left(I_{a+}^{(\alpha)}\varphi\right)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, x > a, \tag{2}$$

$$\left(I_{b-}^{(\alpha)}\varphi\right)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-б}}, x < b,$$

здесь $\alpha>0$. Интегралы (2) принято называть также дробными интегралами Римана-Лиувилля порядка α, левосторонним и правосторонним, соответственно. u − неизвестная, а f − заданная функции из пространства $L_2[0,2p]$. T − некоторый оператор, для которого $\left(I^{(б)}+T\right)$ − линейный оператор, и, в общем случае неограниченный и не положительно определенный.

Заметим, что обычная форма $I_+^б, I_-^б$ (2) дробного интегрирования по Риману-Лиувиллю оказывается неудобной в теории тригонометрических рядов, имеющих дело с периодическими функциями. Так как дробное интегрирование не обладает свойством переводить периодические функции в периодические. Поэтому, принято пользоваться другим определением дробного интегрирования, предложенным Г.Вейлем, согласно которому, оператор $I^{(б)}$ действует по правилу:

$$I^{(б)}u \sim \sum_{k=-\propto}^{\propto} \frac{u_k}{|k|^б} e^{ikx}. \qquad (3)$$

Здесь u_k − суть коэффициентов Фурье для функции u.

Для оператора (3) справедливы следующие леммы.

Лемма 1. $I^{(б)}$ − положительно определенный оператор.

Доказательство. Известно [8], что $I^{(б)}$ будет положительно определенным оператором, если выполняется условие: $\left(I^{(б)}u,u\right)>0$. Кроме того, система e^{ikx} полна в пространстве $L_2[0,2p]$, то справедливо:

$$\left(I^{(б)}u,u\right)=\sum_{k=-\propto}^{\propto}\left(I^{(б)}u,e^{ikx}\right)\left(u,e^{ikx}\right)=\sum_{k=-\propto}^{\propto}\frac{u_k^2}{|k|^б}>0.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 2. $I^{(б)}$ − симметричный оператор.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $I_+^б u$ и v для любых $u,v\in L_2[0,2p]$:

$$\left(I_+^б u,v\right)=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{1}{2p}\int_0^{2p}u(x-t)\sum_{k=-\propto}^{\propto}\frac{e^{ikx}}{(ik)^б}dt\,v(x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{1}{2p}\int_x^{x-2p}u(t)\sum_{k=-\propto}^{\propto}\frac{e^{ik(x-t)}}{(ik)^б}dt\,v(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\frac{1}{2p}\int_0^{2p}v(x)\sum_{k=-\propto}^{\propto}\frac{e^{ikx}}{(-ik)^б}dx\,u(t)dt=\left(u,I_-^б v\right).$$

Аналогично для $I_-^б$ имеем: $\left(I_-^б u,v\right)=\left(u,I_+^б v\right)$.

Так как оператор $I^{(б)}$ является суммой симметричных операторов $I_+^б$ и $I_-^б$, то он является также симметричным оператором.

Введем скалярное произведение и норму:

$$[u,v]=\left(I^{(б)}u,v\right),[u]=\left(I^{(б)}u,u\right)^{1/2}.$$

Скалярное произведение будет иметь вид:

$$[u,v]=\left(I^{(б)}u,v\right)=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}\sum_{k=-\propto}^{\propto}\frac{u_k e^{ikx}}{|k|^б}v(x)dx=\sum_{k=-\propto}^{\propto}\frac{u_k v_k}{|k|^б}$$

Пополняя $D(I^{(б)})$ по введенной норме, получим энергетическое пространство, обозначим которое, согласно [8], через H_I.

Умножая исходное уравнение (1) на произвольную функцию $v\in D(I^{(б)})$, получим следующее уравнение:

$$[u,v]+(Tu,v)=(f,v). \qquad (4)$$

Уравнение (4) допускает обобщённую постановку задачи. Обобщенным решением уравнения (1) назовем функцию $u\in H_I$, удовлетворяющую уравнению (4) для любой функции $v\in H_I$.

Метод Бубнова-Галеркина

Согласно методу Бубнова-Галеркина, в энергетическом пространстве H_I выбирается система базисных функций $\varphi_j, j = 1..N$. Приближенное решение ищется в виде полинома по выбранной системе базисных функций в виде:

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j. \qquad (5)$$

Неизвестные коэффициенты a_j определяются из системы уравнений вида:

$$[u_N, \varphi_k] + (Tu_N, \varphi_k) = (f, \varphi_k), k = 1 \dots N. \qquad (6)$$

Учитывая представление (5) и линейность введенного и обыкновенного скалярных произведений, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \left[\varphi_j, \varphi_k\right] + \sum_{j=1}^{N} a_j \left(T\varphi_j, \varphi_k\right) = (f, \varphi_k), k = 1 \dots N. \qquad (7)$$

Теорема 1. Пусть 1) уравнение (1) имеет единственное решение при данной правой части. 2) Форма $L(u, v) = [u, v] + (Tu, v)$ является $H_I -$ определенной и $H_I -$ ограниченной, т.е. выполняются условия:

$$L(u, u) \geq \gamma_0^2 [u]^2, L(u, v) \leq \gamma_1^2 [u][v], \gamma_0, \gamma_1 \equiv const.$$

3) Последовательность подпространств $H_N -$ линейных оболочек функций $\varphi_j, j = 1..N -$ является предельно плотной в H_I.

Тогда при любом конечном N система (6) однозначно разрешима и приближенное решение u_N сходится к точному решению u при $N \to \propto$ по метрике $[\cdot]$ и справедлива оценка погрешности:

$$[u - u_N] \leq ce(u, N),$$

где $e(u, N) -$ заданная функция от N (оценка погрешности аппроксимации), удовлетворяющая неравенству:

$$\min_{c_j} \left\| I^{(\sigma)} \left(u - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j \right) \right\| \leq e(u, N).$$

Частный случай

Рассмотрим частный случай уравнения (1). В качестве оператора T возьмем следующий интегральный оператор:

$$(Tu)(x) = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} h(t, x) u(t) dt.$$

Будем считать, что он обладает необходимыми свойствами.

В качестве базисных функций выберем $e^{ikx}, k = -N..N$. Приближенное решение будем искать в виде:

$$u_N = \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{ijx}.$$

Тогда слагаемые в системе (7) преобразуются в виде:

$$\sum_{j=-N}^{N} a_j \left[\varphi_j, \varphi_k\right] = \frac{a_k}{|k|^{\sigma}},$$

$$\sum_{j=-N}^{N} a_j \left(T\varphi_j, \varphi_k\right) = \sum_{j=-N}^{N} a_j (h_j, \varphi_k) = \sum_{j=-N}^{N} a_j h_{-j,k}.$$

Следовательно, система (7) запишется как:

$$\frac{a_k}{|k|^{\sigma}} + \sum_{j=-N}^{N} a_j h_{-j,k} = f_k, k = 1..N.$$

Что будет соответствовать матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{|N|^{\sigma}} + h_{N,-N} \dots & h_{j,-N} & \dots h_{-N,-N} \\ h_{k,-N} & \dots \frac{1}{|N|^{\sigma}} + h_{k,-N} & \dots h_{k,-N} \\ h_{N,N} \ \dots & h_{j,N} & \dots \frac{1}{|N|^{\sigma}} + h_{-N,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{-N} \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{-N} \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Оценка погрешности в этом случае примет вид:

$$\min_{c_j} \left\| I^{(\delta)} \left(u - \sum_{j=1}^{N} c_j e^{ijx} \right) \right\| \leq e(u, N).$$

Список библиографических ссылок

1. Marinov T.M., Ramirez N., Santamaria F. Fractional integration toolbox // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013. V. 16, № 3. – P. 670-681.
2. Barton T.A., Purnaras I.K. *Lp*-solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl., 2012, № 386. – P**.** 830-841.
3. Zhu L., Fan Q. Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013, № 18. – P. 1203-1213.
4. Ma X., Huang X. Ma, Huang C. Numerical solution of fractional integro-differential equations by a hybrid collocation method // Applied Mathematics and Computation, 2013, № 219. – P. 6750-6760.
5. Saeed R. K., Ahmed C. Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method // Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2008, V. 2, №. 1. – P. 114-124.
6. Горская Т.Ю., Ожегова А.В. О сходимости проекционного метода для уравнения задачи движения // Известия КГАСУ, 2013, 2(24). – С. 112-126.
7. Галимянов А.Ф., Сафиуллина Д.Э. Квадратурный метод решения интегрального уравнения смешанного типа. // Изв. Вузов. Математика, 2009, № 12. – С. 22-27.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

Gorskaya T.Yu. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: tatyana_gorskaya@mail.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1
Galimyanov A.F. – candidate of physical-mathematical sciences, associate professor
E-mail: anis_59@mail.ru
Kazan (Volga) Federal University
The organization address: 420008, Russia, Kazan, Kremlevskaya st., 18

The generalized Bubnov-Galerkina's method for the equations with the fractional and integrated operator

Resume

Now studying of the equations with fractional and integrated operators is very actively carried out. There is a number of theoretical and applied tasks which result in need of the solution of the equations with operators of fractional integration. Problems of diffusion, electrochemical processes belong to such tasks. These problems, as a rule, precisely aren't solved therefore very are particularly acute questions of development and application of approximate methods of the decision with the subsequent their theoretical justification for these equations.

In work Bubnova-Galerkin's generalized method for finding of the approximate solution of the fractional and integrated equations is offered. The type of the numerical decision is defined and estimates of convergence of the approximate decision to the exact decision about metrics of the power space made by the fractional and integrated operator are received. The constructed computing method is illustrated on a private example, and the assessment of a method is given.

Keywords: Rimana-Liouville's fractional integrals, Veyl's fractional integrals, operators of fractional integration.

Reference list

1. Marinov T.M., Ramirez N., Santamaria F. Fractional integration toolbox // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013, V. 16, № 3. – P. 670-681.
2. Barton T.A., Purnaras I.K. *Lp*-solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl., 2012, № 386. – P**.** 830-841.
3. Zhu L., Fan Q. Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013, № 18. – P. 1203-1213.
4. Ma X., Huang X. Ma, Huang C. Numerical solution of fractional integro-differential equations by a hybrid collocation method // Applied Mathematics and Computation, 2013, № 219. – P. 6750-6760.
5. Saeed R. K., Ahmed C. Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method // Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2008, V. 2, № 1. – P. 114-124.
6. Gorskaya T.Ur., Ozhegova A.V. On the convergence of the projection method for an equation of the goals of the movement // News of the KSUAE, 2013, № 2 (24). – P. 112-126.
7. Galimyanov A.F., Saifullina D.E. Quadrature method for solving integral equations of mixed type // Math. Universities. Mathematics, 2009, № 12. – P. 22-27.
8. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction in grid projection methods. – M.: Science, 1981. – 416 p.