

Туйсина Е.Б. – студент

E-mail: katerina.tuysina@yandex.ru

Каюмов Р.А. – доктор физико-математических наук, профессор

E-mail: kayumov@gambler.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Расчет двутавровой балки с трещиной, находящейся под действием неравномерной циклической нагрузки

Аннотация

Повышение эксплуатационной надежности строительных конструкций при снижении их материалоемкости является важнейшим направлением ресурсосберегающих технологий.

Сложность прогнозирования поведения конструкций в конкретных зданиях при циклической нагрузке определяется многими факторами: геометрическими характеристиками сечения, схемой циклического нагружения, величиной амплитуды, природой материала и др. Все они оказывают влияние на закономерности зарождения и распространение усталостных трещин

Рассмотрена шарнирно опертая двутавровая балка. На уровне центра тяжести сечения имеется малый технологический продольный разрез, который можно рассматривать как продольную трещину. Считается, что балка разрушается в момент достижения трещиной ее критической величины. Изучается зависимость долговечности конструкции от амплитуды нагрузки, от начальной длины трещины. Исследуется возможность замены неравномерной циклической нагрузки, действующей на двутавровую балку, эквивалентной равномерной циклической нагрузкой.

Ключевые слова: циклическая нагрузка, трещина, долговечность, ресурс конструкции.

Рассмотрим шарнирно опертую двутавровую балку, в середине сечения которой имеется малый технологический разрез (рис. 1). При данной постановке задачи, последний можно рассматривать как малую продольную трещину, длина которой будет увеличиваться под действием циклических нагрузок.

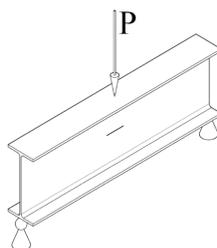


Рис. 1. Двутавровая балка с технологическим продольным разрезом на уровне центра тяжести поперечного сечения, нагруженная вертикальной сосредоточенной силой P

На балку действует вертикальная сосредоточенная сила P , значение которой изменяются по закону, представленному на рис. 2.

Поскольку в середине поперечного сечения нормальные напряжения равны нулю, развитие трещины будет обуславливаться действием касательных напряжений. Найдем максимальное значение касательных напряжений в области расположения трещины:

$$\tau_{max} = \frac{P_0 \cdot S_x^{полусеч.}}{d \cdot J_x} \quad (1)$$

Поскольку трещина находится в середине поперечного сечения, то в (1) d будет равно толщине стенки двутавра, Sx – статическому моменту полусечения, $P_0 = P_{max}/2$ – половине максимального значения нагрузки.

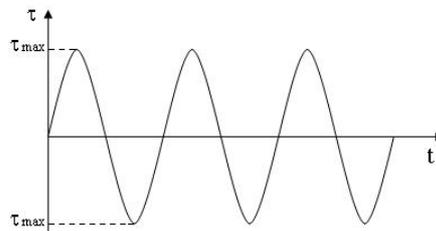


Рис. 2. Изменение касательных напряжений в середине сечения рассматриваемой балки с течением времени

Размах напряжений будет равен $\Delta\tau = 2\tau_{max}$. Скорость подрастания трещины тем больше, чем больше размах напряжения (рис. 2) и чем больше начальная длина трещины. Этот закон подрастания трещины аналитически можно записать в виде (2):

$$\dot{b} = K \cdot (\Delta\tau \cdot \sqrt{b})^m, \quad (2)$$

где b – длина трещины в данный момент времени, $\dot{b} = \frac{db}{dt}$ – скорость подрастания трещины, K, m – механические характеристики материала балки.

Решением дифференциального уравнения (2) будет выражение:

$$\frac{b^{1-\frac{m}{2}}}{1-\frac{m}{2}} = K \cdot (\Delta\tau)^m \cdot t + C \quad (3)$$

Константу C находим из условия, что в начальный момент трещина имеет длину $b_{нач}$, тогда:

$$C = \frac{b_{нач}^{1-\frac{m}{2}}}{1-\frac{m}{2}}.$$

Из (3) получаем зависимость длины трещины от времени:

$$b^{mek} = \left[C \cdot \left(1 - \frac{m}{2}\right) + K \cdot (\Delta\tau)^m \cdot t \cdot \left(1 - \frac{m}{2}\right) \right]^{1-\frac{m}{2}}. \quad (4)$$

Согласно критерию Гриффитса длина трещины, при которой начинается разрушение конструкции, определяется соотношением:

$$\tau = \tau_{max} = \sqrt{\frac{G \cdot a}{b}}, \quad (5)$$

где G – модуль сдвига, a и b – константы материала.

Тогда в момент разрушения длина трещины будет равна:

$$b = b^* = (\tau_{max})^{-2} \cdot G \cdot a. \quad (6)$$

Подставим критическую длину трещины b^* в (4) вместо b^{mek} :

$$b^* = \left[b_{нач}^{1-\frac{m}{2}} + K \cdot (\Delta\tau)^m \cdot t^* \cdot \left(1 - \frac{m}{2}\right) \right]^{1-\frac{m}{2}}. \quad (7)$$

Отсюда получаем уравнение для отыскания времени разрушения t^* (ресурса двутавровой балки):

$$t^* = \frac{(b^*)^{1-\frac{m}{2}} - b_{нач}^{1-\frac{m}{2}}}{K \cdot (\Delta\tau)^m \left(1 - \frac{m}{2}\right)}. \quad (8)$$

Допустим, что материал балки имеет следующие характеристики:

$$K = 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{см}}{\text{цикл}} \cdot \left(\frac{\text{см}^2}{\text{кН}} \right)^m, \quad m = 2,7, \quad a = 0,1686 \frac{\text{кН}}{\text{см}}, \quad G = 8,7 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2.$$

Геометрические характеристики поперечного сечения:

$$S_x = 708 \text{ см}^3, \quad J_x = 27696 \text{ см}^4, \quad d = 0,9 \text{ см}.$$

Рассмотрим зависимости t^* от амплитуды нагрузки и начальной длины трещины.

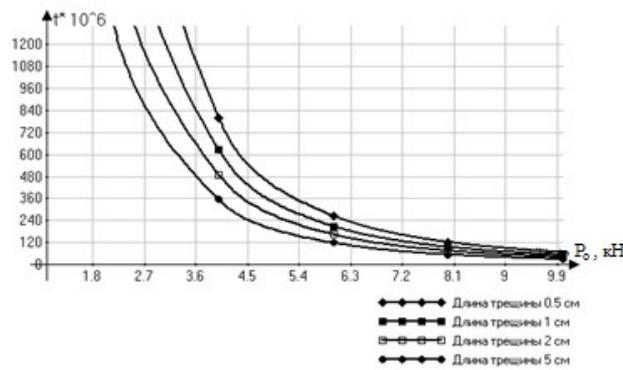


Рис. 3. Зависимость ресурса конструкции от амплитуды нагрузки

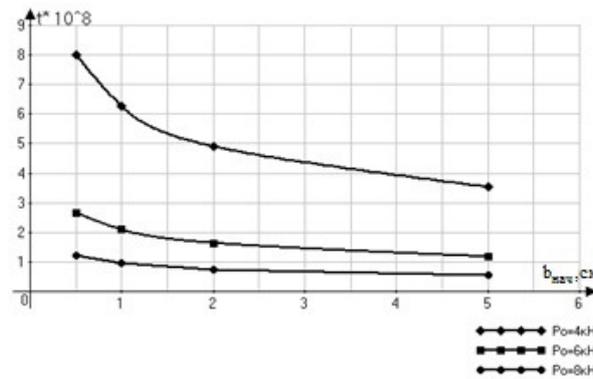


Рис. 4. Зависимость ресурса конструкции от начальной длины продольного разреза (трещины)

Как видно из рис. 4, при большой начальной длине продольного разреза (трещины) ресурс балки почти линейно зависит от этой длины.

Рассмотрим неравномерную циклическую нагрузку, изображенную на рис. 5. Пусть в одном периоде имеется n максимумов по нагрузке (на рис. 5, например, $n=4$)

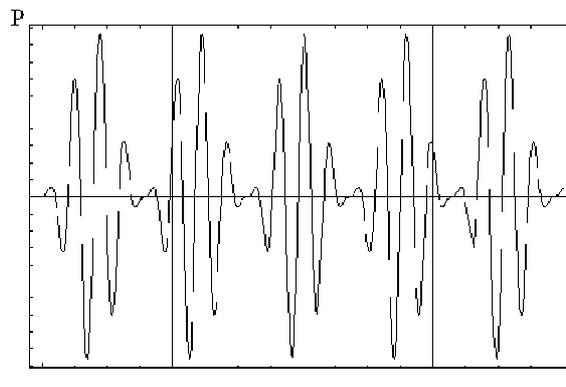


Рис. 5. Неравномерная циклическая нагрузка

Рассмотрим возможность замены амплитуд нагрузок, входящих в один период (большой цикл), их среднеарифметическим значением (9):

$$P_0 = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{n}. \quad (9)$$

Ввиду большого числа больших циклов, будем считать, что разрушение образца происходит по истечении целого числа циклов. По линейной теории накопления повреждений, введем удельный параметр повреждений Ω ($0 \leq \Omega \leq 1$), накопленных балкой при циклическом нагружении. Т. к. разрушение происходит через целое число циклов, то все максимальные τ_i будут действовать на образец одинаковое количество времени.

Найдем повреждения от каждого τ_i :

$$\frac{\Delta\Omega_i}{\Omega} = \frac{\Delta t_i}{t_i^*}, \quad (10)$$

здесь Δt_i – время действия нагрузки с амплитудой τ_i .

За время Δt_i балка накапливает $\Delta\Omega_i$ повреждений при действии напряжения τ_i . Время до полного разрушения t_i^* будет соответствовать значению $\Omega=1$.

Тогда из (10) находим:

$$\Delta\Omega_i = \frac{\Delta t_i}{t_i^*}; \quad \Omega = \sum_{i=1}^n \Delta\Omega_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta t_i}{t_i^*}. \quad (11)$$

Учитывая, что $\Delta t_i = \Delta t$ для всех i получим условие разрушения:

$$\Omega = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i^*} = 1. \quad (12)$$

Из (12) находим Δt :

$$\Delta t = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i^*}. \quad (13)$$

Тогда время разрушения конструкции будет вычисляться следующим образом:

$$t^* = \Delta t \cdot n. \quad (14)$$

Таким образом, нахождение t^* сводится к решению n задач с равномерной циклической нагрузкой.

Анализируя выражения (13), можно увидеть, что влияние малых амплитуд P_i , которые значительно меньше P_0 , на время разрушения конструкции, входящих в цикл нагружения с амплитудой много меньше среднего значения, будет незначительно, т.к. t^* для них будет велико. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать отношение максимальной амплитуды к среднему значению P_{max}/P_0 .

Рассмотрим численные эксперименты.

Примем, что характеристики материала балки и ее поперечного сечения те же, что и выше. Рассмотрим влияние увеличения максимальной амплитуды цикла P_{max} неравномерной нагрузки на долговечность балки и зависимость долговечности балки от количества волн в одном большом периоде нагружения конструкции. Результаты эксперимента приведены на рис. 6 и рис. 7, соответственно.

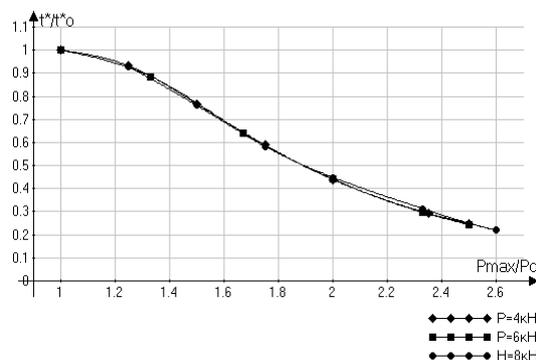


Рис. 6. Зависимость относительного ресурса балки при неравномерной циклической нагрузке при различных средних значениях амплитуды

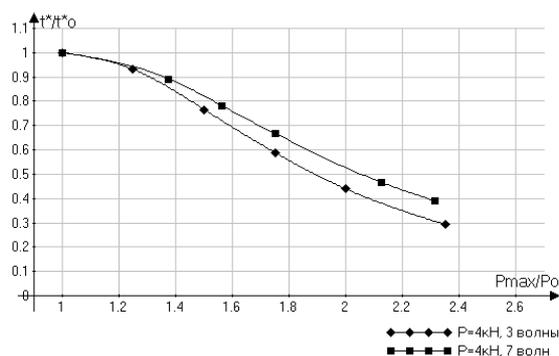


Рис. 7. Зависимость относительного ресурса балки при неравномерной циклической нагрузке при различном количестве волн в одном цикле нагружения

Из графиков видно, во-первых, что, величина нагрузки почти не влияет на относительную величину долговечности t^*/t_0 , а влияет величина P_{max}/P_0 . Во-вторых, на t^*/t_0 существенно влияет количество волн n в периоде. Чем больше их количество, тем выше долговечность конструкции.

Список библиографических ссылок

1. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
2. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение. – 312 с.
3. Брок Д. Основы механики разрушения. – М.: Высш. Школа, 1980. – 368 с.
4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1980. – 640 с.
5. Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф. Расчет цилиндрической оболочки на циклическую прочность // Вестник Казанского технологического университета, 2012, № 9. – С. 162-164.
6. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 310 с.
7. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наукова думка, 1976. – 415 с.
8. Райс Дж. Математические методы в механике разрушения. В кн. Математические основы теории разрушения. Разрушение, т. 2. – М.: Мир, 1975. – С. 205-335.
9. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. – М.: Мир, 1968. – 334 с.

Tuysina E.B. – student

E-mail: katerina.tuysina@yandex.ru

Kayumov R.A. – doctor of physical and mathematical sciences, professor

E-mail: kayumov@rambler.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Calculation of the I-beam under the action of irregular cyclic loading

Resume

Increasing the operational reliability of the structures while reducing their consumption of materials is the most important area of resource-saving technologies. Depending on the kind of processes occurring in the building, its construction can be influenced by cyclic loading.

The complexity of predicting the behavior of structures in concrete buildings under cyclic loading is determined by many factors: the geometric characteristics sectional diagram of cyclic loading, the magnitude of the amplitude, material nature, and others. They all have an impact on patterns of initiation and propagation of fatigue cracks.

Pivotaly supported I-beam is considered. In the center of its cross section a small technological has incision which may be considered as a longitudinal crack. It is believed that the I-beam is destroyed upon reaching its critical crack size. The dependence of durability design of load amplitude, the initial crack size is studied. The possibility to replace the irregular cyclic load by the equivalent uniform cyclic loading are considered.

The following results are obtained: the value of the load has little effect on the relative magnitude of durability, but it affects the value of the ratio of maximum amplitude to the average of all waves and the number of waves in the period.

Keywords: cyclic loading, crack, durability, resource structure.

Reference list

1. Bolotin V.V. Resource machines and structures. – M.: Mashinostroyenie, 1990. – 448 p.
2. Bolotin V.V. Forecasting resource machines and structures. – M.: Mashinostroyenie. – 312 p.
3. Broek D. fundamentals of fracture mechanics. – M.: Vyshaya Shkola, 1980. – 368 p.
4. Cherepanov G.P. Mechanics of brittle fracture. – M.: Nauka, 1980. – 640 p.
5. Kayumov R.A., Tutukov B.F. Calculation of the cylindrical shell on the cyclic strength // Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta, 2012, № 9. – P. 162-164.
6. Kachanov L.M. fundamentals of fracture mechanics. – M.: Nauka, 1974. – 310 p.
7. Pisarenko G.S., Lebedev A.A. Deformation and strength of materials under complex stress state. – Kiev: Naukova Dumka, 1976. – 415 p.
8. Rice J. Mathematical methods in fracture mechanics. In book Matematic fundamentals of the theory of failure is TM: Mir, 1975. – P. 205-335.
9. Siratori M., Miyoshi T., Matsushita H. Computational fracture mechanics. – M.: Mir, 1968. – 334 p.