

УДК 624.012.4-183.2, 624.044:539.384

Соколов Б.С. – доктор технических наук, профессор

E-mail: sokolov@kgasu.ru

Радайкин О.В. – кандидат технических наук, старший преподаватель

E-mail: olegxxii@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1

К расчёту прогибов изгибаемых железобетонных элементов с учётом совместного действия изгибающих моментов и перерезывающих сил с использованием нелинейной деформационной модели

Аннотация

Целью работы ставилось определение прогибов изгибаемых железобетонных элементов с учётом совместного действия изгибающих моментов и перерезывающих сил по нелинейной деформационной модели. Для этого с использованием ПК математического анализа *MathCAD* разработан алгоритм расчёта бетонных и железобетонных балок, учитывающий также схему нагружения, нелинейные свойства бетона и арматуры, а также появление и развитие нормальных трещин. Алгоритм позволяет использовать диаграммы состояния бетона, полученные авторами ранее.

Ключевые слова: железобетон, пролёт среза, изгибающий момент, перерезывающая сила, прогиб.

Перспективность применения нелинейной деформационной модели для расчёта железобетонных конструкций на всех стадиях работы – от начала нагружения вплоть до разрушения – неоднократно отмечалась в статьях авторов [1-5], а также другими исследователями. При этом в подавляющем большинстве случаев расчёт изгибаемых элементов с использованием этой модели ведётся только на действие изгибающих моментов, а перерезывающие силы не учитывают, что принято в СП 63.13330.2012. Однако в некоторых железобетонных конструкциях, например, в подкрановых балках, стропильных конструкциях с подвесным транспортным оборудованием, влияние перерезывающей силы может оказаться определяющим. В связи с этим целью данной работы ставилось определение прогибов изгибаемых железобетонных элементов с учётом совместного действия изгибающих моментов и перерезывающих сил по нелинейной деформационной модели.

В работе [1] жёсткость, по которой вычисляются прогибы, для элементов без предварительного напряжения арматуры определялась в зоне чистого изгиба с использованием трёх видов диаграмм – СП 52-01-2003, EuroCod-2 и [2]. В развитие полученных результатов выполнен расчёт прогибов рассмотренных элементов, но с учётом действия перерезывающих сил:

$$f = f_M + f_Q, \quad (1)$$

$$f_M = \int_0^l \bar{M} \frac{1}{r} dx, \quad (2)$$

$$f_Q = \int_0^l \bar{Q} \gamma_{xy}^{\max} dx. \quad (3)$$

В качестве примера рассмотрена шарнирно опёртая балка, нагруженная двумя сосредоточенными силами, расположенными симметрично относительно середины пролёта (рис. 1). Геометрические и физические характеристики сечения балки приняты аналогичными элементу из работы [1]: размеры сечения $b \times h = 0,2 \times 0,4$ м, длина $l = 3$ м ($l/h = 7,5$), «пролёт среза» – $a = 1$ м ($al/h = 2,5$), бетона В25, два различных варианта армирования: $2\varnothing 18$ А400 ($\mu = 0,63$ %) и $3\varnothing 28$ А400 ($\mu = 2,31$ %). В «пролёте среза» балки проведено два сечения – «а-а» и «б-б» – соответственно на участке без трещин и на участке с трещинами. Схема деформаций и напряжений для этих сечений показана на рис. 2, что основано на анализе напряжённо-деформированного состояния изгибаемых

конструкций в «пролёте среза», выполненном в работе [5]. При этом влияние наклонных трещин в приопорной зоне в данной статье не рассматривается. Этому вопросу будут посвящены дальнейшие публикации.

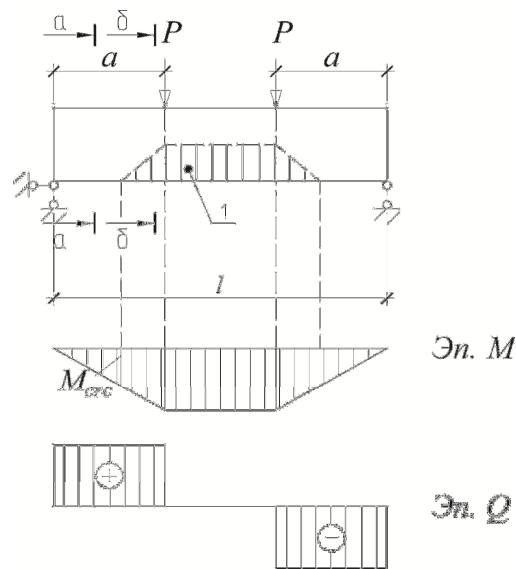


Рис. 1. Схема нагружения балки и зона развития трещин (1)

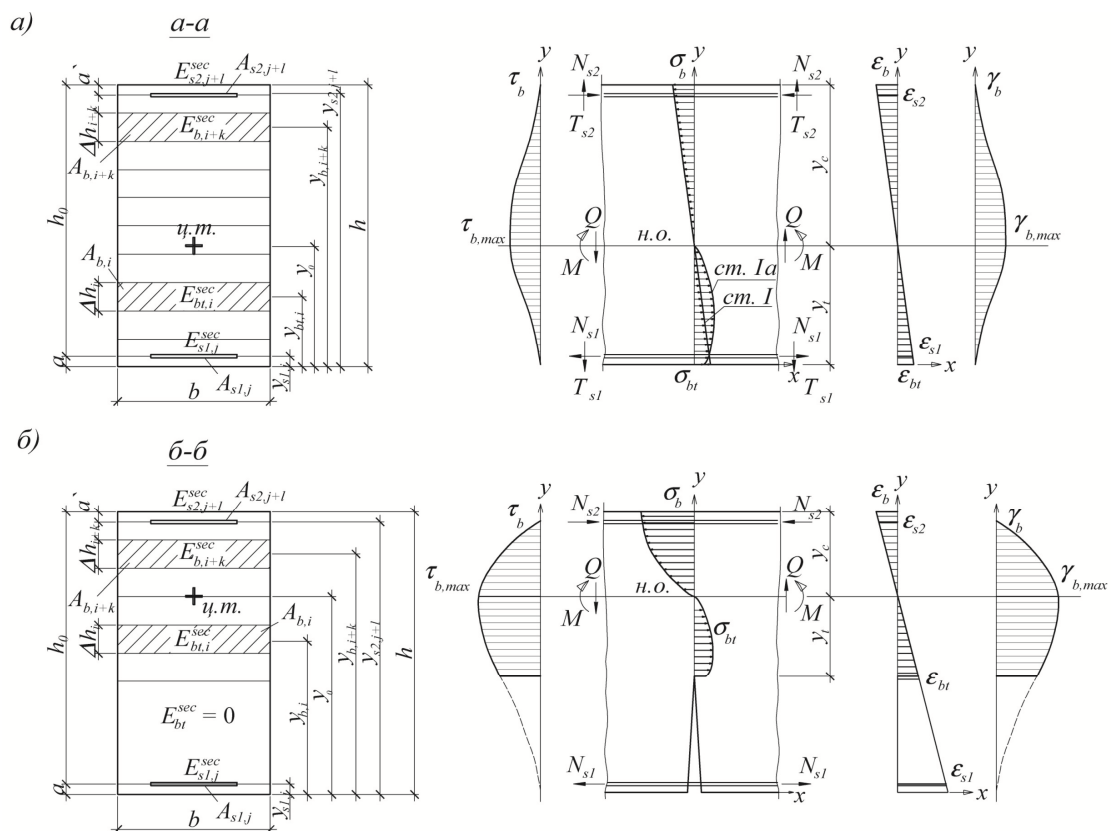


Рис. 2. Схема распределения деформаций и напряжений по сечению балки:
а – до образования; б – после образования нормальной трещины

Отличие предложенной расчётной схемы от принятой в СП 63.1330.2012 в том, что кроме продольных деформаций ϵ_b в сечении учитываются и сдвиговые – γ_b , обусловленные действием перерезывающих сил. Сдвиговые деформации, в свою очередь, вызывают в бетоне касательные напряжения τ_b . Анализ литературы [6, 7 и др.] показал,

что за редким исключением, зависимостям « τ_b - γ_b » не уделяется должного внимания – это не позволяет довести их до конечных расчётных выражений и использовать в практических расчётах. Поэтому возникает необходимость в нормировании диаграмм деформирования бетона при сдвиге.

Одним из путей решения поставленной задачи является получение зависимостей « τ_b - γ_b » расчётным способом по опытным данным при испытаниях бетонных призм на сжатие. При этом по мере нагружения образцов необходимо фиксировать продольные и поперечные относительные деформации бетона – ε_b и ε'_b . Тогда, применяя известные выражения, искомые параметры для описания диаграмм можно получить по следующему алгоритму:

$$v = \frac{\varepsilon'_b}{\varepsilon_b} \rightarrow \gamma_b = (1+v) \varepsilon'_b \rightarrow E_b^{\text{sec}} = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_b} \rightarrow G_b^{\text{sec}} = \frac{E_b^{\text{sec}}}{2(1+v)} \rightarrow \tau_b = G_b^{\text{sec}} \gamma_b, \quad (4)$$

где v – коэффициент поперечных деформаций; E_b^{sec} , G_b^{sec} – соответственно секущие модуль деформаций и модуль сдвига.

На рис. 3б показана кривая, построенная по предложенному алгоритму (4) на основе экспериментальных данных [8], которая использована в расчётах прогибов.

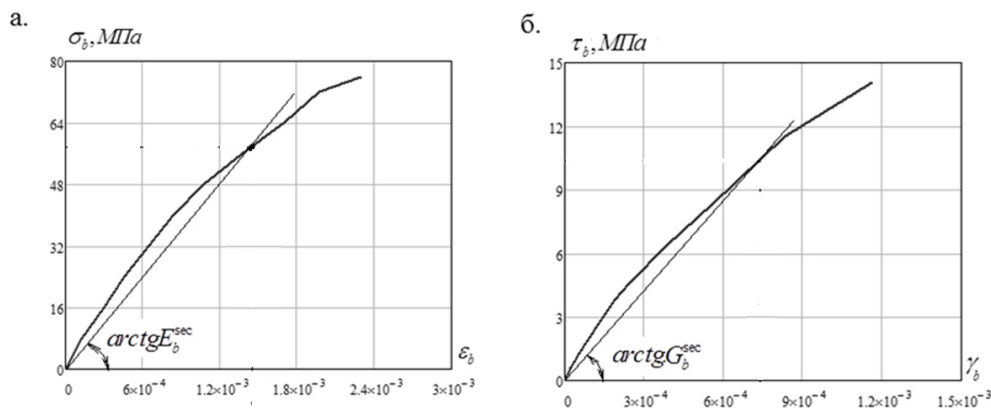


Рис. 3. Диаграммы деформирования для тяжёлого бетона класса В100: а – « σ_b - ε_b »; б – « τ_b - γ_b »

Изменение коэффициента поперечных деформаций бетона v по мере нагружения образца показано на рис. 4.

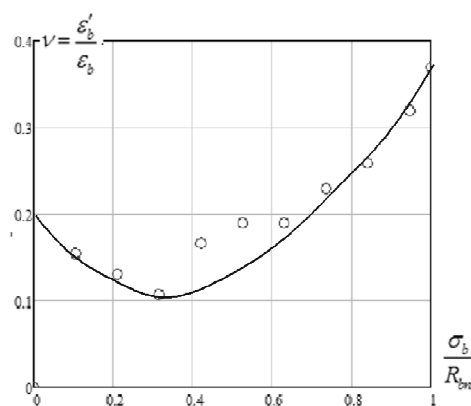


Рис. 4. Изменение коэффициента поперечных деформаций « v » по мере нагружения сжатой призмы из бетона класса В100

Из рис. 3, 4 видно, что диаграмма « τ_b - γ_b » геометрически близка диаграмме « σ_b - ε_b », а коэффициент поперечных деформаций v изменяется от 0,2 до 0,37 по мере нагружения по нелинейному закону. Подобные результаты получены также для других классов бетона.

Основные этапы алгоритма расчёта жёсткости, кривизны и компонент напряжённо-деформированного состояния железобетонных сечений (рис. 2) с учётом совместного

действия изгибающих моментов и перерезывающих сил на всех этапах нагружения элемента – от нуля вплоть до разрушения – представлены в табл. 1.

Таблица 1

Сокращённый алгоритм расчёта жёсткости железобетонных сечений

| № п/п | Описание этапа | Основные расчётные выражения и величины |
|-------|--|---|
| 1. | По заданному классу прочности бетона и арматуры и соответствующим нормативным прочностным и деформационным характеристикам материалов строятся диаграммы деформирования: для арматуры – двухлинейная Прандтля, для бетона криволинейные по [1-3] | « $\sigma_b-\varepsilon_b$ », « $\sigma_{bt}-\varepsilon_{bt}$ », « $\tau_b-\gamma_b$ », « $\sigma_s-\varepsilon_s$ », « $\sigma_{sc}-\varepsilon_{sc}$ » |
| 2. | Сечение разбивают по высоте на полосы ($n \geq 10$) – составляют расчётную схему рис. 1 | $n, y_{b,i}, y_{b,i+k}$ |
| 3. | По приближённым формулам вычисляют кривизну сечения и центр тяжести приведённого сечения, который определяет положение нейтральной оси, и секущий модуль сдвига. Это первое приближение итерационного процесса вычисления | $\frac{1}{r} = \frac{12M}{E_b b h^3}, y_0 = \frac{h}{2},$ $G_b^{\text{sec}} = \frac{E_b}{2(1+\nu)} \approx 0,417 E_b$ |
| 4. | Задаются числом итераций (последовательных приближений) – рекомендовано не менее 20 | m |
| 5. | Используя гипотезу плоских сечений, вычисляют относительные деформации в бетоне и арматуре | $\varepsilon = \frac{1}{r}(y_0 - y)$ |
| 6. | По формуле Журавского определяют угол сдвига | $\gamma_b = \frac{6Q}{G_b^{\text{sec}} b h^3} \left[(h - y_0)^2 - (y_0 - y)^2 \right]$ |
| 7. | По диаграммам деформирования « $\sigma_b-\varepsilon_b$ », « $\sigma_{bt}-\varepsilon_{bt}$ », « $\tau_b-\gamma_b$ », « $\sigma_s-\varepsilon_s$ », « $\sigma_{sc}-\varepsilon_{sc}$ » вычисляют соответствующие напряжения в бетоне и арматуре | $\sigma_b, \sigma_{bt}, \tau_b, \sigma_s, \sigma_{sc}$ |
| 8. | Вычисляют секущие модули бетона и арматуры | $E_b^{\text{sec}} = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_b}, E_b^{\text{sec}} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}}, G_b^{\text{sec}} = \frac{\tau_b}{\gamma_b},$ $E_s^{\text{sec}} = \frac{\sigma_s}{\psi_s \varepsilon_s}, E_{sc}^{\text{sec}} = \frac{\sigma_{sc}}{\varepsilon_{sc}}$ |
| 9. | Уточняют положение нейтральной оси | $y_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} E_{b,i}^{\text{sec}} S_{b,i} + E_s^{\text{sec}} S_s + E_{sc}^{\text{sec}} S_{sc}}{\sum_{i=0}^{n-1} E_{b,i}^{\text{sec}} A_{b,i} + E_s^{\text{sec}} A_s + E_{sc}^{\text{sec}} A_{sc}}$ |
| 10. | Уточняют изгибную жёсткость сечения | $B = \sum_{i=0}^{n-1} E_{b,i}^{\text{sec}} I_{b,i} + E_s^{\text{sec}} I_s + E_{sc}^{\text{sec}} I_{sc}$ |
| 11. | Уточняют кривизну | $\frac{1}{r} = \frac{M}{B}$ |
| 12. | В случае, если разница кривизн, полученных на данной и предыдущей итерациях, превышает 5 %, то расчёт повторяют с п. 4. | $\left[\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r} \right)' \right] / \frac{1}{r} < 5\%$ |
| 13. | Вывод конечных результатов | $B, \frac{1}{r}, \varepsilon_b, \varepsilon_{bt}, \gamma_b, \sigma_s, \sigma_{sc}, \sigma_b, \sigma_{bt}, \tau_b, \sigma_s, \sigma_{sc}$ |
| 14. | Переход к другим сечениям для расчёта прогибов по формулам (1-3) согласно алгоритму табл. 2 | |

Реализация представленного в табл. 1 алгоритма, позволяет определять прогибы балок по уравнениям (1-3), которые решаются численно методом последовательных приближений. Для этого авторами данной статьи с использованием ПК математического анализа *MathCAD* разработан второй алгоритм, содержащий в себе вышеприведённый. Он

позволяет рассчитывать изгибаемые элементы с учётом совместного действия момента и перерезывающей силы, нелинейных свойств бетона и арматуры, а также развития нормальных трещин. Алгоритм включает в себя следующие этапы, показанные в табл. 2.

Таблица 2

Сокращённый алгоритм расчёта прогибов железобетонной балки

| № п/п | Описание этапа | Основные расчётные выражения и величины |
|-------|--|--|
| 1. | Пролёт балки разбивается на n участков размером $\Delta l = l/n$ (рекомендуется $n \geq 10$) | Δl |
| 2. | Для каждого из участков в точке с координатой x_i по формулам строительной механики и сопротивления материалов определяются изгибающий момент и перерезывающая сила от действия заданной и единичной нагрузок (единичная нагрузка прилагается в месте определения прогиба) | $M_i, Q_i, \bar{M}_i, \bar{Q}_i, i=0 \dots n-1$ |
| 3. | В каждом сечении x_i по нелинейной деформационной модели вычисляются кривизна и максимальный угол сдвига (алгоритм табл. 1) | $\left(\frac{1}{r}\right)_i, \gamma_{xy,i}^{\max}$ |
| 4. | По формулам (2) и (3), переходя от интегрирования к суммированию, вычисляют прогибы от совместного действия изгибающего момента и перерезывающей силы | $f_M = \Delta l \sum_{i=0}^{n-1} \bar{M}_i \left(\frac{1}{r}\right)_i, f_Q = \Delta l \sum_{i=0}^{n-1} \bar{Q}_i \gamma_{xy,i}^{\max}$ |
| 5. | Вычисляют полный прогиб балки | $f = f_M + f_Q$ |

Результаты расчёта рассмотренной выше балки по предложенному алгоритму и диаграмм [1-3] сведены в таблицу 3. Из неё видно, что с увеличением процента армирования доля прогибов, вызванных действием перерезывающих сил, возрастает с 6,2 до 10,8 %, а с ростом нагрузки – снижается с 10,8 до 1,5 %. То есть рост неупругих деформаций бетона и арматуры, а также развитие нормальных трещин сглаживает влияние перерезывающих сил на прогибы.

Таблица 3

Результаты расчёта прогибов

| M , кН·м | Q , кН | f_M , мм | f_Q , мм | f , мм | $f/f_M \cdot 100\%$ | $f/f_Q \cdot 100\%$ |
|--------------|----------|------------|------------|----------|---------------------|---------------------|
| $\mu=0,63\%$ | | | | | | |
| 9 | 9 | 0,213 | 0,014 | 0,231 | 93,8 | 6,2 |
| 18 | 18 | 0,517 | 0,028 | 0,544 | 95,0 | 5,0 |
| 30 | 30 | 1,364 | 0,043 | 1,407 | 96,9 | 3,1 |
| 45 | 45 | 3,0 | 0,059 | 3,059 | 98,1 | 1,9 |
| 60 | 60 | 4,7 | 0,072 | 4,772 | 98,5 | 1,5 |
| $\mu=2,31\%$ | | | | | | |
| 9 | 9 | 0,142 | 0,017 | 0,159 | 89,2 | 10,8 |
| 18 | 18 | 0,338 | 0,034 | 0,371 | 90,0 | 9,0 |
| 60 | 60 | 1,873 | 0,098 | 1,917 | 95,0 | 5,0 |
| 120 | 120 | 4,529 | 0,177 | 4,707 | 96,2 | 3,8 |
| 135 | 135 | 5,228 | 0,2 | 5,428 | 96,7 | 3,6 |

Общие выводы

1. На основе нелинейной деформационной модели и диаграмм, полученных в [1-3], предложен подход к расчёту прогибов железобетонных изгибаемых элементов с учётом совместного действия изгибающих моментов и перерезывающих сил. Для этого разработан алгоритм, позволяющий определять напряжённо-деформированное состояние элементов в зоне взаимного влияния этих силовых факторов на всех этапах загрузки – от нуля вплоть до разрушения. Для автоматизации расчёта алгоритм реализован в ПК математического анализа *MathCAD*.

2. Расчёт прогибов рассмотренной балки (с $l/h=7,5$) по предложенному алгоритму показал, что с увеличением процента армирования доля прогибов, вызванных действием перерезывающих сил, возрастает с 6,2 до 10,8 %, а с ростом нагрузки – снижается с 10,8 до 1,5 %, что уточняет положение норм о возможности расчёта прогибов без учёта действия перерезывающих сил в зависимости от отношения l/h , нагрузки и процента продольного армирования.

Заключение

В статье приведен расчёт одной конкретной балки, результаты которого уточняют положение норм о возможности расчёта прогибов изгибаемых железобетонных элементов на действие только моментов – без учёта перерезывающих сил. Однако данные, полученные по программе выбранного направления исследований, показали, что в зависимости от схемы нагружения, отношения l/h и a/h , процента продольного армирования, вида диаграмм деформирования материалов, развития наклонных трещин, наличия предварительно напряжённой арматуры, а также уровня напряжений влияние перерезывающих сил на прогибы может достигать 80%. Поэтому возникает необходимость в разработке методики определения прогибов с учётом перечисленных факторов, что будет изложено в дальнейших публикациях авторов.

Список библиографических ссылок

1. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. К определению деформаций изгибаемых железобетонных элементов с использованием диаграмм деформирования бетона и арматуры // Строительство и реконструкция. – Орёл: Изд. ОГТУ, 2012, № 2. – С. 11-20.
2. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. Анализ и совершенствование криволинейных диаграмм деформирования бетона для расчета железобетонных конструкций по деформационной модели // Промышленное и гражданское строительство. – М., 2013, № 1. – С. 25-27.
3. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. Совершенствование методики расчета изгибаемых железобетонных элементов без предварительного напряжения по образованию нормальных трещин // Строительные материалы. – М., 2013, № 6. – С. 54-55.
4. Карпенко Н.И., Соколов Б.С., Радайкин О.В. К расчёту прочности, жёсткости и трещиностойкости внецентренно сжатых железобетонных элементов с применением нелинейной деформационной модели // Известия КГАСУ, 2013, № 4 (26). – С. 113-120.
5. Соколов Б.С., Радайкин О.В. Исследование напряженно-деформированного состояния бетонных и железобетонных изгибаемых элементов в зоне совместного действия изгибающих моментов и поперечных сил // VIII Академические чтения РААСН. Международная научно-технической конференции «Механика разрушения строительных материалов и конструкций», г. Казань, 18-20 сентября, 2014. – С. 312-317.
6. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
7. Тур В.В., Кондратчик А.А. Расчёт железобетонных конструкций при действии перерезывающих сил: монография. – Брест: Изд. БГТУ, 2000. – 400 с.
8. Пунагин В.В. Свойства и технология бетона для высотного монолитного строительства // Электронный архив Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина. – Харьков, 2012. URL: <http://dspace.snu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/123456789/357/32/Punagin.pdf> (дата обращения: 12.05.2014).

Sokolov B.S. – doctor of technical science, professor

E-mail: sokolov@kgasu.ru

Radaikin O.V. – candidate of technical sciences, senior lecturer

E-mail: olegxxii@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Calculation of the bending deflections of reinforced concrete elements with regard to joint action of bending moments and shear forces using a non-linear deformation model**Resume**

The aim of this work was the determination of the bending deflections of reinforced concrete elements with regard to combined action of bending moments and shear forces using nonlinear deformation model. Using mathematical analysis program – MathCAD – the algorithm of calculation of concrete and reinforced concrete beams was elaborated. It takes into account the scheme of loading, nonlinear properties of concrete and reinforcement, the emergence and development of normal cracks. The algorithm allows the use of state diagrams concrete, obtained by the authors previously.

The article describes the calculation of the single beams, the results of which specify the position of the norms about the possibility of calculation of the bending deflections of reinforced concrete elements on the action only moments without taking into account shear forces. However, the data obtained by the program selected areas of research have shown that depending on circuit loading, the relationship l/h and a/h , the percentage of longitudinal reinforcement, types of deformation diagram of materials, development of inclined cracks, presence of prestressing reinforcement, and stresses the influence of shear forces on the deflection can reach 80 %. Therefore, there is a need to develop techniques for determination of deflections taking into account these factors, which will be discussed in further publications.

Keywords: reinforced concrete, shear span, bending moment, shear force, deflection.

Reference list

1. Karpenko N.I., Sokolov B.S., Radaikin O.V. To the determination of the bending deformations of reinforced concrete elements using deformation diagrams of concrete and reinforcement // Construction and renovation. – Orel: Ed. OGTU, 2012, № 2. – P. 11-20.
2. Karpenko N.I., Sokolov B.S., Radaikin O.V. Analysis and improvement curvilinear diagrams of deformation of concrete for the calculation of reinforced concrete structures by deformation model // Industrial and civil construction. – M., 2013, № 1. – P. 25-27.
3. Karpenko N.I., Sokolov B.S., Radaikin O.V. Improving the methodology of calculation of the bending of reinforced concrete elements without pre-stressing on education normal cracks // Building materials. – M., 2013, № 6. – P. 54-55.
4. Karpenko N.I., Sokolov B.S., Radaikin O.V. To the calculation of strength, hardness and fracture toughness of eccentrically compressed concrete elements using nonlinear deformation models // News of the KSUAE. – Kazan, 2013, № 4 (26). – P. 113-120.
5. Sokolov B.S., Radaikin O.V. Study of stress-strain state of concrete and reinforced concrete bending elements in the zone of the joint action of bending moments and shear forces // VIII Academic reading RAASN. International scientific-technical conference «Fracture Mechanics of building materials and structures», Kazan, September 18-20, 2014. – P. 312-317.
6. Karpenko N.I. General models of the mechanics of reinforced concrete. – M.: Stroiizdat, 1996. – 416 p.
7. Tour V.V., Kondratchik A.A. Calculation of reinforced concrete structures under the action of shear forces: monograph. – Brest: Ed. Baltic state technical University, 2000. – 400 p.
8. Pungin V.V. Properties and technology of concrete for high-rise monolithic construction // Electronic archive of Kharkov national University named by V.N. Karazin. – Kharkov, 2012. URL: <http://dSPACE.snu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/123456789/357/32/Punagin.pdf> (date of access: 12.05.2014).