



УДК 666.97:620.193:517.518.45

**Каюмов Р.А.** – доктор физико-математических наук, профессор

E-mail: kayumov@rambler.ru

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

**Федосов С.В.** – доктор технических наук, профессор

E-mail: prezident@igas.ru

**Румянцева В.Е.** – доктор технических наук, профессор

E-mail: varrym@gmail.com

**Хрунов В.А.** – кандидат технических наук, старший преподаватель

E-mail: sprinter054@yandex.ru

**Манохина Ю.В.** – аспирант

E-mail: manokh@inbox.ru

**Красильников И.В.** – аспирант

E-mail: korasb@mail.ru

**Ивановский государственный политехнический университет**

Адрес организации: 153037, Россия, г. Иваново, ул. 8 Марта, д. 20

**Математическое моделирование коррозионного массопереноса  
гетерогенной системы «жидкая агрессивная среда – цементный бетон».**

**Частные случаи решения<sup>1</sup>**

**Аннотация**

В статье математически смоделирован коррозионный массоперенос цементных бетонов, встречающихся в промышленном производстве, связанном с выпуском или применением кислот. Приведена краевая задача массопроводности в стенке бетонной конструкции при химическом взаимодействии с агрессивным компонентом водной среды в размерных и безразмерных переменных. Представлено окончательное решение задачи методом Лапласа при малых значениях массообменного числа Фурье. Приведены результаты расчетов для двух частных случаев: равномерное распределение источника массы по толщине бетона, источник массы распределен по координате.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, массоперенос, гетерогенная системы, коррозия цементного бетона.

Коррозионные процессы в гетерогенной системы «жидкая агрессивная среда – цементный бетон» развиваются с большой скоростью и представляют значительную опасность для бетонных и железобетонных конструкций. При воздействии растворов веществ, образующих с компонентами цементного камня практически нерастворимые аморфные продукты, в начальной стадии коррозионного процесса происходят уплотнение бетона, замедление скорости процесса. Затем по мере разрушения гидратированных соединений цементного камня происходит снижение прочности и долговечности бетонной конструкции.

Методы математического моделирования при исследовании процессов коррозии бетона на практике применяются не достаточно широко, хотя их преимущества очевидны. Применение математических моделей позволит экономически обоснованно назначать средства защиты и устанавливать сроки их применения [1].

В работе [2] авторами представлена математическая модель диффузионного массопереноса в процессах коррозии цементных бетонов второго вида. Известно, что массообменные процессы в бетонных и железобетонных конструкциях протекают за длительные периоды времени [3]. При этом значения массообменного критерия Фурье, являющегося своеобразным «индикатором» процесса, оказывается менее 0,1 [4].

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект 2012-1.4-12-000-1019-002).

Математически задача массопроводности в стенке бетонных конструкций при химическом взаимодействии с агрессивным компонентом водной среды может быть представлена следующей краевой задачей [1]:

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 C(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q_v(x)}{\rho_b}, \quad \tau \geq 0, \quad (1)$$

$$C(x, \tau)|_{\tau=0} = C_0(x) \quad \tau \geq 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

$$-k \rho_b \left. \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta} = q_n. \quad (4)$$

Здесь  $C(x, \tau)$  – концентрация «свободного  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ » в бетоне в момент времени  $\tau$  в произвольной точке с координатой  $x$ , в пересчете на  $\text{CaO}$ , кг  $\text{CaO}/\text{кг}$  бетона;  $C_0(x)$  – концентрация «свободного  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ » в бетоне в начальный момент времени в произвольной точке с координатой  $x$ , в пересчете на  $\text{CaO}$ , кг  $\text{CaO}/\text{кг}$  бетона;  $k$  – коэффициент массопроводности в твердой фазе,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\delta$  – толщина стенки конструкции,  $\text{м}$ ;  $x$  – координата,  $\text{м}$ ;  $\tau$  – время,  $\text{с}$ ;  $q_v(x)$  – источник массы вещества в результате химической реакции,  $\text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ ;  $q_n$  – плотность потока массы вещества из бетона в жидкую среду,  $\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ;  $\rho_b$  – плотность бетона,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Введем безразмерные переменные вида:

$$\theta(\bar{x}, Fo_m) = \frac{C(x, \tau) - C_0}{C_0}; \quad \bar{x} = \frac{x}{\delta}; \quad Fo_m = \frac{k\tau}{\delta^2}; \quad Pi_m(\bar{x}) = \frac{q_v(x)\delta^2}{kC_0\rho_b}; \quad Ki_m = \frac{q_n\delta}{kC_0\rho_b}. \quad (5)$$

Краевая задача массопроводности (1)-(4) примет вид:

$$\frac{\partial \theta(\bar{x}, Fo_m)}{\partial Fo_m} = \frac{\partial^2 \theta(\bar{x}, Fo_m)}{\partial \bar{x}^2} + Pi_m^*(\bar{x}); \quad Fo_m > 0; \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1, \quad (6)$$

$$\theta(\bar{x}, Fo_m)|_{Fo_m=0} = \theta_0(\bar{x}), \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(\bar{x}, Fo_m)}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = 0, \quad (8)$$

$$-\left. \frac{\partial \theta(\bar{x}, Fo_m)}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=1} = Ki_m^*. \quad (9)$$

Упуская громоздкие преобразования окончательное решение задачи (6)-(9) в области оригиналов при малых значениях массообменного числа Фурье запишется:

$$\begin{aligned} \theta(\bar{x}, Fo_m) = & Ki_m(1 \pm \bar{x}) \operatorname{erfc} \left[ \frac{(1 \pm \bar{x})}{2\sqrt{Fo_m}} \right] - 2Ki_m \sqrt{\frac{Fo_m}{\pi}} \exp \left[ -\frac{(1 \pm \bar{x})^2}{4Fo_m} \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi Fo_m}} \int_0^1 \theta_0(\xi) \exp \left[ -\frac{(1 \pm \bar{x} + \xi)^2}{4Fo_m} \right] d\xi + 2\sqrt{Fo_m} \int_0^1 Po_m(\xi) \operatorname{ierfc} \left[ \frac{(1 \pm \bar{x} + \xi)}{2\sqrt{Fo_m}} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнения (10) рассмотрим вначале сумму пятого, шестого и седьмого слагаемых при условии:

$$Po_m^*(\xi) = Po_m^* = const, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \left( Fo_m + \frac{3\bar{x}^2 + 2}{6} \right) \int_0^1 Po_m^* d\xi - \int_0^1 Po_m^* \xi d\xi + \frac{1}{2} \int_0^1 Po_m^* \xi^2 d\xi = \\ & = Po_m^* \left( Fo_m + \frac{3\bar{x}^2 + 2}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = Po_m^* (Fo_m + 0,5\bar{x}^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Определяем интеграл последнего слагаемого (10):

$$\int_0^1 P o_m^* \cos(\pi n \xi) d\xi = \frac{P o_m^*}{\pi n} \int_0^1 \cos(\pi n \xi) d(\pi n \xi) = \frac{P o_m^*}{\pi n} \sin(\pi n \xi) \Big|_0^1 = 0. \quad (13)$$

Таким образом, при равномерном распределении источника массы по толщине бетона, последнее слагаемое (10) обращается в ноль. Решение принимает вид:

$$\theta(\bar{x}, F o_m) = K i_m^* \left[ \frac{1 - 3\bar{x}^2}{6} - F o_m + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(\pi n \bar{x}) \exp(-\pi^2 n^2 F o_m) \right] + P o_m^* (F o_m + 0,5\bar{x}^2). \quad (14)$$

Рис. 1 показывает результаты расчетов по выражению (14) при различных значениях модифицированного числа Померанцева, характеризующего влияние на процесс массопереноса равномерно распределенного по координате  $\bar{x}$  объемного источника массы вследствие химических реакций выделения (кривые 2, 5) или поглощения (кривые 6, 7) вещества при фиксированных значениях критериев Кирпичева и Фурье.

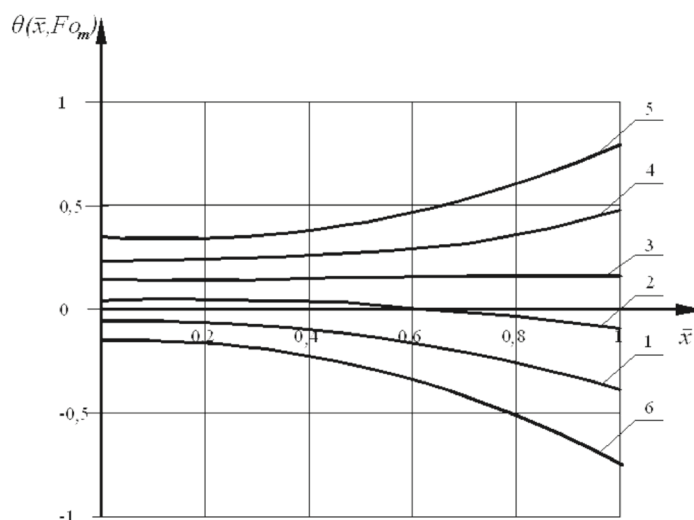


Рис. 1. Влияние внутреннего источника массы ( $P o_m^*$ ) на профили безразмерных концентраций:

$$F o_m = 0,2; K i_m^* = 1; \text{ при } P o_m^* = 1 - 0; 2 - 0,5; 3 - 1; 4 - 1,5; 5 - 2; 6 - -0,5$$

Интересно отметить следующие моменты, хорошо согласующиеся с физическими представлениями о процессе. Кривая 1 показывает безразмерное поле концентраций в массообменном процессе, определяемом «чистой» массопроводностью в твердом теле: вещество за счет градиента концентраций, перемещается от внешней границы конструкции к поверхности, контактирующей с жидкостью.

Известно, что критерии подобия являются мерой соотношения потоков субстанции вещества (количества движения, теплоты или массы). В частности, массообменный критерий Померанцева представляет собой соотношение потоков массы вещества, переносимого массопроводностью и возникающего (или исчезающего) вследствие фазовых или химических превращений.

При значении критерия Померанцева  $P o_m^* = 0,5$  вещество образуется в толще бетонной конструкции, однако скорость его отвода посредством массопроводности значительно выше. Поэтому, хотя концентрация компонента и возрастает в диапазоне координат  $0 \leq \bar{x} \leq 0,5$  характер кривой показывает, что процесс, по-прежнему, контролируется внутренней массопроводностью (эффективной диффузией). Исчезновение вещества в ходе химической реакции ведет к физически прогнозируемому изменению концентраций (кривые 6, 7).

Рассмотрим случай, когда источник массы распределен по координате, в соответствии с зависимостью:

$$Po_m^*(\xi) = Po_m^* \xi^m. \tag{15}$$

Характер зависимости (15) при различных значениях  $m$  показан на рис. 2. Показатель степени при  $\xi$  косвенно отражает характер действия источника массы,  $m=1$  означает, что мощность объемного источника массы линейно возрастает от границы конструкции с окружающей средой до поверхности, контактирующей с жидкостью. При  $m=20$  практически весь источник массы сосредотачивается в достаточно узкой зоне (0,8-1,0) бетона, контактирующей с жидкостью. Случай  $m=0$  означает, рассмотренное выше равномерное распределение источника по толщине конструкции [5].

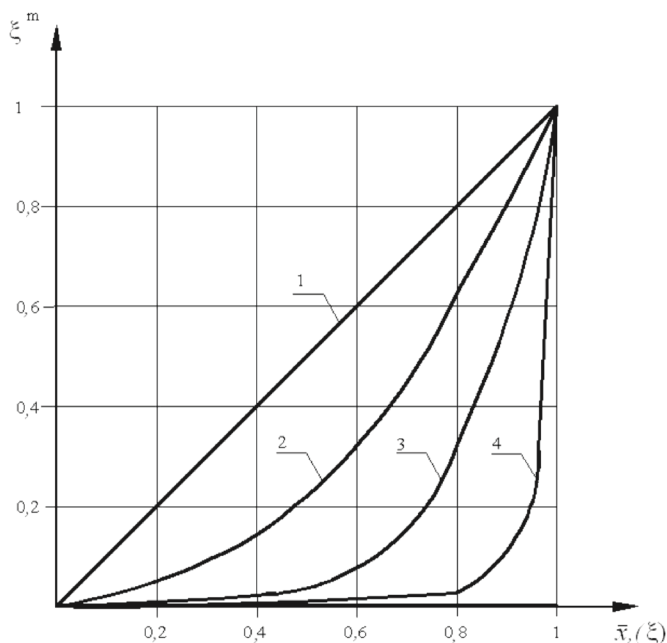


Рис. 2. Иллюстрация степенной зависимости при различных значениях  $m$ :  
1 – 1,0; 2 – 2,0; 3 – 5,0; 4 – 20,0

Обращаемся поочередно к пятому, шестому, седьмому и восьмому слагаемым (10), выделив отдельно интегралы:

$$\int_0^1 Po_m^*(\xi) d\xi = \int_0^1 Po_m^* \xi^m d\xi = Po_m^* \left. \frac{\xi^{m+1}}{m+1} \right|_0^1 = \frac{Po_m^*}{m+1}, \tag{16}$$

$$\int_0^1 Po_m^*(\xi) \xi^{m+1} d\xi = \int_0^1 Po_m^* \xi^{m+1} d\xi = Po_m^* \left. \frac{\xi^{m+2}}{m+2} \right|_0^1 = \frac{Po_m^*}{m+2}, \tag{17}$$

$$\int_0^1 Po_m^*(\xi) \xi^{m+2} d\xi = \frac{Po_m^*}{m+3}, \tag{18}$$

$$\int_0^1 Po_m^*(\xi) \cos(\pi n \xi) d\xi = Po_m^* \int_0^1 \xi^m \cos(\pi n \xi) d\xi = -Po_m^* \pi n m \int_0^1 \xi^{m-1} \sin(\pi n \xi) d\xi. \tag{19}$$

С учетом выше изложенного, окончательное решение будет иметь вид:

$$\theta(\bar{x}, Fo_m) = Ki_m^* \left[ \frac{1-3\bar{x}^2}{6} - Fo_m + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(\pi n \bar{x}) \exp(-\pi^2 n^2 Fo_m) \right] + Po_m^* \left[ \frac{Fo + 3\bar{x}^2 + 2}{6} - \frac{1}{m+2} + \frac{1}{2(m+3)} + \frac{2m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \xi^{m-1} \sin(\pi n \xi) d\xi \exp(-\pi^2 n^2 Fo_m) \right]. \tag{20}$$

Полученные в ходе численного эксперимента графические зависимости хорошо согласуются с физическими представлениями о процессе коррозионного массопереноса по механизму второго вида. Заметим также, что указанные расчеты не только качественных, но и количественных характеристик процессов возможны только при имеющейся информации о кинетике изучаемых явлений, полученной на базе экспериментальных исследований, что и будет предметом дальнейшего изучения.

### Список библиографических ссылок

1. Касьяненко Н.С. Процессы массопереноса при жидкостной коррозии второго вида цементных бетонов: дис. канд. техн. наук. – Иваново, 2010. – 156 с.
2. Федосов С.В., Румянцева В.Е., Касьяненко Н.С. Математическое моделирование массопереноса в процессах коррозии бетона второго вида // Строительные материалы, 2008, № 7. – С. 35-39.
3. Федосов С.В., Румянцева В.Е., Касьяненко Н.С. О некоторых проблемах математического моделирования жидкостной коррозии бетона второго вида // Вестник отделения строительных наук. – М.: Орел, 2009, Вып. 13. – С. 93-101.
4. Федосов С.В., Румянцева В.Е., Касьяненко Н.С., Манохина Ю.В. Нестационарный массоперенос в процессах коррозии второго вида цементных бетонов (малые значения чисел Фурье) // Вестник гражданских инженеров, 2011, № 1 (26). – С. 104-106.
5. Румянцева В.Е. Научные основы закономерностей массопереноса в процессах жидкостной коррозии строительных материалов: дис. док. тех. наук. – Иваново: ИГАСУ, 2011. – 444 с.

**Kayumov R.A.** – doctor of physical and mathematical sciences, professor

E-mail: kayumov@rambler.ru

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

**Fedosov S.V.** – doctor of technical sciences, professor

E-mail: prezident@igasu.ru

**Rumyantseva V.E.** – doctor of technical sciences, professor

E-mail: varrym@gmail.com

**Khrunov V.A.** – candidate of technical sciences, senior lecturer

E-mail: sprinter054@yandex.ru

**Manohina Yu.V.** – post-graduate student

E-mail: manokh@inbox.ru

**Krasilnikov I.V.** – post-graduate student

E-mail: korasb@mail.ru

**Ivanovo State University of Architecture, Building and Civil Engineering**

The organization address: 153037, Russia, Ivanovo, 8 Marta st., 20

### Mathematical modeling of corrosion mass transfer of the heterogeneous system «corrosive liquids – cement concrete». Special cases of the solutions

#### Resume

Mass transfer corrosion of the second type of cement concrete is mathematically modeled in the present article. This specific kind of corrosion degradation, which occurs most often in industrial production, associated with release or use of acids. The boundary-value problem of mass condition is shown in the case of the wall of a concrete structure in chemical interaction with aggressive component of aquatic environment in dimensional and dimensionless variables. The final solution by Laplace method is presented for small values of mass transfer Fourier number. We describe two special cases of the solution: the equal distribution of the mass source

according to the thickness of concrete, and in the case where the mass source is distributed along the coordinate. For each particular case calculation results in graphical form are given. Obtained during numerical simulation graphics are in good agreement with the physical picture of the process of mass transfer on the corrosion mechanism of the second kind.

**Keywords:** mathematical modeling, mass transfer, heterogeneous systems, corrosive of cement concrete.

#### References list

1. Kasyanenko N.S. The processes of mass transfer in liquid corrosion of the second type of cement concrete: thesis of the candidate of techn. science. – Ivanovo, 2010. – 156 p.
2. Fedosov S.V., Rumyantseva V.E., Kasyanenko N.S. Mathematical modeling of mass transfer of the second kind of corrosion of concrete // *Building materials*, 2008, № 7. – P. 35-39.
3. Fedosov S.V., Rumyantseva V.E., Kasyanenko N.S. On some problems of mathematical modeling of liquid concrete corrosion of the second kind // *Journal of Civil Engineering Department*. – M.: Eagle, 2009, Issue 13. – P. 93-101.
4. Fedosov S.V., Rumyantseva V.E., Kasyanenko N.S., Manohina Yu.V. Unsteady mass transfer in the processes of corrosion of the second type of cement concrete (small values of Fourier numbers) // *Journal of Civil engineers*, 2011, № 1 (26). – P. 104-106.
5. Rumyantseva V.E. Scientific basis of the laws of mass transfer of liquid corrosion of building materials: thesis of the doctor of techn. science. – Ivanovo: IGASU, 2011. – 444 p.