УДК 532.5:621.694:519.6
Золотоносов Я.Д. – доктор технических наук, профессор
E-mail: zolotonosov@mail.ru
Горская Т.Ю. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: tatyana_gorskaya@mail.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1
Бармин К.Е. – студент
Казанский (Поволжский) федеральный университет
Адрес организации: 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Метод коллокации для уравнения задачи движения

Аннотация

В работе приведена математическая модель задачи движения в осесимметричном канале. Численное решение уравнения для задачи движения предложено вычислять с помощью метода коллокации. Для этого в области интегрирования в качестве узлов коллокации берутся узлы Чебышева первого рода. Приводится вычислительная схема метода коллокации, приводящая к системе линейных матричных уравнений, которая решается методом матричной прогонки.

Ключевые слова: приближенные методы, вычислительная схема, задача движения.

Введение

Математическое моделирование в научных исследованиях является одним из перспективных направлений решения физических задач.

Существует несколько способов моделирования.

Предметное моделирование характеризуется тем, что осуществляется на модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики оригинала. Физическое моделирование основывается на том, что объект и модель имеют одну и ту же физическую природу. В основе физического моделирования лежит теория подобия и анализ размерности. Аналоговое моделирование основано на изоморфизме явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими уравнениями. Кибернетическое моделирование делает акцент на моделировании функционирования изучаемых систем, абстрагируясь от их структуры. Стохастическое моделирование основано на установлении вероятности тех или иных событий (например, изучение турбулентного течения жидкости). Математическое моделирование является универсальным видом моделирования, оно позволяет моделировать как весь объект целиком, так и по частям. Задачами математического моделирования являются: составление математической модели процесса, нахождение решения, оптимизация полученного решения, проверка адекватности математической модели реальным процессам.

Математическое моделирование экономичнее физического, так как оно не требует дополнительных расходов, связанных с проведением физического эксперимента. Эффективность математического моделирования зависит от полноты отражения изучаемого предмета, основой этого является доказательство идентичности (адекватности) математической модели. Проверка адекватности осуществляется путем сравнения результатов данного моделирования с уже имеющимися частными результатами. Многие исследователи предпочитают упрощать математическую модель. Однако проверка адекватности модели при этом требует дополнительных исследований, в том числе и экспериментальных, т.к. упрощенная модель не может в полной мере отражать реальный объект. Все это ведет к увеличению время проведения исследования, а в некоторых случаях, к дополнительным капиталовложениям.

В настоящей статье предложена математическая модель для задачи движения [1], решаемая в традиционной постановке, в терминах скорость-давление. Преодоления нелинейности системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса ведется итерационным процессом. Для нахождения приближенного решения используются метод коллокации совместно с методом матричной прогонки. Анализ полученных результатов согласуется с ранее полученными результатами [1]. Таким образом, данная работа является продолжением работы, начатой в [1], и служит для обоснования использования предложенного в статье приближенного аппарата для решения задач гидродинамики в более сложных каналах.

Необходимо отметить, что интерес к применению метода коллокаций к уравнениям движения проявлялся и ранее (см., напр. [2]), однако, подобные исследования носили больше теоретический интерес и проводились на тестовых задачах. Было показано, что результаты решения тестовых задач были близки с известным точным решением и модельных задач о течении вязкой жидкости в каверне и об обтекании вязкой жидкостью уступа, что позволило оценить качество дискретной модели. Последующее решение конкретных задач, анализ полученных результатов и сравнение с известными результатами, опубликованными в научной литературе, позволяют судить об эффективности и применимости разработанных численных алгоритмов.

Постановка задачи

Известно [3], что задача движения вязкой жидкости в заданном канале описывается уравнениями Навье-Стокса, которые с учетом осесимметричного течения запишутся в виде:

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}\right);$$

$$v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}-\frac{v_\varphi v_r}{r}=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}\right);$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right);\quad \frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0,$$

с граничными условиями:

$$z=0,\ v_r=0,\ v_\phi=0,\ v_z=u_0,\ p=p_0,\quad \frac{\partial p}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial v_r}{\partial r}=0;$$

$$r=0,\ v_r=0,\ v_\phi=0,\quad \frac{\partial v_z}{\partial r}=0,\ \frac{\partial p}{\partial r}=0;$$

$$r=R(z),\ v_r=0,\ v_\phi=R(z)\omega,\ v_z=0,$$

где $R(z)=R_0\pm ztg\gamma$ – функция, описываемая диффузор и конфузор соответственно.

Для исключения давления из системы введем уравнение баланса сил трения и давления при установившемся движении вязкой жидкости:

$$S_{сеч}\Delta p=S_{бок}(p_{zr}+p_{\varphi z}).$$

Здесь $S_{сеч}$ – площадь осевого сечения, $S_{бок}$ – площадь бокового сечения, $p_{zr}, p_{\phi z}$ – тензоры напряжения. Тогда:

$$p-p_0=\frac{2l}{R(z)}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right).$$

В качестве математической модели в области $\Omega=\{(\overline{r},\overline{z}):0<\overline{r}<R(\overline{z}),0<\overline{z}<l\}$, рассмотрим стационарную линеаризованную систему уравнений Навье-Стокса для безразмерных составляющих скорости и давления. Для этого представим параметры скоростей, давления следуя [4]: $v_r=u_0 f(z,r)$, $v_\varphi=\omega r\varphi(z,r)$, $v_z=u_0H(z,r)$, $p-p_0=\rho u_0^2F(z,r)$ /Re, где $\mathrm{Re}=d_э u_0/\nu$ – число Рейнольдса; $d_э=4\cos\gamma(r_0^3-R_0^3)/(3(r^2{}_0-R^2{}_0))$ – эквивалентный диаметр трубы; $\overline{r}=r/r_0$, $\overline{z}=z/L$, $\widetilde{R}(\overline{z})=R(\overline{z})/d_э$ – безразмерные переменные; $\overline{R}_0=r_0/L$, $\widetilde{R}_0=r_0/d_э$ – безразмерные константы.

Обозначим $N = \omega r / u_0$ – число закрутки, $R(\bar{z}) = 1 + (-1)^n \bar{z} tg\gamma / \overline{R}_0$, где n=0 в случае диффузора и n=1 в случае конфузора.

Тогда имеем следующую систему уравнений:

$$\widetilde{R}_0 \operatorname{Re}\left(\bar{f}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \overline{HR}_0 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \frac{N^2 \varphi\overline{\varphi}}{\bar{r}} \right) = -\frac{\partial F}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{r}^2} + \overline{R}_0^{\,2} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} - \frac{f}{\bar{r}^2}; \tag{1}$$

$$\widetilde{R}_0 \operatorname{Re}\left(\bar{f}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} + \overline{HR}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + \frac{2\bar{f}\varphi}{\bar{r}} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{r}^2} + \overline{R}_0^{\,2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{3}{\bar{r}}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}}; \tag{2}$$

$$\widetilde{R}_0 \operatorname{Re}\left(\bar{f}\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \overline{HR}_0 \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) = -\overline{R}_0 \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \overline{R}_0^{\,2} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{z}^2}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{f}{\bar{r}} + \overline{R}_0 \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0; \tag{4}$$

$$F(\bar{z}, \bar{r}) = \frac{2}{\overline{R}_0 \widetilde{R}(\bar{z})} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \overline{R}_0 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \overline{R}_0 N \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right). \tag{5}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} &\bar{z} = 0,\ f = 0,\ \varphi = 0,\ H = 1,\ \ F = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0,\ \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0, \\ &\bar{r} = 0,\ f = 0,\ \varphi = 0,\ \ \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \bar{r}} = 0; \\ &\bar{r} = R(\bar{z}),\ f = 0,\ \varphi = 1,\ H = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Задачу (1)-(6) будем решать методом коллокации, неизвестные функции f, φ, H, F будем искать в виде многочленов:

$$\begin{aligned} &f(\bar{r}, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \alpha_{kj} \bar{z}^j \bar{r}^k, \qquad \phi(\bar{r}, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \beta_{kj} \bar{z}^j \bar{r}^k, \\ &H(\bar{r}, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \gamma_{kj} \bar{z}^j \bar{r}^k, \qquad F(\bar{r}, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \theta_{kj} \bar{z}^j \bar{r}^k, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\alpha_{kj}, \beta_{kj}, \gamma_{kj}, \theta_{kj}$ – неизвестные коэффициенты, которые находятся, согласно методу, в узлах коллокации. В качестве узлов возьмем узлы Чебышева первого рода, в области Ω они представляются в виде:

$$\bar{z}_i = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\cos\frac{2i-1}{2n}\pi, \quad \bar{r}_{mi} = \frac{R(\bar{z}_i)}{2} + \frac{R(\bar{z}_i)}{2}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi, \quad i = \overline{0, n}, \ \ m = \overline{0, n}. \tag{8}$$

Подставив разложения искомых функций (7) в уравнения (1)-(6), получим вычислительную схему метода в узлах (8) в виде матричных уравнений вида:

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \alpha_{kj} A_{mi} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \alpha_{k0} \bar{r}_{mi}^k = 0, \ \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{n} \alpha_{0j} \bar{z}_i^j = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \alpha_{k1} \bar{r}_{mi}^k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \beta_{k0} \bar{r}_{mi}^k = 0, \ \ \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \beta_{k1} \bar{r}_{mi}^k = 0,$$

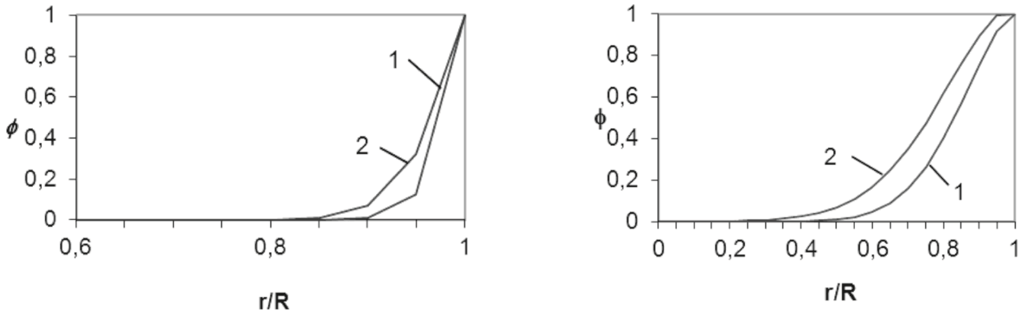
$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \gamma_{k0} \bar{r}_{mi}^k = 1, \ \sum_{j=0}^{N}\sum_{m=0}^{n} \gamma_{1j} \bar{z}_m^j = 0, \qquad \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \alpha_{kj} \bar{z}_m^j (R(\bar{z}_m))^k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \gamma_{kj} \bar{z}_m^j (R(\bar{z}_m))^k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} \ \beta_{kj} \bar{z}_m^j (R(\bar{z}_m))^k = 1,$$

$$\beta_{kj} = L_1(\alpha_{kj}), \ \ \gamma_{kj} = L_2(\alpha_{kj}), \ \ \theta_{kj} = L_3(\alpha_{kj}, \beta_{kj}, \gamma_{kj}), \quad k = \overline{0, N}, \ \ j = \overline{0, N}.$$

Здесь неизвестные коэффициенты разложения α_{kj} находятся методом матричной прогонки, A_{mi} – известная матрица, полученная после применения метода коллокации.

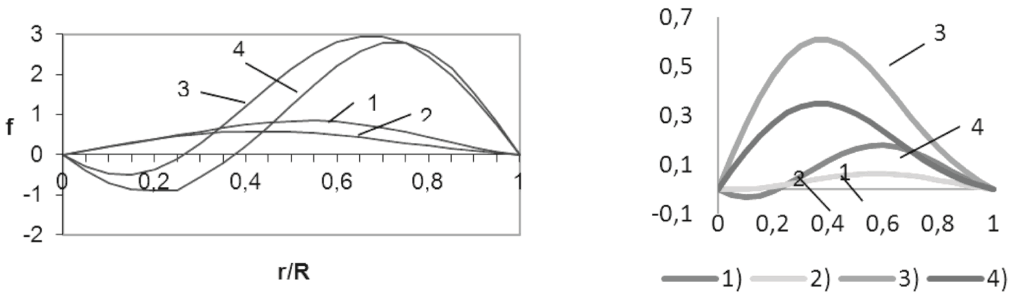
Последовательно решая полученные системы, находим параметры вектора скоростей и давление в проточной части вращающегося канала типа «конфузор-диффузор» (рис. 1-4).



1) круглый канал, N=2;
2) канал типа «конфузор-диффузор», N=2

1) круглый канал, N=2;
2) канал типа «конфузор-диффузор», N=2

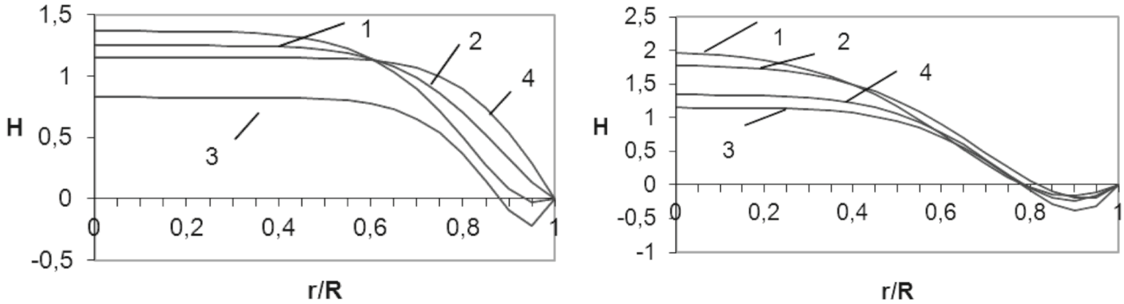
Рис. 1. Развитие профиля безразмерной окружной компоненты вектора скорости ***φ*** при различных значениях параметра закрутки по длине трубы: а) $z/L = 0{,}45m$, б) $z/L = 0{,}95m$



1 – канал типа «конфузор-диффузор», N=0,
2 – круглый канал, N=0;
3 – канал типа «конфузор-диффузор», N=2,
4 – круглый канал, N=2

1 – канал типа «конфузор-диффузор», N=0,
2 – круглый канал, N=0,
3 – канал типа «конфузор-диффузор», N=2,
4 – круглый канал, N=2

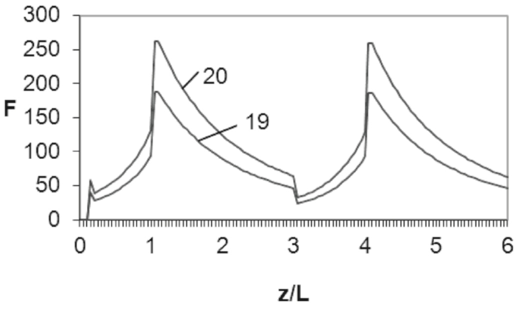
Рис. 2. Развитие профиля безразмерной радиальной компоненты вектора скорости ***f*** при различных значениях параметра закрутки по длине трубы: а) $z/L = 0{,}45m$, б) $z/L = 0{,}95m$



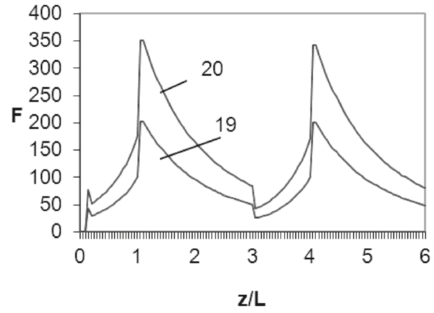
1 – канал типа «конфузор-диффузор», N=2,
2 –круглый канал, N=2,
3 – канал типа «конфузор-диффузор», N=0,
4 – круглый канал, N=0

1 – канал типа «конфузор-диффузор», N=2,
2 – круглый канал, N=2,
3 – канал типа «конфузор-диффузор», N=0,
4 – круглый канал, N=0

Рис. 3. Развитие профиля безразмерной осевой компоненты вектора скорости ***H*** при различных значениях параметра закрутки по длине трубы: а) $z/L = 0{,}45m$, б) $z/L = 0{,}95m$



ω = 50 с$^{-1}$



ω = 100 с$^{-1}$

Рис. 4. Характер изменения безразмерного давления ***F*** в проточной части вращающейся волнистой трубы при различных угловых скоростях.
Цифры – номера сечений в радиальном направлении

Как следует из результатов численного решения, полученные значения скоростей и давления согласуются с результатами ранее проведенных исследований [1]. Расхождение составляет 10…12 %, что определяет целесообразность ее использования для решения задач гидродинамики течения вязкой жидкости во вращающихся и неподвижных каналах.

Список библиографических ссылок

1. Горская Т.Ю. Гидродинамика ламинарного течения вязкой жидкости в теплообменных устройствах с вращающейся поверхностью типа «конфузор-диффузор». Дис…канд. техн. наук. – Казань, 2004. – 110 с.
2. Семин Л.Г. Метод коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Дис…канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 2002. – 106 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973, Т. 2. – 584 с.
4. Золотоносов Я.Д., Шафигуллин Т.Р. Математическая модель течения инжектирующей жидкости во вращающемся осесимметричном конвергентном канале центробежного струйного подогревателя // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики, 2001, № 5-6. – С. 36-41.

Zolotonosov Ya.D. – doctor of technical sciences, professor
E-mail: zolotonosov@mail.ru
Gorskaya T.Yu. – condidate of technical sciences, associate professor
E-mail: tatyana_gorskaya@mail.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1
Barmin K.E. – student
Kazan (Volga) Federal University
The organization address: 420008, Russia, Kazan, Kremlevskaya st., 18

Method of collocation for equations of the problem of motion

Resume
This work contains a mathematical model of the problem of motion in the axisymmetric channel. Numerical solution of equations for the problem of motion is proposed to calculate using the collocation method. For this purpose in the field of integration as a collocation nodes Chebyshev nodes of the first kind are taken. Given the computational scheme of the method of collocation, which leads to a system of linear matrix equations, which is solved by the method of the matrix is constructed. The results of numerical solutions in the form of the distribution

graphs of velocity vectors and the pressure of a flowing part of the study of the channel are resulted. It is shown that the results of this study are consistent with the results obtained earlier by the author with the help of other computational methods. Together with differential methods it is expedient to use a collocation method for the solution of problems of hydrodynamics of a current of viscous liquid in rotating and motionless canals.

Keywords: approximate methods, computational scheme, the task of the movement.

Reference list

1. Gorskaya T.Ur. Hydrodynamics of laminar flow of viscid liquid in heat-exchange devices with the revolved surface of type «confuser-diffuser». Diss. Cand.tech. sciences. – Kazan, 2004. – 110 p.
2. Semin L.G. Method of collocation and least-squares solutions of boundary value problems for the Navier-Stokes equations. Dis...Cand. physical Mat. Sciences. – Novosibirsk, 2002. – 106 p.
3. Sedov L.I. Continuum Mechanics. – M.: Nauka, 1973, T. 2. – 584 p.
4. Zolotonosov Ya.D., Shafigullin T.R. Mathematical model of a current of injecting liquid in the rotating axisymmetric convergent canal of a centrifugal jet heater // Izvestia of higher schools. The energy problems, 2001, № 5-6. – P. 36-41.