

УДК 539.3

Камалов А.З. – кандидат физико-математических наук, профессор

E-mail: shigabutdinov@kgasu.ru

Хамидуллина А.А. – старший преподаватель

E-mail: alsu-13@list.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1

К вопросу исследования напряженно-деформированного состояния и устойчивости арочных сооружений

Аннотация

В статье дана постановка задач напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости арочной конструкции, находящейся под действием нормального давления и ветровой нагрузки. Арочная конструкция представляет собой цилиндрическую оболочку с равномерно распределенными арками. Определено возмущенное давление ветра на цилиндрическое покрытие. Получены дифференциальные уравнения состояния системы. Разработаны алгоритмы расчета арочного сооружения на прочность и устойчивость. Получены расчетные формулы для исследования НДС и для определения критических скоростей ветра. Исследованы вопросы сходимости двойных рядов, входящих в расчетные формулы.

Ключевые слова: арка, оболочка, арочное сооружение, напряженно-деформированное состояние, устойчивость, критическая скорость.

Как известно, современные тенденции, которые наблюдаются как в отечественном, так и зарубежном строительстве, связаны с широким внедрением новых материалов, совершенствованием конструктивных форм. В частности, широкое применение нашли тонкие оболочки различной формы в легких зданиях и сооружениях. Вызванное этим облегчение конструкций привело к уменьшению жесткости, повышению чувствительности таких сооружений к различным видам нагрузки. В связи с этим резко возросла необходимость разработки эффективных методик статических и динамических расчетов, исследований динамического поведения строительных сооружений, особенно новых конструктивных форм.

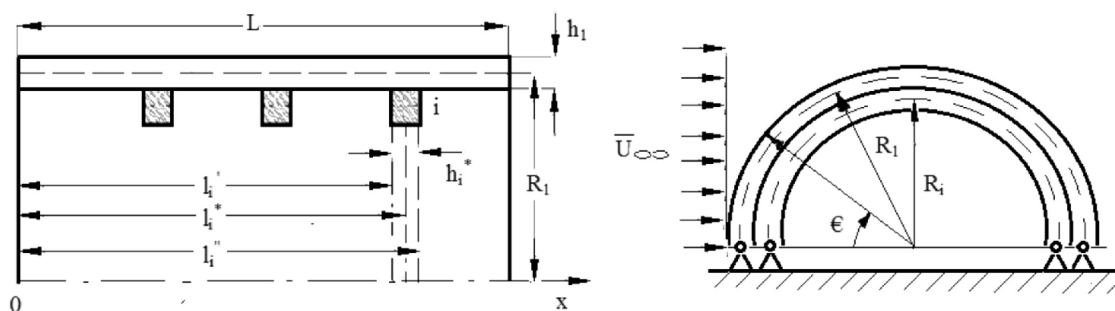


Рис. Расчетная схема арочного сооружения

В настоящей работе рассматриваются задачи прочности и устойчивости арочного сооружения, представляющего незамкнутую цилиндрическую оболочку радиуса R , толщины h и длины L с N равномерно распределенными подкрепляющими арками толщины h_i , ширины b_i и радиуса R_i ($i = \overline{1, N}$), находящегося под действием ветровой нагрузки. Здесь под устойчивостью понимается способность арочной конструкции противостоять воздействиям ветра. Следует отметить, что аэродинамика арочного сооружения, как и любых других тел, охватывают аэродинамику и аэроупругость [1].

Аэродинамика изучает аэродинамические силы, действующие на арочные сооружения при обтекании его ветровым потоком. Аэроупругость рассматривает поведение конструкции в потоке, реакцию сооружений и их отдельных элементов на действие ветрового потока.

Задача ставится следующим образом. Определить напряженное состояние и исследовать устойчивость изображенного на рисунке арочного сооружения при наличии упругих подкрепляющих арок, под действием внешнего давления и ветровой нагрузки, если заданы условия закрепления покрытия (цилиндрическая оболочка) на торцах.

Решение данной задачи можно осуществить, используя следующие рассуждения.

Предположим, что подкрепляющие арки являются упругими. Тогда цилиндрическая оболочка находится под действием внешней ветровой нагрузки и внутреннего давления, распределенного каким-то образом по длине каждой подкрепляющей арки. Внутренние давления или реакции арок в свою очередь зависят от условий на контактных поверхностях покрытия и арок. На практике могут быть реализованы различные условия. Здесь исследуется напряженное состояние только в случае свободного скольжения и жесткого скрепления покрытия и арок.

1. Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндрического арочного покрытия с дискретно расположенными подкрепляющими арками

а) Рассмотрим случай, когда при эксплуатации арочного сооружения допускаются лишь свободные скольжения покрытия и подкрепляющих арок по поверхности контакта. Для определения реакций подкрепляющих арок будем пользоваться моделью Винклера, т.е. реакции подкрепляющих арок будем считать пропорциональными прогибу покрытия, т.е. $q_i = \alpha_i \cdot w_i$ ($i = \overline{1, N}$). Отсутствие связи коэффициента α_i с геометрическими и физическими параметрами покрытия и подкрепляющих арок затрудняет подбор конкретных значений α_i для каждой арки. Поэтому здесь предполагается подход, в котором реакции арок находятся из строгой математической постановки задачи взаимодействия покрытия и подкрепляющих арок.

При таких предположениях задача НДС арочной конструкции под действием постоянного внешнего давления и ветровой нагрузки, перпендикулярной к ее продольной оси, сводится к решению задачи взаимодействия цилиндрической оболочки с N подкрепляющими арками.

Для определения возмущенного ветрового давления рассматривается цилиндрическое покрытие при безотрывном поперечном обтекании его установившимся плоским потоком неограниченной идеальной несжимаемой жидкости.

При определении потенциала скорости «вторичные» возмущения потенциала скорости, вызванные упругими перемещениями покрытия, не учитываются.

Тогда задача относительно потенциала скорости φ и возмущенного давления P сводится к решению задачи [2].

$$\Delta^2 \varphi = 0, \quad P = P_\infty + \rho \left[u_\infty^2 - (\Delta \varphi)^2 \right] / 2, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (r = R), \quad \varphi = -u_\infty r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty), \quad (1.2)$$

где P_∞ , ρ , u_∞ – параметры жидкости в бесконечности.

Решение задачи (1.1) и (1.2) без отрывного обтекания жесткого цилиндрического покрытия имеет вид:

$$\varphi = -u_\infty \left(r + R^2 / r^2 \right) \cos \theta, \quad (1.3)$$

$$P = P_\infty + P_0 - \rho u_\infty^2 (R/r)^2 \left(R^2 / 2r^2 - \cos 2\theta \right). \quad (1.4)$$

Запишем уравнения цилиндрического покрытия относительно функции прогиба F и подкрепляющих арок относительно прогибов w_i ($i = \overline{1, N}$) в следующем виде [3].

$$c^2 \left[(\nabla^2 + 1) \nabla^2 \nabla^2 F - 2R^2 (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \nabla^2 F \right] + R^4 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \frac{R^2}{Eh} Z = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d^4 w_i}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 w_i}{d\theta^2} + w_i = - \frac{R^4}{E_i J_i} \alpha_i W \Big|_{x=l_i^0}, \quad (1.6)$$

где

$$Z = -P_0 + \rho u_\infty^2 \left(\frac{1}{2} - \cos 2\theta \right) + \sum_{i=1}^N \alpha_i w [\delta(x - l'_i) - \delta(x - l''_i)],$$

$$w = \nabla^2 \nabla^2 F, \quad \nabla^2 = R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$\delta(x - l_i)$ – единичная функция Хевисайда.

Кинематические условия контакта согласно принятым допущениям запишем в виде:

$$w_i = w \text{ при } x = l_i^0. \tag{1.7}$$

Функции прогибов w , арок w_i и реакции арок ($i = \overline{1, N}$), удовлетворяющих уравнениям (1.5)-(1.6) и граничным условиям шарнирного закрепления, представим следующими суммами:

$$w = \sum_{n=1} \sum_{k=1} W_{nk} \sin \lambda_k x \sin n\theta, \tag{1.8}$$

$$w_i = \frac{R_i^4}{E_i J_i} \sum_k \left[\alpha_{k1} \chi(\theta) W_{1k} - \sum_{n=2} \frac{\alpha_{nk} W_{nk}}{(n^2 - 1)^2} \sin n\theta \right] f_{ki}, \quad (i = \overline{1, N}), \tag{1.9}$$

$q_i = \alpha_i w_i$, где

$$\chi(\theta) = \frac{\pi}{2} + \theta \cos \theta - \frac{\pi}{4} \theta \sin \theta - \frac{\pi}{2} \cos \theta + \frac{1}{8} \theta^2 \sin \theta,$$

$$f_{ki} = 2 \sin b_{ki} \cdot \sin l_{ki} / \lambda_k^2, \quad b_{ki} = \lambda_k b_i / 2, \quad l_{ki} = \lambda_k l_i^0.$$

Таким образом, задача свелась к отысканию неизвестных коэффициентов w_{nk} и α_{nk} . Подставим (1.8) в уравнение (1.5) и проинтегрируем по методу Бубнова – Галеркина. Выполняя преобразование, которое здесь не приводим, получим систему уравнений:

$$\gamma \sum_m \alpha_{mn} a_{mk} W_{mn} - \omega_{nk} W_{kn} = \gamma P_n / \bar{\lambda}_k, \tag{1.10}$$

где введены следующие обозначения:

$$\omega_{nk} = c^2 \left[\left(\bar{\lambda}_k^2 + n^2 + 1 \right)^2 + 2(1 - \nu) \frac{\bar{\lambda}_k^2 (\bar{\lambda}_k^2 - n^2)}{\lambda_k^2 + n^2} \right] + \frac{\bar{\lambda}_k^4}{\left(\lambda_k^2 + n^2 \right)^2}; \quad \gamma = \frac{2R^3}{EhL}; \quad c^2 = \frac{h^2}{12R^2(1 - \nu^2)};$$

$$P_n = \frac{8}{\pi n} \left[P_0 + \rho u_\infty^2 \frac{n^2 + 4}{2(n^2 - 4)} \right];$$

$$a_{mk} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{b_i}{R} N - \frac{1}{\bar{\lambda}_k} \sin 2b_{ki} \sum_{j=1}^N \cos 2l_{kj} \right] & \text{для } k = m; \\ \frac{(\bar{\lambda}_k^2 + n^2)^2}{\lambda_{km}^{(1)}} \sum_{s=1}^2 \left[2 - s - (s-1) \frac{\lambda_{km}^{(1)}}{\lambda_{km}^{(2)}} \sum_{j=1}^N \sin b_{kmi}^{(s)} \cos l_{nmj}^{(s)} \right] & \text{для } k \neq m; \end{cases}$$

$$\lambda_{km}^{(s)} = \bar{\lambda}_k + (-1)^s \bar{\lambda}_m; \quad \bar{\lambda}_k = \frac{k\pi R}{(N+1)l_j^0}; \quad b_{kmi}^{(s)} = \frac{\lambda_{km}^{(s)} b_i}{2}; \quad l_{nmj}^{(s)} = \lambda_{km}^{(s)} l_j^0.$$

Полученная система уравнений (1.10) относительно неизвестных α_{mn} и W_{mn} формально по своей структуре не является линейной.

Теперь остается выполнить условия (1.7). Для этого решения (1.9) представим в виде следующего ряда:

$$w_i = \beta \sum_{k=1} \left\{ \alpha_{1k} W_{1k} \sin \theta + \sum_{n=3} \left[\frac{(2-n^2)}{n(n^2-1)^2} \alpha_{1k} W_{1k} - \frac{\alpha_{nk} W_{nk}}{(n^2-1)^2} \right] \sin n\theta \right\} f_{ki} \sin \lambda_k t_i^0.$$

Тогда из условия (1.7), приравнявая коэффициенты при $\sin \theta$ и $\sin n\theta$, получим:

$$\alpha_{1k} = \frac{48 \bar{\lambda}_k^2}{2\beta(69 - 4\pi^2) \sin b_{ki}} \text{ для } n=1, \tag{1.11}$$

$$\alpha_{1k} \frac{(2-n^2)}{n(n^2-1)^2} W_{1k} - \frac{\alpha_{nk}}{(n^2-1)^2} W_{nk} = \frac{1}{\beta f_{ki}} W_{nk} \text{ для } n \neq 1. \tag{1.12}$$

Итак, решение данной задачи условно разбилось на два этапа, с одной стороны, для $n=1$, зная коэффициенты α_{1k} , из системы уравнений (1.10) при $n=1$ можем определить W_{1k} . С другой стороны, зная уже α_{1k} и W_{1k} , используя соотношения (1.12), систему уравнений (1.10) для всех остальных $n \neq 1$, приведем к виду

$$(n^2-1)^2 \omega_1 \sum_m \frac{a_{mk}}{f_{mi}} W_{mn} + \omega_{kn} W_{kn} = -\gamma \frac{P_n}{\lambda_k} + \omega_k \frac{(2-n^2)}{n} \sum_m a_{mk} \alpha_{1kn} W_{1m}, \tag{1.13}$$

где $\omega_1 = \gamma / \beta$, $\gamma = R_i^4 / E_i J_i$.

Решая систему (1.13), находим все неизвестные W_{kn} и в результате из уравнений (1.12) определяем коэффициенты α_{nk} для определения реакций подкрепляющих арок. Определив прогибы цилиндрического покрытия и подкрепляющих арок из (1.8) и (1.9), находим все характеристики НДС арочной конструкции.

Численная реализация описанного метода определения НДС и реакций подкрепляющих арок предложена в программе ARC1. Для арочной конструкции с $N=9$ подкрепляющими арками с целью иллюстрации процесса сходимости рядов, определяющих изменения безразмерных прогибов \bar{w} , \bar{w}_i и реакций \bar{q}_i приведены их значения в конкретных точках. При этом были приняты следующие значения безразмерных величин $h_i/b_i = 2$, $h_i/l = 0,08$, $h_i/R_i = 0,2$, $h/h_i = 0,01$, $E/E_1 = 1$, $R = R_i + h_i/2 + h/2$.

Таблица

Иллюстрация процесса сходимости рядов, определяющих изменения безразмерных реакций и прогибов

n	k	$\theta = 45^0, i = 3$		$\theta = 36^0, \bar{x} = 3$
		\bar{q}_i	\bar{w}_i	\bar{w}
19	19	0,5710	-0,1095	-0,1030
39	39	0,5846	-0,1077	-0,0985
59	59	0,5905	-0,1060	-0,1040
79	79	0,5933	-0,1046	-0,1042
129	129	0,5932	-0,1046	0,1042

Как видно из таблицы, численный эксперимент показывает достаточно хорошую сходимость рядов, входящих в формулах для определения \bar{q}_i , \bar{w}_i и \bar{w} .

Практика вычислений по программе ARC1, реализующей рекомендованную методику, показывает достаточную эффективность определения НДС и реакций подкрепляющих арок.

б) Рассмотрим случай, когда цилиндрическое покрытие с подкрепляющими арками жестко скреплено. Здесь предлагается другой подход, в котором арочное сооружение

разбивается на $(N-1)$ оболочечные и N двухслойные арочные элементы. При формулировке задачи было указано, что слои «оболочка-арка» работают совместно без скольжения, и в силу того, что гипотеза недеформированных нормалей дана для слоя «оболочка-арка» в целом, условия контакта на контактных поверхностях оболочки и арок в этом случае выполняются автоматически. При таких предположениях задача об изгибе арочного сооружения под действием приложенных внешних сил (собственный вес, ветровая и снеговая нагрузки) сводится к решению задачи взаимодействия $(N-1)$ незамкнутых оболочечных элементов с N двухслойными подкрепляющими арками.

Рассмотрим в отдельности i -ую двухслойную арку и $(i-1)$ -ое и i -ое цилиндрическое покрытие и приложим силы их взаимодействия. Пусть в поперечном сечении при $x = (i-1)l - b_i/2$ имеются поперечная $Q_1^{(i-1)}$, сдвигающая $S^{(i-1)}$, растягивающая $T_1^{(i-1)}$ силы и изгибающий момент $M_1^{(i-1)}$. Точно такие же внутренние силы возникают и в сечении при $x = (i-1)l + b_i/2$. Тогда интенсивности нагрузок, приложенных на i -ую двухслойную арку, составляют:

$$q_{\tau,i} = q_{\tau} - 2S^{(i)}/b_i; \quad q_{n,i} = q_n - 2Q_1^{(i)}/b_i, \quad (1.14)$$

так как $S^{(i-1)} = S^{(i)}$ и $Q_1^{(i-1)} = Q_1^{(i)}$ при $x \approx (i-1)l$, поскольку $l \gg b_i$; q_{τ} , q_n – интенсивности внешней касательной и нормальной нагрузок на i -ую двухслойную арку.

Представим решение уравнения изгиба для i -ой двухслойной подкрепляющей арки [4] в следующем виде:

$$v_i = \sum_{m=0}^{\infty} V_{mi} \cos m_* \theta; \quad w_i = \sum_{m=0}^{\infty} V_{mi} m_* \sin m_* \theta, \quad (1.15)$$

$$\text{где } V_{mi} = R_i^5 \left(-2S_m^{(i)} - 2m_* Q_{1m}^{(i)} + m_* b_i q_{nmi} + b_i q_{\tau mi} \right) / \left[D_{22}^{(i)} (m_*^2 - 1)^2 b_i \right], \quad (1.16)$$

$m_* = \pi m / \alpha$, α – стягиваемый оболочку и двухслойную арку центральный угол.

Переходим к расчету i -го цилиндрического покрытия. Представим общее решение системы уравнений i -го оболочечного элемента для каждого номера m в виде:

$$u_m = U_m e^{\lambda x}, \quad u_m = V_m e^{\lambda x}, \quad w_m = W_m e^{\lambda x}. \quad (1.17)$$

Подставив (1.17) в систему дифференциальных уравнений i -го оболочечного элемента, получим характеристическое уравнение в виде:

$$\lambda^8 - 4m_*^2 \lambda^6 + \left[6m_*^4 - (8 - 2v^2)m_*^2 + (1 - v^2)/c \right] \lambda^4 - 4m_*^2 (m_*^2 - 1) \lambda^2 + m_*^4 (m_*^2 - 1)^2 = 0. \quad (1.18)$$

Точное аналитическое определение корней уравнения (1.18) невозможно, поэтому попытаемся приближенно определить корни данного уравнения. Уравнение (1.18) содержит множитель $(1 - v^2)/c$ при λ^4 . Учитывая эту особенность, переходим к приближенному определению корней уравнения (1.18).

1. Пусть $m_* = 0$ и $m_* = 1$, тогда уравнение (1.18) имеет четыре нулевых корня. При $m_* = 0$ этим корням соответствует кручение i -го цилиндрического покрытия, а также поворот вокруг оси симметрии. При этом ненулевые корни соответствуют осесимметричному краевому эффекту.

2. При $m_* > 1$ и $m_* \ll 1/c$ корни уравнения (1.18) делятся на две группы: большие и малые корни. Большие корни совпадают с характеристическими показателями осесимметричного краевое эффекта. Малые корни совпадают со значениями корней характеристического уравнения полубезмоментной теории.

3. Пусть $m_*^2 \sim (1 - v^2)/c$ или $m_*^2 > (1 - v^2)/c$, то разделение корней на малые и большие не происходит, и это уравнение имеет восемь корней:

$$\lambda_{nj} = (-1)^j \beta_{mn} + (-1)^j \gamma_{mn}; \quad n, j = 1, 2, \quad (1.19)$$

где $\beta_{mn} = \left(\sqrt{\sqrt{4m_*^4 + c_*^4} + 2m_*^2} - (-1)^n c_* \right) / 2$; $c_* = \sqrt[4]{(1 - \nu^2) / 4c}$;

$$\gamma_{mn} = \left(c_* - (-1)^n \sqrt{\sqrt{4m_*^4 + c_*^4} - 2m_*^2} \right) / 2.$$

Тогда прогиб i -го цилиндрического покрытия будет иметь вид:

$$w_m^{(i)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=1}^2 e^{-\beta_{mn} x_{ji}} \left(W_{n,j}^{(s,i)} \sin \gamma_{mn} x_{ji} + W_{n,j}^{(c,i)} \cos \gamma_{mn} x_{ji} \right). \quad (1.20)$$

Здесь $x_{ji} = (-1)^j (il - x) + (2 - j)l$.

Анализ показывает, что формулы (1.19)-(1.20) дают близкие к точным результатам не только для больших значений m_* , но и для малых корней. Можно показать, что приближенное характеристическое уравнение с корнями (1.19) получается из так называемой теории пологих оболочек.

Анализ характеристического уравнения (1.18) позволяет сделать некоторые выводы о применимости различных приближенных методов расчета. Отметим, что возможность применения тех или иных приближенных методов зависит от изменяемости напряженного и деформированного состояния в окружном направлении, т.е. от числа волн m .

Осевые u_i окружные v_i и нормальные перемещения w_i точек срединной поверхности i -го оболочечного элемента между двумя поддерживающими арками, а также окружное v_i^* и нормальное w_i^* перемещения точек поверхности приведения двухслойной арок будем определять по формулам

$$u_i = -\frac{1}{E_1 h_1} \sum_{m=1}^{\infty} \int \left[m_*^2 \psi_{mi} - \nu_1 \psi_{mi}'' R^2 \right] dx \sin m_* \theta;$$

$$v_i = \sum_{m=0}^{\infty} \left[V_{mi}^{(0)} - \frac{1}{m_*} W_m^{(i)} \right] \cos m_* \theta; \quad w_i = \sum_{m=1}^{\infty} \left[W_{mi}^{(0)} + W_m^{(i)} \right] \cos m_* \theta; \quad (1.21)$$

$$v_i^* = \sum_{m=0}^{\infty} V_{mi} \cos m_* \theta; \quad w_i^* = \sum_{m=1}^{\infty} V_{m*} V_{mi} \sin m_* \theta. \quad (1.22)$$

В расчетных формулах (1.21)-(1.22) введены следующие обозначения:

$$W_{mi}^{(0)} = -A_m [q_{\tau,m} + m_* q_{n,m}], \quad V_{mi}^{(0)} = \frac{A_m}{m_* (1 + cm_*^2)} \left[m_* (cm_*^2 + 1) q_{n,m} + (cm_*^4 + 1) q_{\tau,m} \right],$$

V_{mi} , $W_m^{(i)}$ – определяются из формул (1.16) и (1.20), а остальные величины, входящие в (1.21)-(1.22), из-за громоздкости здесь не приводятся.

Постоянные интегрирования в (1.21) и (1.22) определяют в зависимости от граничных условий при $x = 0, L$; $\theta = 0, \alpha$ и условий упругой стыковки оболочечных элементов с двухслойными подкрепляющими арками.

Всего неизвестных постоянных интегрирования будет $8(N-1)$. Для упрощения будем предполагать, что, кроме первого и последнего оболочечного элемента, все остальные оболочечные элементы ($i = 1, 2, \dots, N-2$) деформируются совершенно одинаково. Это возможно, поскольку все оболочечные элементы находятся под действием одинаковых внешних нагрузок и все подкрепляющие арки по своим физическим и геометрическим характеристикам одинаковы, работают в одинаковых условиях. В результате число неизвестных постоянных интегрирования останется всего 12. И эти неизвестные легко определяются из граничных условий при $x = 0$ и условий упругой стыковки оболочечного элемента с двухслойным арочным элементом при $x = l$.

Теперь мы располагаем достаточными данными для того, чтобы из (1.21)-(1.22) вычислить соответствующие перемещения и тем самым определить НДС всего арочного сооружения в целом.

2. Расчет на устойчивость арочного сооружения с тонким цилиндрическим покрытием под действием ветровой нагрузки

В этом параграфе рассмотрим устойчивость арочного сооружения. НДС данной арочной конструкции до потери устойчивости были рассмотрены в 1.

Уравнения нейтрального равновесия как для цилиндрического покрытия, так и для подкрепляющих арок запишем в перемещениях. Тогда задача определения критической скорости ветра сводится к решению систем дифференциальных уравнений и к удовлетворению граничных условий, условий контакта покрытия с подкрепляющими арками.

Решения дифференциальных уравнений нейтрального равновесия, также добавочные реакции q_i^* подкрепляющих арок в момент потери устойчивости системы представим в виде двойных рядов:

$$\begin{aligned} u &= \sum_m \sum_k U_{mk} \cos \lambda_k x \sin m_* \theta; \\ v &= \sum_m \sum_k V_{mk} \sin \lambda_k x \cos m_* \theta; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} w &= \sum_m \sum_k W_{mk} \sin \lambda_k x \sin m_* \theta; \quad v_i = \sum_m V_m^{(i)} \cos m_* \theta; \quad w_i = \sum_m W_m^{(i)} \sin m_* \theta; \\ q_i^* &= \sum_m \sum_k \left(\alpha_i^* \sin i \lambda_k l_i \right) W_{mk} \sin m_* \theta, \quad (i = \overline{1, N}) \end{aligned}$$

$$\text{где } \lambda_k = k\pi/L, \quad m_* = \pi m/\alpha, \quad \alpha_i^* = \left(m_*^2 - 1 \right) \left[\frac{1 - v_i^2}{E_i h_i} A_i R_i \left(P_0 + \rho u_\infty^2 a_n \right) + c_i \left(m_*^2 - 1 \right) \right].$$

После постановки (2.1) в уравнения нейтрального равновесия арочного сооружения получим бесконечную систему алгебраических уравнений для определения собственных значений задачи устойчивости исследуемого арочного сооружения при действии ветровой нагрузки.

Выпученная форма равновесия конструкции становится возможной, если только полученная система однородных алгебраических уравнений дает решения, отличные от нуля, это требует, чтобы детерминант этих уравнений был равен нулю.

Таким образом, из условия нетривиальности решения систем уравнений получается уравнение для определения критического скоростного напора.

Как видим, задачи исследования НДС и устойчивости рассматриваемого сооружения, находящегося под действием ветровой нагрузки, связаны с громоздкими вычислениями, и они реализуются только численным экспериментом.

С целью получения аналитических формул для определения критических значений \bar{P}_* ветровой нагрузки остановимся на некоторых подходах и частных случаях задачи.

1. Пусть все физические и геометрические параметры подкрепляющих арок одинаковы и $\alpha = \pi$. Для этого случая, в результате многочисленных выкладок, получим аналитическую формулу для определения \bar{P}_* в следующей форме:

$$\bar{P}_* = \frac{\sum_{j=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} F_{nk}^{(j)} \left(\prod_{t=1}^{k_*} \Lambda_{nt}^{(k)} \right) \right\} - \prod_{k=1}^{k_*} \chi_{nk}^{(2)}}{\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\chi_{nk}^{(1)} - F_{nk}^{(1)} \right) \left(\prod_{t=1}^{k_*} \Lambda_{nt}^{(k)} \right) \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} F_{nk}^{(2)} \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} \chi_{nk}^{(1)} \left(1 - \delta_q^k \right) \left(\prod_{t=1}^{\infty} \Lambda_{ntq}^{(k)} \right) \right\}} \quad (2.2)$$

$$\text{где } \Lambda_{nt}^{(k)} = \chi_{nt}^{(2)} + \delta_t^k \left(1 - \chi_{nt}^{(2)} \right), \quad \Lambda_{ntq}^{(k)} = \chi_{nt}^{(2)} - \delta_t^k \left(1 - \chi_{nt}^{(2)} \right) \left[\delta_t^k + \delta_t^q \left(1 + \delta_t^k \right) \right],$$

δ_q^k , δ_t^k , δ_t^q – символы Кронекера. Из-за громоздкости записи значения остальных величин, входящих (2.2), не приводятся.

2. Пусть подкрепляющие арки отсутствуют, тогда из (2.2) получим

$$\bar{P}_* = \frac{64(1-\nu^2)}{(m^2-4)\left(4+m^2L^2/\pi^2R^2\right)^2} + c \left[\frac{(m^2-4)}{4} + \frac{2(m^2-4-4\nu)}{4+m^2L^2/\pi^2R^2} \right]. \quad (2.3)$$

3. Пусть подкрепляющие арки отсутствуют и незамкнутая цилиндрическая оболочка очень длинная, т.е. $L/R \gg 1$, тогда пренебрегая в (2.3) членами, содержащими квадрат этого отношения, получим

$$\bar{P}_* = \frac{h^2}{2R^2} (m^2 - 4). \quad (2.4)$$

Для частных случаев результаты (2.3) и (2.4) подтверждаются работами других авторов.

Основными результатами данной статьи являются:

- сформулированная система допущений и построение математической модели и выведенные уравнения состояния и устойчивости арочного сооружения;
- разработанная методика расчета НДС и методика исследования устойчивости арочного сооружения, состоящего из цилиндрического покрытия с подкрепляющими арками;
- полученные формулы для исследования НДС и для определения критических нагрузок.

Список литературы

1. Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью // Прикладная механика, 1975, т. XI, вып. 3. – С. 112-119.
2. Ильгамов М.А., Камалов А.З. Колебания цилиндрической оболочки конечной длины в акустической среде // Сб. «Исследования по теории пластин и оболочек», IV. – Казань: Изд-во КГУ, 1966. – С. 367-376.
3. Камалов А.З. К расчету элементов арочных конструкций // Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники. Тр. Международной конференции. «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике и экономике», Т.5. – Ульяновск, 2003. – С. 54-56.
4. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.

Kamalov A.Z. – candidate of physical and mathematical sciences, professor

E-mail: shigabutdinov@kgasu.ru

Khamidullina A.A. – senior lecturer

E-mail: alsu-13@list.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia Kazan, Zelenaya st., 1

To the question of research of the stress strain state and stability arched constructions

Resume

This paper deals with the problem of the stress-strain state and stability of the arch structure, consisting of open cylindrical shell (coating) with supporting elastic arches under the influence of various external loads, including wind load. Internal pressure or reactions supporting arches depend on conditions on the contact surface of the coating and arches. In practice, to realize different fixing conditions. It examines the state of stress only in the case of free-slip and hard cover binding and arches. In the first case, to determine the reactions supporting arches draws the Winkler model, ie response as proportionate deflection surface. In the second case, we propose a

different approach, in which the arch structure is divided into the shell and double arched elements. Under these assumptions, the problem of the bending of arch structures under the action of external forces (weight, wind and snow loads) is reduced to the problem of the interaction of non-closed-layer shell elements with double-layer arched elements.

To determine the wind pressure is considered perturbed cylindrical cover with unseparated cross flow to steady plane flow unbounded ideal incompressible fluid. In determining the velocity potential «secondary» perturbations caused by elastic displacements covering ignored. With these assumptions, the differential equation of the system. The algorithms calculate the arch construction for strength and stability. The formulas for the investigation of the stress-strain state and to determine the critical wind speeds.

Keywords: arch, shell, arched structure, stress – strain state, stability, critical velocity.

References

1. Ilgamov M.A. A bend and stability of a cylindrical cover at its cross-section flow liquid // *Applied mechanics*, 1975. – P. 112-119.
2. Ilgamov M.A., Kamalov A.Z. Fluctuations of a cylindrical cover of final length in the acoustic environment // *Sb. «Researches on the theory of plates and covers»*, IV. – Kazan: KSU publishing house, 1966. – P. 367-376.
3. Kamalov A.Z. To calculation of elements of arch designs // *Mathematical methods and models in applied problems of a science and equipment*. Тр. International conference. «Continual algebraic logicians, calculations and neuroinformatics in a science and equipment and economy», Т.5. – Ulyanovsk, 2003. – P. 54-56.
4. Andreev A.N., Nemirovsky Yu.V. *Multilayered anisotropic covers and plates: Bend, stability, fluctuations*. – Novosibirsk: Science, 2001. – 288 p.