УДК: 624.04
DOI: 10.52409/20731523_2022_3_23
EDN: PWMVRW

Продольный изгиб сжатого упругого стержня с одинаковыми нелинейными поворотными закреплениями на концах с учётом начальной кривизны

Л.И. Хайдаров[1] , Р.А. Каюмов[1], Г.Н. Шмелев[1] , А.Р. Гимазетдинов[1],
[1]Казанский государственный архитектурно-строительный университет
г. Казань, Российская Федерация

Аннотация. *Постановка задачи.* В сборно-разборных металлических каркасных системах узлы соединения ригелей со стойками часто выполняются клинового или чашечного типа. В таких соединениях зависимость изгибающего момента от угла взаимного поворота элементов является нелинейной. На данный момент отсутствует инженерная методика оценки несущей способности стойки, имеющего на концах закрепления с нелинейной поворотной жёсткостью. Целью этой работы является разработка инженерной методики определения предельной силы сжатия для упругого призматического стержня с концевыми закреплениями с одинаковой нелинейной монотонно убывающей поворотной жёсткостью с учётом начальной кривизны. Задачами исследования являются: вывод зависимостей для продольной силы в центрально сжатом стержне при прямолинейной форме и наличии начальной кривизны, анализ установленных зависимостей и получение на их основе способа определения предельной силы сжатия.

Результаты. Получена приближённая формула для определения силы сжатия в упругом стержне в зависимости от его изгибной жёсткости, длины и стрелы начального прогиба, а также функции изгибающего момента и угла поворота на концах.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в том, что предложенная формула позволяет определить предельную силу сжатия упругого стержня с концевыми закреплениями, имеющими одинаковые нелинейные монотонно убывающие поворотные жёсткости, с учётом начальной кривизны, например, для стоек сборно-разборных каркасных систем.

Ключевые слова: продольный изгиб, закритический изгиб, начальная кривизна, нелинейная монотонно убывающая поворотная жёсткость, геометрическая нелинейность.

Для цитирования: Хайдаров Л. И., Каюмов Р. А., Шмелев Г. Н., Гимазетдинов А. Р. Продольный изгиб сжатого упругого стержня с одинаковыми нелинейными поворотными закреплениями на концах с учётом начальной кривизны // Известия КГАСУ. 2022. № 3 (61). С. 23-35, DOI: 10.52409/20731523_2022_3_23, EDN: PWMVRW

Buckling of a concentrically loaded imperfect elastic column with identical nonlinear rotational connections

L.I. Khaidarov[1], R.A. Kayumov[1], G.N. Shmelev [1], A.R. Gimazetdinov[1]
[1]Kazan State University of Architecture and Engineering
Kazan, Russian Federation

Abstract. *Problem statement.* The connections of the demountable metal frame systems are often made of a wedge or cup type. In such connections the dependence of the bending moment on the angle of mutual rotation of the elements is nonlinear. Currently there is no engineering methodology for assessing the bearing capacity of a pillar with non-linear rotational end connections. The purpose of this article is to develop an engineering methodology for determining the ultimate compression force for an elastic prismatic column with nonlinear rotational connections with monotonically decreasing stiffness. The objectives of the study are derivation of dependencies for the normal force in a centrally compressed beam-column with and without initial curvature, analysis of the established dependencies and obtaining a methodology for determining the ultimate compression force.
Results. An approximate formula is obtained for determining the compression force in an elastic column depending on its bending stiffness, the length and initial curvature, the function of the bending moment and the angle of rotation at the ends.
Conclusions. The significance of the obtained results for the construction industry lies in the fact that the proposed formula allows determining the ultimate compression force for an imperfect elastic prismatic column with identical nonlinear rotational connections with monotonically decreasing stiffness.

Keywords: beam-column with non-linear connections, post-buckling behavior, initial curvature, monotonically decreasing stiffness, second-order analysis.

For citation: Khaidarov L. I., Kayumov R. A., Shmelev G. N., Gimazetdinov A. R. Buckling of a concentrically loaded imperfect elastic column with identical nonlinear rotational connections// News KSUAE, 2022. №3 (61), p. 23-35, DOI: 10.52409/20731523_2022_3_23, EDN: PWMVRW.

1. Введение

В качестве несущих каркасов сооружений для культурно массовых мероприятий, таких как трибуны, сцены, башни и т.д. часто применяются металлические каркасные системы сборно-разборного типа. Наравне с несущей способностью от сборно-разборных систем требуется удобство и возможность быстрого монтажа и демонтажа. Преимущественно используются системы с соединениями элементов клинового и чашечного типа. Поворотная жёсткость этих соединений существенно влияет на несущую способность стоек каркаса [1 – 4]. В отечественных нормативных документах, а именно СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции» и СП 294.1325800.2017 «Конструкции стальные. Правила проектирования», представлены методики расчета центрально и внецентренно сжатых стержневых конструкций при линейной зависимости между изгибающими моментами и соответствующими углами поворота на концах. Но в соединениях клинового и чашечного типа зависимость изгибающего момента от угла взаимного поворота соединяемых элементов нелинейна во всем интервале деформирования, при этом поворотная жёсткость монотонно убывает [5 – 9].

Первое теоретическое исследование устойчивости упругого центрально-сжатого стержня было выполнено Л. Эйлером. На данный момент проблемам устойчивости и закритический работе стержней посвящено большое количество работ [10 – 13].

Укажем последние публикации по данной теме. В работах [14 – 17] решены задачи по устойчивости и закритической работе стержней в упругой среде. Обнаружено, что при большой длине стержня после потери устойчивости дальнейшие его деформации происходят даже при силе меньше критической, т.е. происходит явление хлопка.

Устойчивость и формы равновесия упругого стержня, расположенного между двумя жесткими стенками, препятствующими его выпучиванию, рассмотрены в [18]. В работе [19] исследована закритическая работа нелинейно упруго закрепленного стержня от поворота и предложен итеративный метод по расчету его податливости. Результаты, полученные согласно предложенному методу, сравниваются с известными аналитическими решениями в технической литературе и с результатами, полученными на конечно-элементных моделях с использованием программы ABAQUS. В работе [20] предложен аналитический метод оценки устойчивости, изгибающих моментов, поперечных сил и прогибов стоек с учётом начальной кривизны, крена и эксцентриситетов приложения сил сжатия при нелинейно работающих концевых закреплениях. Способ решение является итеративным.

Для правильного проектирования сооружений на основе сборно-разборных каркасных систем необходимо разработать простую и надёжную инженерную методику определения несущей способности стоек сборно-разборных каркасных систем. Как часть разработки такой методики, в данной работе исследуется продольный изгиб упругого призматического стержня с концевыми закреплениями с одинаковой нелинейной поворотной жёсткостью с учётом начальной кривизны с целью определения предельной силы сжатия.

Целью работы является разработка инженерной методики определения предельной силы сжатия для упругого призматического стержня с концевыми закреплениями с одинаковой нелинейной монотонно убывающей поворотной жёсткостью с учётом начальной кривизны. При этом задачами исследования являются:

– вывод зависимостей для продольной силы в центрально сжатом стержне при прямолинейной форме и наличии начальной кривизны;

– анализ установленных зависимостей и получение на их основе способа определения предельной силы сжатия для стержня.

2. Материалы и методы

Как известно, первой критической силе для стержня с шарнирным закреплением обоих концов соответствует форма равновесия в виде полуволны синусоиды, для стержня с жёстким защемлением обоих концов – в виде одной волны синусоиды. Так как идеальный шарнир и абсолютное защемление являются двумя предельными случаями поворотного закрепления с конечной жёсткостью, форма равновесия стержня с конечной поворотной жёсткостью концевых закреплений, соответствующая первой критической силе, будет в виде части синусоиды от полуволны до одной волны. При одинаковых концевых закреплениях эта форма будет симметричной относительно середины длины стержня (рис. 1, а). При изгибе стержня закрепления оказывают сопротивление повороту концов стержня в виде реактивных моментов. Рассмотрим упругий стержень длиной l [см] и изгибной жёсткостью EJ [кН·см^2] под действием сжимающих сил P [кН] с учётом замены поворотных закреплений одинаковыми концевыми моментами M_1 [кН·см] (рис. 1, б). Будем иметь в виду, что при такой замене возникают дополнительные формы равновесия, соответствующие случаям поворота концов стержня по направлению действия концевых моментов, которые не представляют для нас интереса («форма I» на рис. 1, б).

Основное уравнение изогнутой оси сжатого стержня с одинаковыми моментами на концах имеет вид [10]:

$$EJ\frac{d^2y}{dz^2} = -Py + M_1 \tag{1}$$

Введя обозначение $k = \sqrt{P/EJ}$ уравнение упругой линии представим в виде:

$$y = A\,sin(kz) + B\cos(kz) + \frac{M_1}{k^2EJ} \tag{2}$$

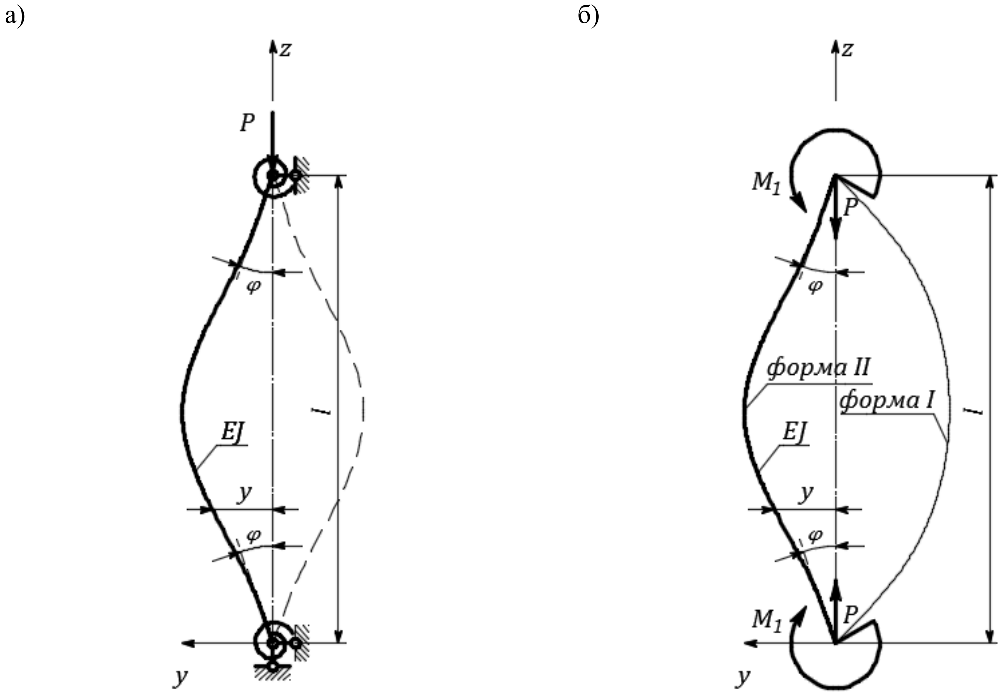


Рис. 1. Первые формы равновесия стержня:
а) с одинаковыми концевыми поворотными закреплениями; б) с одинаковыми концевыми моментами (иллюстрация авторов)
Fig. 1. Lower forms of beam-column equilibrium: а) with identical rotational connections; б) with equal end moments (author's illustration)

С учётом граничных условий $y(0) = y(l) = 0$ получим:

$$y = \frac{M_1}{k^2 EJ}\left(1 - tg(k\,l/2)\,sin(kz) - cos\,(kz)\right) \tag{3}$$

Первая производная от функции прогиба равна:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{M_1}{kEJ}\left[sin(kz) - cos(kz)\,tg(k\,l/2)\right] \tag{4}$$

В опорных сечениях угол поворота осевой линии определяется выражением:

$$\varphi = -\frac{M_1}{kEJ}\,tg\left(\frac{k\,l}{2}\right) \tag{5}$$

Соотношение (5) означает, что упругий стержень длиной l и изгибной жёсткости EJ с концами, повёрнутыми на угол φ, будет находиться в состоянии равновесия под действием сжимающих сил P (соответствующих значению параметра k) и одинаковых концевых моментов M_1.

Приведём уравнение (5) к следующему виду:

$$\frac{k\,l/2}{tg(k\,l/2)} = -\frac{M_1 l}{2\,\varphi\,EJ} \tag{6}$$

Чтобы выразить k через остальные параметры решим уравнение (6) для ($k\ l\ /\ 2$). Наличие периодической функции тангенса в уравнении (6) свидетельствует о бесконечном количестве решений. Нас интересует наименьшее решение при положительном значении отношения ($M_1\ /\ \varphi$), т.е. при взаимно противоположных направлениях угла поворота стержня на опоре и концевого момента, так как в дальнейшем концевой момент будет рассматриваться как реактивный момент. Это решение соответствует форме II на рис. 1, б. Вышеуказанным условиям соответствует интервал [$\pi/2$; π]. Для получения приближённого решения левую часть уравнения (6) в указанном интервале можно аппроксимировать следующей алгебраической функцией:

$$f_{\text{a}} = \zeta \frac{(\pi/2)-(k\,l/2)}{\pi-(k\,l/2)} \qquad (7)$$

где ζ – коэффициент, влияние которого на погрешность решения, вызванной аппроксимацией, будет рассмотрено далее в работе.

Выразим k с учётом замены левой части уравнения (6) функцией (7):

$$k \approx \frac{\pi}{l}\left(1 + \frac{1}{1 + 2\,\zeta \dfrac{\varphi}{M_1}\dfrac{EJ}{l}}\right) \qquad (8)$$

Отметим, что при постоянных значениях длины l и изгибной жёсткости EJ стержня уравнение (5) может быть удовлетворено для всех комбинаций значений M_1 и φ за счёт соответствующего значения параметра k, т.е. решение (8) является общим для всех значений M_1 и φ, соответствующих условию (M_1 / φ > 0), в том числе и для случая функциональной зависимости между ними.

Запишем уравнения кривой состояний равновесия:

$$P = k^2EJ \approx \frac{\pi^2\,EJ}{l^2}\left(1 + \frac{1}{1 + 2\,\zeta \dfrac{\varphi}{M_1}\dfrac{EJ}{l}}\right)^2 \qquad (9)$$

Оценим погрешность приближённого решения по формуле (9), вызванной аппроксимацией по формуле (7). Для этого примем условно 1000 значений $(k\;l\,/\,2)_{i,\ \text{точн.}}$, равномерно расположенные в интервале [$\pi/2$; π]. Далее найдем соответствующие им значения отношений по формуле (6):

$$\left(\frac{-M_1 l}{2\,\varphi\,EJ}\right)_i = \frac{(k\,l/2)_{i,\text{точн.}}}{tg(k\,l/2)_{i,\text{точн.}}} \qquad (10)$$

Вычислим приближённые решения по следующей формуле:

$$\left(\frac{kl}{2}\right)_i = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{1+\,\zeta/(-M_1 l/2\,\varphi\,EJ)_i}\right) \qquad (11)$$

Оценим относительную погрешность приближённого решения по формуле (9) следующим образом:

$$\delta_P = \frac{P - P_{\text{точн.}}}{P_{\text{точн.}}}\cdot 100\% = \frac{(k\,l/2)_i^2 - (k\,l/2)_{i,\text{точн.}}^2}{(k\,l/2)_{i,\text{точн.}}^2}\cdot 100\% \qquad (12)$$

На рис. 2. представлены графики изменения ширины интервала относительной погрешности $\delta_{P,\sum}$, а также её наибольшего $\delta_{P,max}$ и отрицательного значений $\delta_{P,min}$, вычисленных по формуле (12) для всех выбранных точек $(kl/2)_{i,\ \text{точн.}}$ ∈ [$\pi/2$; π], при значениях коэффициента $\zeta \in [2; 3]$. Отрицательная погрешность отсутствует при $\zeta \in [0; 2]$ и растёт при $\zeta > 2$. Положительная погрешность при $\zeta \in [0;2{,}48]$ убывает и $\zeta > 2.48$ равна 0. Минимальная ширина интервала относительной погрешности соответствует $\zeta \approx 2{,}44$: $\delta_{P,\sum}$ = 2,30%; $\delta_{P,max}$ = +0,16%; $\delta_{P,min}$ = -2,14%.

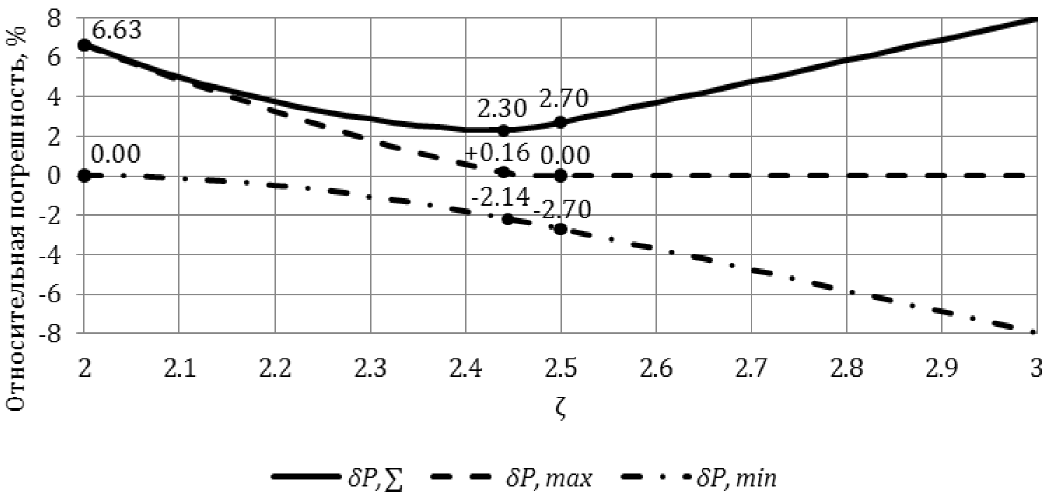


Рис. 2. К оценке относительной погрешности формулы (9) (иллюстрация авторов)
Fig. 2. For the estimation of relative error of the formula (9) (author's illustration]

Для дальнейшего исследования примем ζ = 2,5 для исключения завышенных значений продольной силы по формуле (9), при этом наибольшая отрицательная погрешность составляет -2,7%, что достаточно точно для инженерных расчетов.

В случае стержня с одинаковыми концевыми поворотными закреплениями при повороте концов стержня будут возникать реактивные опорные моменты, являющиеся функциями углов поворота:

$$M_1 = M_{оп}(\varphi) \tag{13}$$

С учётом (10) и ζ = 2,5 перепишем уравнение (9):

$$P \approx \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left(1 + \frac{1}{1 + 5\dfrac{\varphi}{M_{оп}}\dfrac{EJ}{l}}\right)^2 \tag{14}$$

Из формулы (14) видно, что при постоянных значениях изгибной жёсткости EJ и длины l наибольшее значение силы сжатия соответствует наибольшему значению отношения ($M_{оп}/\varphi$), т.е. секущей поворотной жёсткости опорного узла.

Далее рассмотрим стержень с учётом начальной кривизны, которая равна кривизне дуги окружности со стрелой прогиба a. Пусть при сжатии работа упругого стержня с одинаковыми нелинейными поворотными опорами концов, которые повернуты на соответствующий начальный угол φ_0, эквивалентна работе прямолинейного упругого стержня, изогнутого концевыми моментами M_0 с поворотными опорами, которые начинают сопротивляться только после поворота концов стержня на угол φ_0 (рис. 3):

$$M_1 = M_{оп}(\varphi - \varphi_0) - M_0 \tag{15}$$

Здесь:

$M_0 = 8\ a\ EJ / l^2$ – концевые изгибающие моменты, обеспечивающие искривление стержня по стреле окружности со стрелой начального прогиба a;

$\varphi_0 = 4\ a / l$ – начальный угол поворота концов стержня.

Запишем уравнение кривой состояний равновесия (9) с учётом (15) и замены аргумента φ на ($\varphi + \varphi_0$) для установления в качестве начала отсчёта угла поворота φ_0:

$$P \approx \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left(1 + \frac{1}{1 + 5\dfrac{(\varphi + \varphi_0)}{(M_{оп} - M_0)}\dfrac{EJ}{l}}\right)^2 \tag{16}$$

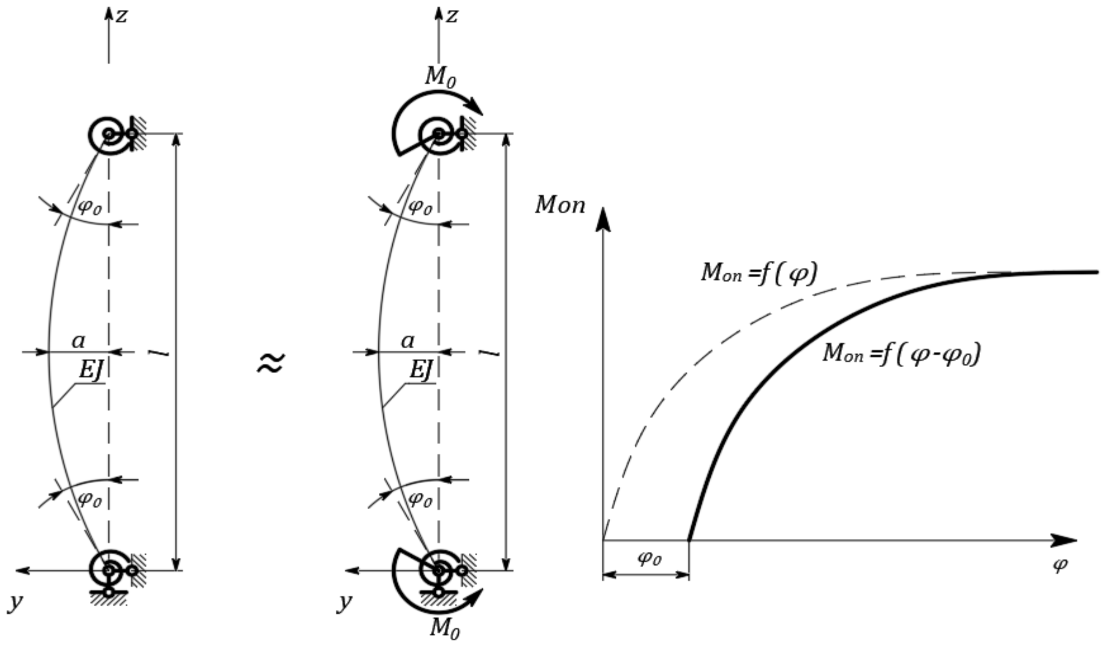


Рис. 3. К расчету стержня с одинаковыми нелинейными поворотными опорами с учётом начальной постоянной кривизны
(иллюстрация авторов)
Fig. 3. For the calculation of the beam-column with identical nonlinear rotational connections taking into account initial constant curvature
(author's illustration)

Для проверки формулы (16) воспользуемся решением методом конечных элементов в ПК «ANSYS» в геометрически нелинейной постановке. Работу концевых закреплений зададим в виде кусочно-линейной диаграммы. Нагружение подвижного конца стержня выполним кинематически. В качестве кривой состояний равновесия примем график на основе ряда углов поворота и соответствующих опорных реакций у неподвижного конца стержня, полученных в процессе нагружения.

3. Результаты и обсуждение

Для проверки формулы (14), в первую очередь, покажем ее результаты для классических задач устойчивости стержней с опорами с одинаковой постоянной поворотной жёсткостью, т.е. при одинаковой линейной зависимости между изгибающим моментом и углом поворота в опорных узлах. Отметим, что структура формулы (14) подобна структуре формулы Эйлера:

$$P_{\text{crit}} = \pi^2\, EJ \,/\, (\mu\, l)^2 \tag{17}$$

и выражение в скобках формулы (14) соответствует обратному значению коэффициента расчетной (приведённой) длины:

$$\mu = \frac{\dfrac{M_{\text{оп}}}{\varphi}\dfrac{l}{EJ} + 5}{2\dfrac{M_{\text{оп}}}{\varphi}\dfrac{l}{EJ} + 5} \tag{18}$$

Ниже представим результаты расчета μ по формуле (18) для стержней с опорами с одинаковой постоянной поворотной жёсткостью (табл. 1).

Коэффициенты расчетной длины стержней Таблица1

№	Концевые закрепления от поворота	Отношение ($M_{\text{оп}}/\varphi$),	Коэффициент

п/п		кН·см	расчетной длины μ
1	Идеальный шарнир	0	1
2	Абсолютно жёсткое защемление	∞	0.5
3	Упругие шарниры с конечной линейной поворотной жёсткостью	c_m	$\dfrac{\frac{c_m l}{EJ}+5}{2\frac{c_m l}{EJ}+5}$

Далее рассмотрим случаи нелинейной зависимости между опорным изгибающим моментом и углом поворота следующего вида:

$$M_{оп} = c_0\, \varphi \,/\, (1 + c_1\, \varphi) \tag{19}$$

где c_0 и c_1 – коэффициенты, определяющие начальную поворотную жёсткость и скорость её изменения.

Такой вид аппроксимации зависимости изгибающего момента от угла поворота принят для узлов соединения ригеля со стойкой многих модульных каркасных систем сборно-разборного типа.

Определим кривые состояний равновесия для трёх численных примеров зависимости опорного изгибающего момента от угла поворота (табл. 2). Значение изгибной жёсткости, указанной в таблице 2, соответствует изгибной жёсткости стальной трубы Ø48,3×3,2 (мм) в упругой стадии работы. Графики зависимостей опорного изгибающего момента от угла поворота для примеров представлены на рис. 4. Для стержня с указанными значениями длины и изгибной жёсткости при начальной поворотной жёсткости, принятой в примере №1, закрепление в начале поворота близко к идеальному шарниру, в примере №2 – к полужёсткому соединению, в примере №3 – к абсолютному защемлению.

Значения параметров Таблица 2

№ примера	Длина стержня l, см	Изгибная жёсткость стержня EJ, кН·см^2	Коэффициенты функции $M_{оп}$ (φ)	
			c_0, кН·см	$c1$
1	200	239 000	100	1
2			10 000	100
3			100 000	1 000

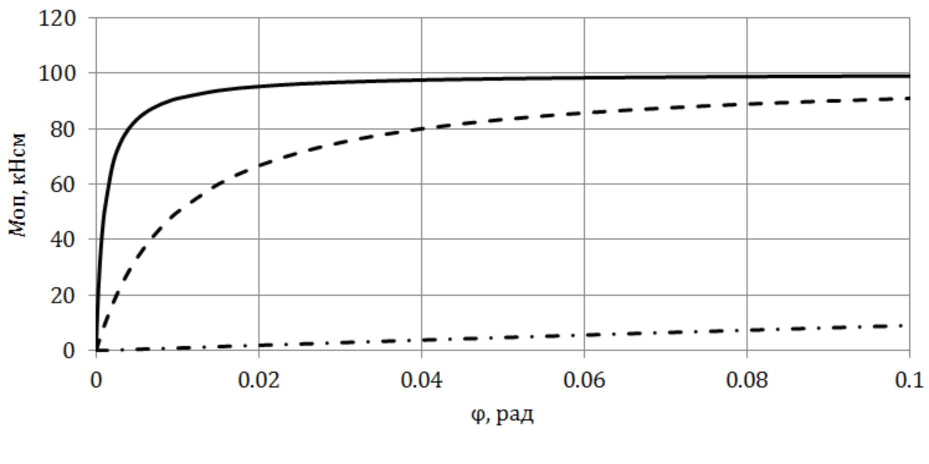


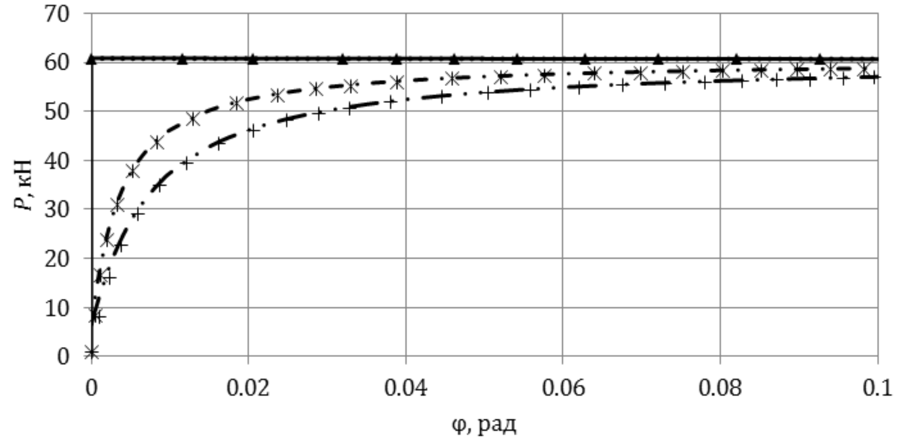
Рис. 4. Графики зависимостей опорного изгибающего момента от угла поворота (иллюстрация авторов)

Fig. 4. Plot of the bending moment of rotation angle (author's illustration)

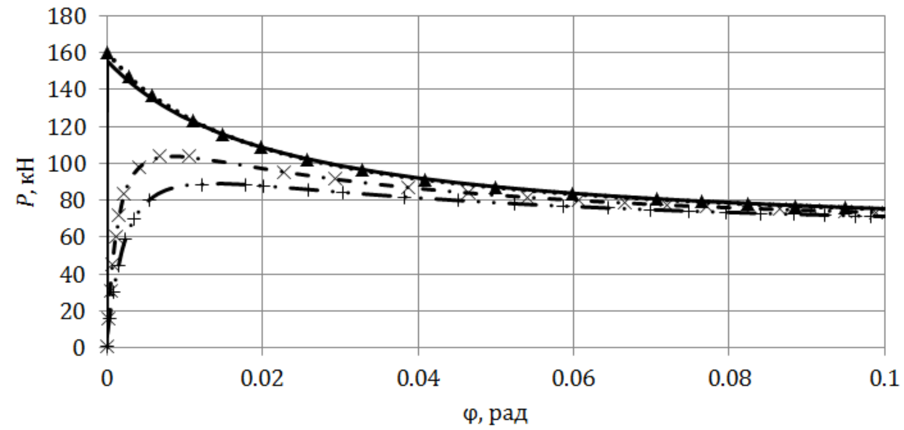
Кривые состояний равновесия для вышеуказанных случаев при отсутствии начальной кривизны и при её наличии с относительной стрелой прогиба 1/1000 и 1/500, полученные по формуле (13), представлены на рис. 5 (обозначено как Аналит. I).

На рис. 5 также представлены графики аналитического решения при отсутствии начальной кривизны по методу, представленному в работе Каюмова Р. А. и др.[1] (обозначено Аналит. II) и численного решения при наличии начальной кривизны стержня (обозначено как Числ.).

а)



б)



в)

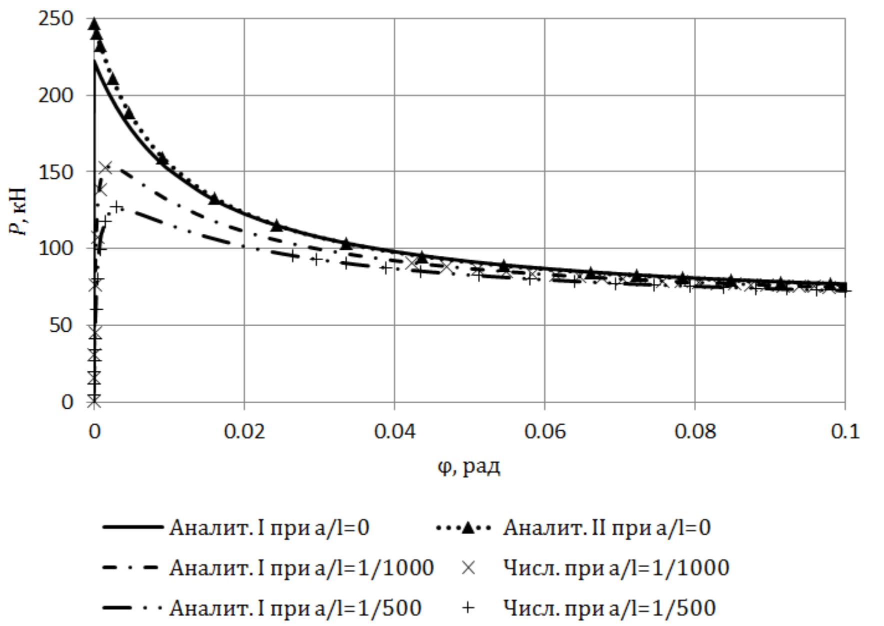


Рис. 5. Кривые состояний равновесия для примеров: а) №1; б) №2; в) №3 (иллюстрация авторов)
Fig. 5. Curves of equilibria for examples а) №1; б) №2; в) №3 (author's illustration)

[1]Каюмов Р. А., Хайдаров Л. И., Гимазетдинов А. Р. Податливость сжатых стержней с упругой опорой с учётом их закритического поведения // Известия КГАСУ. 2021. № 3 (57). С. 5–12. DOI: 10.52409/20731523_2021_3_5. [Kayumov R. A., Khaidarov L. I., Gimazetdinov A. R. Compliance of compressed beam-columns with semi-rigid supports, taking into account their post-buckling behavior // News of the KSUAE. 2021. Iss. 3 (57). P. 5–12. DOI: 10.52409/20731523_2021_3_5].[1]

В первую очередь сделаем анализ решений, полученных по формуле (14) для стержней с опорами с одинаковой постоянной поворотной жёсткостью. В данном случае согласно формуле (14) значение продольной силы не зависит от угла поворота концов стержня. Это справедливо при малых углах наклона в связи с приближённым видом уравнения (1). На самом деле после потери устойчивости согласно эластике Эйлера [13] происходит медленный рост продольной силы в стержне, но в связи с малостью изменения этой силы, для большинства задач в строительстве им можно «в запас» пренебречь.

Легко видеть, что значения, представленные в таблице для стержней с идеальными шарнирами и абсолютным защемлением концов, соответствуют известным решениям. В случае конечной поворотной жёсткости концевых опор коэффициент расчетной длины, вычисляемый по формуле (18), приближённо равен его значению, представленному в СП 294.1325800.2017:

$$\mu = (n + 4.8) / (2\, n + 4.8) \tag{20}$$

где $n = c_{\text{m}}\, l \,/\, EJ$;

c_{m} – поворотная жёсткость концевых закреплений.

Далее выполним анализ кривых состояний равновесия стержня с закреплениями, имеющими монотонно убывающие поворотные жёсткости (рис. 5). Зависимости, полученные по формуле (16) и другими методами, аналогичны. Однако при отсутствии начальной кривизны наибольшая сила сжатия соответствует прямолинейному стержню. После поворота концов состояние стержня становится неустойчивым и его равновесие возможно только при уменьшении силы сжатия.

При наличии начальной кривизны на графиках можно наблюдать максимумы силы сжатия (рис. 5 б, в). После экстремума стержень переходит в состояние неустойчивого равновесия. Согласно формуле (16) точка экстремума соответствует наибольшему значению отношения $(M_{\text{оп}} - M_0)\,/\,(\varphi + \varphi_0)$ и предельную силу сжатия для стержня можно определить по условию (21) или графическим способом, построив кривую состояний равновесия.

$$\frac{\partial\,(M_{\text{оп}} - M_0)/(\varphi + \varphi_0)}{\partial \varphi} = 0 \tag{21}$$

Отметим, что увеличение начальной стрелы прогиба упругого стержня с закреплениями с монотонно убывающей поворотной жёсткостью, в отличие от закреплений с постоянной жесткостью, приводит к уменьшению предельной силы сжатия.

В таблице 3 представлены значения предельных сил сжатия для рассмотренных примеров, вычисленных по формуле (16) и по другим вышеуказанным методам. Относительная разница результатов по формуле (16) по сравнению с остальными решениями находится в пределах (-3; +1) %, соответственно, формула (16) достаточно точно и просто позволяет определить значение предельной силы сжатия для упругого стержня с концевыми закреплениями с одинаковой нелинейной монотонно убывающей поворотной жёсткостью с учётом начальной кривизны.

Результаты расчета для примеров №1 – 3 Таблица 3

№ п/п	Пример	Относительный прогиб *a/l*	Способ решения	Наибольшая сила сжатия, кН	Относительная разница, %
1	№1	0	Аналит. I	60.85	–
2			Аналит. II	60.85	0.0
3		1/1000	Аналит. I	58.9	–
4			Числ.	59.54	-1.1
5		1/500	Аналит. I	57.24	–
6			Числ.	58.58	-2.3

Результаты расчета для примеров №1 – 3 Таблица 3

№ п/п	Пример	Относительный прогиб *a/l*	Способ решения	Наибольшая сила сжатия, кН	Относительная разница, %
7	№2	0	Аналит. I	155.71	–
8			Аналит. II	159.99	-2.7
9		1/1000	Аналит. I	103.80	–
10			Числ.	104.08	-0.3
11		1/500	Аналит. I	89.04	–
12			Числ.	88.24	+0.9
13	№3	0	Аналит. I	222.36	–
14			Аналит. II	222.48	-0.1
15		1/1000	Аналит. I	153.54	–
16			Числ.	153.01	+0.3
17		1/500	Аналит. I	125.53	–
18			Числ.	127.16	-1.3

4. Заключение

1. Получены зависимости для продольной силы в упругом стержне с концевыми закреплениями, имеющими одинаковые нелинейные поворотные жёсткости, при центральном сжатии, аргументами которых являются изгибная жёсткость стержня, ее длина, значение начальной кривизны, изгибающий момент, углы поворота на концах. Относительная разница результатов по предложенной формуле (16) по сравнению с остальными решениями находится в пределах (-3; +1) %.
2. Для прямолинейного упругого стержня, имеющего одинаковые концевые закрепления с одинаковой поворотной жёсткостью, наибольшее значение силы сжатия соответствует прямолинейной форме. После поворота концов состояние стержня становится неустойчивым и её равновесие возможно только при уменьшении силы сжатия.
3. Выявлено, что для упругого стержня, имеющего начальную кривизну и концевые закрепления с одинаковыми монотонно убывающими поворотными жёсткостями, на кривой состояний равновесия имеется точка экстремума, а именно максимум. Указаны способы определения предельной силы сжатия, соответствующей этому максимуму.
4. Увеличение начальной кривизны упругого стержня с закреплениями с монотонно убывающей поворотной жёсткостью, в отличие от случая с постоянной жесткостью, приводит к уменьшению предельной силы сжатия.

Список литературы/ References

1. Peng J. L., Ho C. M., Chan S. L., Chen W. F. Stability study on structural systems assembled by system scaffolds // Journal of Constructional Steel Research. 2017. V. 137, P. 135–151. DOI: 10.1016/J.JCSR.2017.06.004.
2. Mercier C., Khelil A., Al Mahmoud F., Blin-Lacroix J. L., Pamies A. Experimental investigations of buckling behaviour of steel scaffolds // Structures. 2021. V. 33. P. 433–450. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2021.04.045.
3. Liu H., Jia L., Wen S., Liu Q., Wang G., Chen Z. Experimental and theoretical studies on the stability of steel tube-coupler scaffolds with different connection joints // Engineering Structures. 2016. V. 106. P. 80–95. DOI: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2015.10.015.
4. Dewobroto W., Chendrawan W. Ultimate Load Capacity Analysis of Steel Scaffoldings Using Direct-Analysis Method // Practice Periodical on Structural Design and Construction. 2018. V. 23. № 4. DOI: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000392.
5. Beale R., André J. Design Solutions and Innovations in Temporary Structures // Târgovişte: IGI Global, 2017. 503 p.
6. Zheng Y., Guo Z. Investigation of joint behavior of disk-lock and cuplok steel tubular scaffold // Journal of Constructional Steel Research. 2021. V. 177. DOI: 10.1016/J.JCSR.2020.106415.

7. Pieńko M., Błazik-Borowa E. Experimental studies of ringlock scaffolding joint. Journal of Constructional Steel Research. 2020. V. 173. DOI: 10.1016/J.JCSR.2020.106265.
8. Pisarek, Z., Sudoł P. Experimental tests of joints in scaffolding system. // Proceedings of CEE 2019. Advances in resource-saving technologies and materials in civil and environmental engineering. 2019. V. 47. P. 331–339. DOI: 10.1007/978-3-030-27011-7_42.
9. Błazik-Borowa E., Szer J., Borowa A., Robak A., Pieńko M. Modelling of load-displacement curves obtained from scaffold components tests // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. 2019. V. 67. Iss. 2. P. 317–327. DOI: 10.24425/bpas.2019.128602.
10. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. : Наука, 1971. 808 с. [Timoshenko S. P. Stability of rods, plates and shells. M. : Nauka, 1971. 808 p.].
11. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М. : Физматгиз, 1963. 880 с. [Vol`mir A. S. Stability of elastic systems. M. : Phymathgis, 1963. 880 p.].
12. Ржаницын А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М. : ГИИТЛ, 1955. 478 с. [Rghanitsyn A. R. Stability of equilibria of elastic systems. M. : GIITL, 1955. 478 p.].
13. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с. [Rabotnov Yu. N. Solid mechanics. M.: Nauka, 1988. 712 p.]
14. Каюмов Р. А. Закритическое поведение сжатых стержней в упругой среде // Известия РАН. Механика твердого тела. 2017. №5. С. 122–129. DOI: 10.3103/S0025654417050120 [Каюмов Р. А. Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium // Mech. Solids. 2017. Iss. 5. P. 122–129. DOI: 10.3103/S0025654417050120].
15. Areiza-Hurtado M., Aristizábal-Ochoa J. D. Second-order analysis of a beam-column on elastic foundation partially restrained axially with initial deflections and semirigid connections // Structures. 2019. V. 20. P. 134–146. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2019.03.010.
16. Carvajal-Munoz J. S., Vega-Posada C. A., Saldarriaga-Molina J. C. Analysis of beam-column elements on non-homogeneous soil using the differential transformation method. // Revista Facultad de Ingenieria. 2022. № 103, P. 67–76. DOI: 10.17533/udea.redin.20210218.
17. Yayli, M. Ö. Buckling analysis of Euler columns embedded in an elastic medium with general elastic boundary conditions // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2018. №46, P. 110–122. DOI: 10.1080/15397734.2017.1292142.
18. Тарасов В. Н. Об упругой линии сжимаемого продольной силой стержня, расположенного между двумя жёсткими стенками // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2018. Вып. 1 (26). С. 29–46 [Tarasov V. N. On the elastic line of the rod compressible by longitudinal force located between two rigid walls, Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics. 2018. Iss. 1 (26). P. 29–46].
19. Giraldo-Londoño O., Monsalve-Giraldo J. S., Aristizabal-Ochoa J. D. Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Т. 77. С. 85-95. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2015.07.009.
20. Aristizabal-Ochoa, J. D. Stability of imperfect columns with nonlinear connections under eccentric axial loads including shear effects // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Т. 90. С. 61–76. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.11.005.

Информация об авторах.

Ленар Ильнурович Хайдаров, ассистент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация
Email: haidarov_lenar@mail.ru
Рашит Абдулхакович Каюмов, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация
Email: kayumov@rambler.ru
Геннадий Николаевич Шмелев, кандидат технических наук, доцент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

Email: gn.shmelev@mail.com
Айваз Расимович Гимазетдинов аспирант, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация
Email: aivazaivaz1313@gmail.com

Information about the authors

Lenar Ilnurovich Khaidarov, assistant, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia
Email: haidarov_lenar@mail.ru
Rashit Abdulhakovich Kayumov, doctor of physical-mathematical sciences, professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia
Email: kayumov@rambler.ru
Genadij Nikolaevich Shmelev candidate of technical sciences, associate professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia
E-mail: gn.shmelev@mail.ru
Aivaz Rasimovich Gimazetdinov post-graduate student, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia
Email: aivazaivaz1313@gmail.com