

УДК 624.04 Каюмов Рашит Абдулхакович доктор физико-математических наук, профессор Email: kayumov@rambler.ru Хайдаров Ленар Ильнурович ассистент Email: haidarov_lenar@mail.ru Гимазетдинов Айваз Расимович аспирант Email: aivazaivaz1313@gmail.com Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1

Податливость сжатых стержней с упругой опорой с учетом их закритического поведения¹

Аннотация

Постановка задачи. Исследуются большие прогибы загруженных сжимающей силой стержней, имеющих в шарнирных опорах нелинейно упругое сопротивление повороту их оси. Целью работы является разработка методики вычисления податливости сжатых стержней с учетом их закритического изгиба при наличии нелинейно упругого сопротивления повороту на опоре.

Результаты. Получено разрешающее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, приведена методика ее решения.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в том, что с использованием предложенной методики можно выполнить расчет статически неопределимых сооружений с учетом потери устойчивости стержневых элементов с нелинейно упругими закреплениями и выявить запас их несущей способности.

Ключевые слова: стержень с нелинейно упругой опорой, закритический изгиб, геометрическая нелинейность, податливость сжатого стержня, потеря устойчивости хлопком.

Для цитирования: Каюмов Р. А., Хайдаров Л. И., Гимазетдинов А. Р. Податливость сжатых стержней с упругой опорой с учетом их закритического поведения // Известия КГАСУ. 2021. № 3 (57). С. 5-12. DOI: 10.52409/20731523_2021_3_5.

1. Введение

В статически неопределимых системах потеря несущей способности избыточных элементов, за исключением абсолютно необходимых, не приводит к потере несущей способности всего сооружения [1]. Для определения общей несущей способности такого сооружения необходимо знать поведение этих элементов после перехода в новое состояние.

Одним из примеров многократно статически неопределимых систем являются сооружения из модульных строительных лесов, которые в настоящее время, кроме основного назначения, используются и в качестве несущего каркаса временных зданий и сооружений при проведении культурно-массовых мероприятий. Модуль системы в виде прямоугольной ячейки состоит из вертикальных, горизонтальных и наклонных стержней, называемых, соответственно, стойками, ригелями и раскосами или диагоналями. Стойки, в основном, работают на сжатие и их несущую способность определяет потеря устойчивости [2-5]. Все стойки системы изготавливаются из круглых труб одного диаметра из стали или алюминия, их устойчивость обеспечивается вертикальными раскосами и ригелями. Одной из отличительных особенностей этих систем является

¹Работа выполнена в рамках РФФИ (проект №19-08-00349, разделы 1, 2) и РНФ (проект №19-19-00059, разделы 3,4).

нелинейная работа узлов соединения ригеля со стойкой, а именно, нелинейная зависимость между углом поворота и изгибающим моментом [6, 7]. При эксплуатации изза перегрузки или разности осадок основания, потеря устойчивости одной стойки может произойти раньше остальных, но при этом элемент полностью не выключается из работы – его жесткость уменьшается, и он продолжает нести часть нагрузки, а часть нагрузки перераспределяется на соседние стойки. В связи с этим представляет интерес работа сжатой стойки после потери устойчивости с учетом нелинейной работы узла, а именно, зависимость ее податливости от усилия сжатия.

Проблемам устойчивости и закритического поведения элементов конструкций посвящено огромное количество работ как отечественных, так и зарубежных ученых, в т.ч. [8-11]. Ниже рассмотрены только работы, наиболее близкие к теме предлагаемого исследования.

В работах [9,10] для вычисления податливости стержней с линейным упругим закреплением на концах после потери устойчивости предложено численное решение системы эллиптических уравнений, что может быть довольно трудоемким. При этом учтены только изгибные деформации, деформации укорочения не учтены.

В [12] представлен анализ стержня на упругом основании с начальными поперечными прогибами и упругими закреплениями на концах с учетом деформаций, сжатия, изгиба и сдвига. Предложенный метод позволяет описать закритическое поведение элемента, но при этом рассмотрены только линейно упругие закрепления.

В работе [13] исследована закритическая работа нелинейно упруго-закрепленного стержня от поворота и предложен итеративный метод по расчету его податливости. Результаты, полученные согласно предложенному методу, сравниваются с известными аналитическими решениями в технической литературе и с результатами, полученными на конечно-элементных моделях с использованием программы ABAQUS, но в работе рассмотрена только модель узла с уменьшающейся жесткостью при повороте.

Жесткость узла стержней вследствие поворота может не только уменьшаться, но и возрастать, особенно, на начальном этапе нагружения, в связи с выработкой зазоров до полного соприкосновения рабочих поверхностей элементов узла [14, 15].

Целью работы является разработка методики вычисления податливости сжатых стержней с учетом их закритического изгиба, при наличии нелинейно упругого сопротивления повороту на опоре. При этом задачами исследования являются:

– вывод соотношений для вычисления податливости стержня после потери устойчивости с учетом деформаций, укорочения и изгиба;

– анализ зависимостей между различными параметрами напряженнодеформированного состояния стержня при закритическом изгибе.

2. Материалы и методы

a)

Рассмотрим шарнирно закрепленный стержень, изогнутый сжимающей силой *P* (см. рис. 1 а). Считаем, что на опорах имеется упругое сопротивление повороту оси балки (далее будем их называть пружинами). Влияние пружин представим в виде:



(1)



б)



Рис. 1. Стержень с упругими опорами после потери устойчивости:

а) деформированная схема;

б) схема к определению изгибающего момента в произвольном поперечном сечении стержня (иллюстрация авторов)

Жесткость пружин может зависеть от их деформации, т.е. от угла ϕ_0 . Здесь примем, что пружины одинаковы на обоих опорах.

Для определения реальной зависимости прогиба у от *P* рассмотрим задачу в геометрически нелинейной постановке.

Обозначим через *s* длину дуги, отсчитываемой от точки *A*, полную длину балки обозначим через *L*, а угол наклона касательной к оси балки – через φ (см. рис. 1 б). Имеем соотношения:

$$\frac{dz}{ds} = \cos\varphi, \frac{dy}{ds} = \sin\varphi \tag{2}$$

Рассмотрим левую часть балки, отсеченную на расстоянии z от опоры A (см. рис. 2). Вычислим изгибающий момент M_x :

$$M_x = c \cdot \varphi_0 - P \cdot y \tag{3}$$

Считая, что для стержня справедлив закон Гука, а именно, что кривизна оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту, уравнение изгиба элемента балки запишем в виде:

$$EJ\frac{d\varphi}{ds} = M_x \tag{4}$$

При этом для вычисления M_x необходимо знать функции y(s), z(s). Как следует из (2):

$$z = \int_0^s \cos\varphi \, ds, \, y = \int_0^s \sin\varphi \, ds \tag{5}$$

После подстановки в (4) выражения (3) с учетом (5) получаем следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение относительно $\varphi(s)$:

$$EJ\frac{d\varphi}{ds} = c \cdot \varphi_0 - P \cdot \int_0^{\infty} \sin\varphi \, ds \tag{6}$$

Поскольку рассматриваются деформации, симметричные относительно центрального сечения стержня, то для $\varphi(s)$ можно принять аппроксимацию в следующем виде:

$$\varphi = a(2s - L) + \theta_1 \cos\frac{\pi s}{L} + \theta_3 \cos\frac{3\pi s}{L} + \theta_5 \cos\frac{5\pi s}{L} + \cdots,$$
(7)

где $a, \theta_1, \theta_3, \theta_5, ... -$ параметры аппроксимирующей функции.

ω₀ :

Связь ϕ_0 (см. рис. 2) с параметрами θ_1 , θ_3 , θ_5 вытекает из (7) при s = 0:

$$= a \cdot L + \theta_1 + \theta_3 + \theta_5 + \dots$$

Отметим, что при малых углах φ и при c = 0, оставляя в (7) только первое слагаемое и используя соотношения $\sin \varphi \approx \varphi$ и $\cos \varphi \approx 1$, можно из уравнения (6) получить классическое выражение для *P* в виде:

$$P = P_{crit} = \frac{\pi^2 E J}{L^2} \tag{9}$$

(8)

Для пружин в нелинейно упругом случае соотношение (1) представим в виде:

$$M_x = c(\varphi_0) \cdot \varphi_0 \tag{10}$$

Далее в качестве ведущего будем считать параметр φ_0 . Уравнение (6) можно решать, например, методом коллокаций. Подстановка (7) в (6) при различных значениях $s = s_i$ ($s = s_1$, $s = s_2$) дает зависимости между *P*, *a* и φ_0 . Интегрирование в (6) приходится проводить численно.

Далее, численные эксперименты показали, что в случае применения аппроксимации (7) в ней достаточно ограничиться первыми двумя слагаемыми даже при достаточно больших значениях угла φ , т.е. принять, что $\theta_3 = \theta_5 = ... = 0$.

Для вычисления податливости сжатых стержней с учетом их закритического поведения и наличия рассматриваемой нелинейно упругой опоры нужно учесть, вопервых, изменение их длины (укорочение ΔL от сжатия), во-вторых, необходимо уметь определять перемещение подвижного торца в результате закритического изгиба. Это дает следующее выражение для перемещения правого торца $u_z(L)$:

$$u_z(L) \approx -\frac{P \cdot L}{E \cdot A} + L - \int_0^L \sqrt{1 + tg^2 \varphi} \, ds \tag{11}$$

Податливость будем обозначать через *S*. Тогда относительное перемещение загруженного торца можно представить в виде:

$$\frac{|\Delta L|}{L} = \frac{|u_z(L)|}{L} = S\frac{P}{A}$$
(12)

Из (11) и (12) вытекает выражение для S:

$$S \approx \frac{1}{E} + \frac{A}{PL} \left(\int_{0}^{L} \sqrt{1 + tg^2(\varphi)} \, ds - L \right)$$
(13)

Как видно из (13), податливость S будет зависеть от силы сжатия P.

Ниже приведены результаты численных экспериментов в случае некоторых геометрических и механических характеристик, а именно, зависимости между различными параметрами напряженно-деформированного состояния. При этом соотношение (10) принималось в виде следующей нелинейной функции:

$$M_x = c_0 (1 + c_1 \cdot \varphi_0)^m \cdot \varphi_0 \tag{14}$$

При m > 0 жесткость пружины будет увеличиваться, а при m < 0 – уменьшаться.

3. Результаты

На рис. 2, 3 представлены результаты для случаев уменьшения и увеличения жесткости пружин при увеличении угла наклона в опоре стержня.









Геометрические и механические характеристики были приняты следующими:

L=200 см; E=20600 кH/см²; J=11.59 см⁴; A=4.53см²; $c_0=5146$ кH·см; $c_1=13.84$ кH·см; $\theta_{1,max}=0.2$ рад.

4. Обсуждение

Анализ численных экспериментов при некоторых параметрах геометрических и механических характеристик показал следующее:

1. При выбранных для численных экспериментов механических и геометрических характеристиках стержня и опор, податливость *S* растет практически линейно при увеличении относительного перемещения торца стержня $|u_z(L)|/L$. Усилие сжатия и угол наклона стержня на опоре также связаны соотношением, близким к линейному.

2. Податливость сжимаемого стержня может увеличиваться в десятки и более раз в зависимости от жесткости пружин.

3. Далее был проведен ряд численных экспериментов, при других значениях геометрических и механических характеристик рассматриваемой системы. Он позволил выявить следующий неожиданный эффект, подобный тому, который был обнаружен и в задаче о закритическом изгибе стержня на линейно упругом основании [16]. Оказалось, что при некоторой комбинации геометрических и механических характеристик стержня и опор может появиться потеря устойчивости хлопком. Это видно из рис. 4.



Рис. 4. Зависимость усилия сжатия от относительного перемещения торца |*ΔL*|/*L* стержня при *L*=500 см; *c*₀=103 кH·см; *c*₁=0.0277 кH·см (иллюстрация авторов)

Однако, в отличие от случая линейно-упругого основания [16], в этой задаче зависимость усилия сжатия от относительного перемещения торца того типа, который изображен на рис. 4, имеет место, во-первых, только при нелинейно-упругой зависимости сопротивления повороту оси в шарнирных опорах, во-вторых, только при уменьшающемся сопротивлении (при m < 0 в (14)).

5. Заключение

1. В геометрически и физически нелинейной постановке рассмотрена задача о закритическом изгибе, загруженных сжимающей силой стержней, имеющих в шарнирных опорах нелинейно упругое сопротивление повороту их оси (пружины). Задача сведена к анализу нелинейного интегро-дифференциального уравнения относительно угла наклона стержня. Предложен приближенный метод его решения и приведены результаты численных экспериментов, при некоторых геометрических и механических характеристиках рассматриваемой системы, на основе которых выявлены зависимости между различными параметрами напряженно-деформированного состояния.

2. Установлено, что при выбранных для численных экспериментов механических и геометрических характеристиках стержня и опор, податливость стержня воздействию продольной сжимающей силе растет практически линейно, при увеличении относительного перемещения торца стержня в двух противоположных вариантах нелинейно упругого поведения пружины на опоре, а именно, как в случае увеличения жесткости пружины, так и в случае ее уменьшения при возрастании угла наклона стержня на опоре, но скорости роста податливости при этом разные (см. рис. 3).

3. Выявлено, что при тех же механических и геометрических характеристиках стержня и опор, усилие сжатия и угол наклона стержня на опоре также связаны практически линейно (см. рис. 2), однако в первом случае усилие сжатия увеличивается, а во втором – уменьшается. Обнаружено, что податливость сжимаемого стержня может в первом случае увеличиваться в десятки и сотни раз в зависимости от жесткости пружин.

4. Выявлен эффект потери устойчивости хлопком при некоторых комбинациях геометрических и механических характеристиках стержня и опор.

Список библиографических ссылок

- 1. Гарипов А. И. Численное исследование закритической работы стержней кольцевого поперечного сечения при внецентренном сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2020. № 5(82). С. 87-93. DOI: 10.23968/1999-5571-2020-17-5-87-93.
- Peng J. L., Ho C. M., Chan S. L., Chen W. F. Stability study on structural systems assembled by system scaffolds // Journal of Constructional Steel Research. 2017. T. 137, C. 135-151. DOI: 10.1016/J.JCSR.2017.06.004.
- Mercier C., Khelil A., Al Mahmoud F., Blin-Lacroix J. L., Pamies A. Experimental investigations of buckling behaviour of steel scaffolds // Structures. 2021. T. 33. C. 433-450. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2021.04.045.
- 4. Liu H., Jia L., Wen S., Liu Q., Wang G., Chen Z. Experimental and theoretical studies on the stability of steel tube–coupler scaffolds with different connection joints // Engineering Structures. 2016. T. 106. C. 80-95. DOI: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2015.10.015.
- 5. Dewobroto W., Chendrawan W. Ultimate Load Capacity Analysis of Steel Scaffoldings Using Direct-Analysis Method // Practice Periodical on Structural Design and Construction. 2018. T. 23. № 4. DOI: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000392.
- Zheng Y., Guo Z. Investigation of joint behavior of disk-lock and cuplok steel tubular scaffold // Journal of Constructional Steel Research. 2021. T. 177. DOI: 10.1016/J.JCSR.2020.106415.
- 7. Beale R., André J. Design Solutions and Innovations in Temporary Structures // Târgoviște: IGI Global, 2017. 503 c.
- 8. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / Наука, М: 1971. 808 с.
- 9. Pignataro M., Rizzi N., Luongo A. Stability, bifurcation, and postcritical behaviour of elastic structures. Amsterdam: Elsevier Science, 1991. 358 c.
- 10.Каюмов Р. А., Тазюков Б. Ф., Мухамедова И. З., Шакирзянов Ф. Р. Большие прогибы вязкоупругих панелей // Известия вузов. Математика. 2019, №11, С. 80-86.
- 11.Kayumov R. A., Shakirzyanov F. R. Large Deflections and Stability of Low-Angle Arches and Panels During Creep Flow // Adv. Struct. Mater. 2021. T. 141. C. 237-248. DOI:10.1007/978-3-030-54928-2_18.
- Vega-Posada C., Areiza-Hurtado M., Aristizabal-Ochoa J. D. Large-deflection and postbuckling behavior of slender beam-columns with non-linear end-restraints // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2011. T. 46. C. 79-95. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2010.07.006.
- 13. Areiza-Hurtado M., Aristizábal-Ochoa J. D. Second-order analysis of a beam-column on elastic foundation partially restrained axially with initial deflections and semirigid connections // Structures. 2019. T. 20. C. 134-146. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2019.03.010.
- 14.Giraldo-Londoño O., Monsalve-Giraldo J. S., Aristizabal-Ochoa J. D. Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. T. 77. C. 85–95. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2015.07.009.
- 15.Pieńko M., Błazik-Borowa E. Experimental studies of ringlock scaffolding joint // Journal of Constructional Steel Research. 2020. T 173. DOI: 10.1016/J.JCSR.2020.106265.

16.Каюмов Р. А. Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium // Mechanics of Solids. 2017. Т. 52. № 5. С. 575-580. DOI: 10.3103/S0025654417050120.

Kayumov Rashit Abdulhakovich doctor of physical-mathematical sciences, professor Email: kayumov@rambler.ru Khaidarov Lenar Ilnurovich assistant Email: haidarov_lenar@mail.ru Gimazetdinov Aivaz Rasimovich post-graduate student Email: aivazaivaz1313@gmail.com Kazan State University of Architecture and Engineering The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Compliance of compressed rods with elastic supports, taking into account their postbuckling behavior

Abstract

Problem statement. The large deflections of the rods loaded with compressive force and having a nonlinear elastic resistance to the rotation of their axis in the hinge supports are investigated. The aim of the work is to develop a methodology for calculating the compliance of compressed rods taking into account their post-buckling behavior with nonlinear elastic resistance to rotation on the support.

Results. The resulting nonlinear integro-differential equation is obtained, the method for its solution is given.

Conclusions. Linear relationships were found between the compliance of the rod to the action of the longitudinal compressive force on the relative displacement of the end of the rod and the angle of inclination of the axis of the rod on the supports from the compression force. The snap-through buckling effect is revealed in some geometric and mechanical characteristics of the rod and support. Using the proposed methodology, it is possible to perform the calculation of statically indeterminate structures, taking into account the buckling of rod elements with nonlinear elastic end restraints, and to identify the reserve of their bearing capacity.

Keywords: rod with nonlinear elastic support, post-buckling behavior, second-order analysis, compliance of compressed rod, snap-through buckling.

For citation: Kayumov R. A., Khaidarov L. I., Gimazetdinov A. R. Compliance of compressed rods with elastic supports, taking into account their post-buckling behavior. Izvestiya KGASU. 2021. No. 3 (57). P. 5-12. DOI: 10.52409/20731523_2021_3_5.

References

- 1. Garipov A. I. Numerical investigation of post-critical resistance of hollow circular crosssection bars under bending and axial compression // Vestnik grazhdanskih ingenerov. 2020. № 5(82). P. 87-93. DOI: 10.23968/1999-5571-2020-17-5-87-93.
- Peng J. L., Ho C. M., Chan S. L., Chen W. F. Stability study on structural systems assembled by system scaffolds // Journal of Constructional Steel Research. 2017. V. 137, P. 135-151. DOI: 10.1016/J.JCSR.2017.06.004.
- Mercier C., Khelil A., Al Mahmoud F., Blin-Lacroix J. L., Pamies A. Experimental investigations of buckling behaviour of steel scaffolds // Structures. 2021. V. 33. P. 433-450. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2021.04.045.
- 4. Liu H., Jia L., Wen S., Liu Q., Wang G., Chen Z. Experimental and theoretical studies on the stability of steel tube–coupler scaffolds with different connection joints // Engineering Structures. 2016. V. 106. P. 80-95. DOI: 10.1016/J.ENGSTRUCT.2015.10.015.

- 5. Dewobroto W., Chendrawan W. Ultimate Load Capacity Analysis of Steel Scaffoldings Using Direct-Analysis Method // Practice Periodical on Structural Design and Construction. 2018. V. 23. № 4. DOI: 10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000392.
- Zheng Y., Guo Z. Investigation of joint behavior of disk-lock and cuplok steel tubular scaffold // Journal of Constructional Steel Research. 2021. V. 177. DOI: 10.1016/J.JCSR.2020.106415.
- 7. Beale R., André J. Design Solutions and Innovations in Temporary Structures // Târgoviște: IGI Global, 2017. 503 p.
- 8. Timoshenko S. P. Stability of beam-columns, plates and shell structures / Nauka, M: 1971. 808 p.
- 9. Pignataro M., Rizzi N., Luongo A. Stability, bifurcation, and postcritical behaviour of elastic structures. Amsterdam: Elsevier Science, 1991. 358 p.
- 10.Kayumov R. A., Tazyukov B. F., Muhamedova I. Z., Shakirzyanov F. R. Large deflections of viscoelastic panels // Russian Mathematics. 2019. 63(11). P. 71–76.
- 11.Kayumov R. A., Shakirzyanov F. R. Large Deflections and Stability of Low-Angle Arches and Panels During Creep Flow // Adv. Struct. Mater. 2021. V. 141. P. 237-248. DOI:10.1007/978-3-030-54928-2_18.
- Vega-Posada C., Areiza-Hurtado M., Aristizabal-Ochoa J. D. Large-deflection and postbuckling behavior of slender beam-columns with non-linear end-restraints // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2011. V. 46. P. 79-95. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2010.07.006.
- Areiza-Hurtado M., Aristizábal-Ochoa J. D. Second-order analysis of a beam-column on elastic foundation partially restrained axially with initial deflections and semirigid connections // Structures. 2019. V. 20. P. 134–146. DOI: 10.1016/J.ISTRUC.2019.03.010.
- 14.Giraldo-Londoño O., Monsalve-Giraldo J. S., Aristizabal-Ochoa J. D. Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. V. 77. P. 85–95. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2015.07.009.
- 15.Pieńko M., Błazik-Borowa E. Experimental studies of ringlock scaffolding joint // Journal of Constructional Steel Research. 2020. V. 173. DOI: 10.1016/J.JCSR.2020.106265.
- 16.Kayumov R. A. Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium // Mechanics of Solids. 2017. V. 52. № 5. P. 575-580. DOI: 10.3103/S0025654417050120.