



УДК 624.012.35

Мирсаяпов Илизар Талгатович

E-mail: mirsayapov1@mail.ru

доктор технических наук, профессор

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Гарифуллин Динар Рафикович

главный инженер

E-mail: fszrkazan@mail.ru

НППФ Фундаментспецремонт

Адрес организации: 420087, Россия, г. Казань, ул. Гвардейская, д. 56

Инженерные методы расчета деформаций, модуля упругости и предела выносливости бетона при циклическом нагружении

Аннотация

Постановка задачи. В железобетонных изгибаемых конструкциях при многократно повторяющихся циклических нагружениях стационарного режима в бетоне сжатой зоны уменьшается модуль упругости и развиваются неупругие деформации виброползучести. В связи с тем, что деформации виброползучести происходят в связанных условиях деформирования бетона сжатой зоны не стационарны даже при стационарном режиме внешней нагрузки.

Результаты. Проведены теоретические исследования поведения бетона при стационарных и нестационарных режимах многократно повторяющегося циклического нагружения. Для оценки изменения предела выносливости и модуля упругости бетона при таких режимах деформирования проведены исследования с использованием методов механики разрушения упругопластических материалов и получены инженерные методы расчета выносливости, деформаций и модуля упругости бетона для стационарного и нестационарного режима деформирования. На основании проведенных исследований разработано уравнение изменения прочности, модуля упругости и деформаций бетона для практических расчетов железобетонных изгибаемых элементов при стационарных и нестационарных режимах многократно повторяющейся циклической нагрузки.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в том, что предложенная методика позволяет наиболее точно оценить напряженно-деформированное состояние бетона сжатой зоны и процессы изменения бетона с позиции механики разрушения, что является существенным вкладом в теорию усталостной прочности и обеспечивает экономию бетона до 20 % по сравнению существующими методами.

Ключевые слова: железобетон, бетон, выносливость, модуль упругости, циклическая нагрузка, стационарное нагружение, нестационарное нагружение, механика разрушения, неупругие деформации виброползучести.

Для цитирования: Мирсаяпов Илизар Т., Гарифуллин Д. Р. Инженерные методы расчета деформаций, модуля упругости и предела выносливости бетона при циклическом нагружении // Известия КГАСУ. 2020. № 3 (53). С. 15–26.

1. Введение

Анализ результатов теоретических [1-5] и экспериментальных [6-11] исследований показывает, что независимо от режима внешней циклической нагрузки условия для формирования бетона сжатой зоны изгибаемых железобетонных элементов всегда нестационарные. В связи с этим возникает необходимость в разработке аналитических инженерных методов расчета деформаций, модуля упругости, предела выносливости бетона при стационарных и нестационарных режимах циклического нагружения.

В общем случае деформации модуль упругости и предел выносливости бетона при циклическом нагружении зависят от пластического ресурса, образования и развития микро- и макротрещин до критических величин [12-16]. Поэтому, при разработке

инженерных методов расчета деформаций, модуля упругости и предела выносливости, используются упрощенные зависимости между вышеуказанными механическими характеристиками и пластическим ресурсом, а также условной суммарной длиной микро- и макротрещин в структуре бетона.

2. Материалы и методы

Отдельно рассмотрим инженерные методы расчета деформаций виброползучести, модуля упругости и предела выносливости.

Вычисление деформаций виброползучести

При действии циклических нагрузок деформации виброползучести бетона представляются в виде суммы линейной и нелинейной части:

$$\varepsilon_{pl}(N) = \varepsilon_{pl1} + \varepsilon_{pl2} + \varepsilon_{pl3}. \quad (1)$$

Линейная часть деформаций виброползучести проявляется вследствие одностороннего накопления деформаций быстроснатекающей ползучести в каждом цикле нагружения и уменьшается от цикла к циклу (с увеличением количества циклов нагружения) вследствие отжатия запаса пластических свойств материала. Отжатие пластических деформаций происходит вследствие вязкости гелиевой структурной составляющей цементного камня, капиллярного явления, протекающего в твердеющем бетоне и пластического течения кристаллического сростка цементного камня. Линейная часть деформации виброползучести сопровождается уплотнением материала и затухает во времени, асимптотически приближаясь к определённому пределу.

Для того, чтобы выяснить физический смысл необратимого накопления линейной части деформации ползучести и её аналитического описания, рассмотрим поведение бетонной призмы при циклическом нагружении. При возрастании напряжения от минимальных до максимальных, наряду с упругими деформациями проявляется некоторая доля деформаций быстроснатекающей ползучести. Тогда полные деформации бетона на уровне максимальной нагрузки цикла:

$$\varepsilon_{b1}^{max} = \frac{\sigma_b^{max}}{E_{b1}} + \Delta\varepsilon_{pl1}. \quad (2)$$

При увеличении количества циклов нагружений пластический ресурс материала будет снижаться от цикла к циклу, и, как следствие, будут уменьшаться деформации быстроснатекающей ползучести.

Для N -го цикла нагружения деформации ползучести будут вычислены по формуле:

$$\Delta\varepsilon_{pl}(N) = \Delta\sigma_b \cdot C_{n.b}(N-1). \quad (3)$$

Мера ползучести для N -го цикла нагружения определяется по формуле:

$$C_{n.b}(N) = \frac{1 - \bar{v}(t, \tau)}{\bar{v}(t, \tau) \cdot E_b} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\Delta\varepsilon_{pli}}{\Delta\sigma_b}. \quad (4)$$

Тогда линейную часть деформаций виброползучей в течение i -го цикла можно представить в виде:

$$\varepsilon_{pli}^{vib}(N) = C(t, \tau) \sigma_b^{min} + \sum_{i=1}^N \frac{1 - \bar{v}_i(t, \tau)}{\bar{v}_i(t, \tau) E_b} \cdot \Delta\sigma_{bi}, \quad (5)$$

где σ_b^{min} – минимальное напряжение цикла;

$\Delta\sigma_{bi} = \sigma_b^{max} - \sigma_b^{min}$ – размах напряжения в течении цикла;

N – количество циклов нагружения;

σ_b^{max} – максимальное напряжение цикла;

E_b – модуль упругости бетона;

$C(t, \tau)$ – мера простой ползучести;

$$\bar{v}_i(t, \tau) = [1 + E_b(\tau) \theta_{i+1}(\tau) (1 - B)]^{-1}. \quad (6)$$

После ряда преобразований уравнение (5) приводим к удобному виду для практических расчетов:

$$\varepsilon_{pl}(N) = C_{\infty}(t_1, \tau) \sigma_b^{min}(t_1, \tau) \cdot [1 - e^{-\gamma(t-t_0)}] + C_{\infty}(t_1, \tau) \cdot [1 - (1 - a)^N] \cdot \sigma_b^{max}(t_1, \tau) \cdot (1 - \rho_b), \quad (7)$$

где $C_{\infty}(t_1, \tau)$ – предельная мера ползучести бетона, загруженного в возрасте τ ;

γ, a – опытные коэффициенты, характеризующие скорость протекания деформации простой ползучести и виброползучести;

$$a = (1 - \beta) \cdot k(\tau);$$

$$\gamma = 0,04;$$

$\sigma_b^{min}(t, t_0)$ – минимальное напряжение цикла;

$\sigma_b^{max}(t, t_0)$ – максимальное напряжение цикла;

ρ_b – коэффициент асимметрии цикла напряжений;

N – количество циклов нагружения в рассматриваемый момент времени.

Нелинейная часть деформаций виброползучести

Нелинейная часть деформации виброползучести соответствует стадии образования и развития микро- и макротрещин в бетоне. Поэтому, для разработки расчётного аппарата вычисления нелинейной части деформации виброползучести, необходимо установить зависимость между деформациями и условной суммарной длиной микро- и макротрещин.

$$\varepsilon_{pl}^n = 0,566 \sigma_b^{max}(t, t_0) l^2(t, t_0) 10^{-3},$$

где $l(t, t_0)$ – условно изменённая длина трещины.

Рассмотрим график изменения длины трещины в зависимости от уровня напряжений и количества циклов нагружения и установим функцию изменения длины трещины.

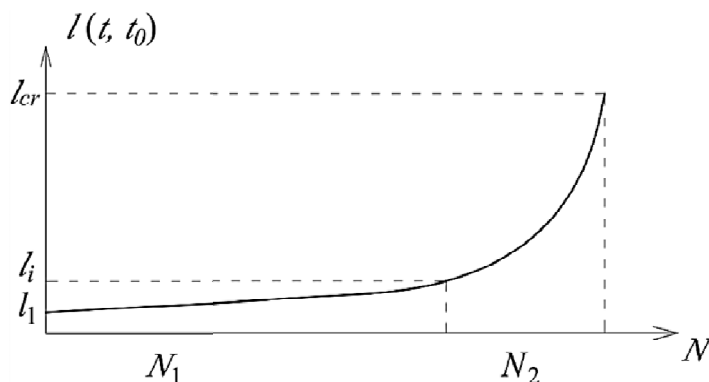


Рис. 1. График зависимости между суммарной длиной трещин и количеством циклов нагружения (иллюстрация авторов)

Анализ графика развития трещин (рис. 1) позволяет выделить два характерных участка. В пределах первого участка размеры трещины малы и развиваются чрезвычайно медленно. Поэтому на этом этапе величина нелинейной части деформаций виброползучести будет незначительной, а, следовательно, величина полных деформаций будет определяться только деформациями линейной части на виброползучести. На втором участке наблюдается существенное увеличение длины и скорости развития трещин. По этой причине на этом участке нелинейные деформации виброползучести будут определяющими, и достигают они значительных величин [17-21].

Исходя из уравнения (7) объективной прочности для каждого конкретного уровня нагружения устанавливаем значения N_1 и N_2 , а также зависимость между длиной обобщенной трещины и количеством циклов нагружения N (рис. 2). На основе этих зависимостей обращенная функция длины трещины для практических расчетов представляется в виде:

$$l(t, t_0) = l(t_0) + \sec[\beta(N - N_1) \cdot 10^{-5}] + \exp(C(N - N_1) \cdot 10^{-5}), \quad (8)$$

где β , C – коэффициенты, учитывающие уровень максимальной нагрузки цикла, коэффициент асимметрии цикла напряжений и связывающие между собой функцию длины трещины и уравнения выносливости бетона.

Для установления коэффициентов β и C проведён численный эксперимент. Результаты численного эксперимента показывают, что независимо от режима нагружения длина трещины, вычисляемая третьим членом уравнения (3), при усталостном разрушении составляет примерно 18,5 % от суммарной длины трещины.

В практических расчетах можно принять $l_{cr} = 25-30$ см, тогда длина трещины, вычисляемая третьим членом уравнения (3) составляет:

$$e^{C(N - N_1) \cdot 10^{-5}} = 30 \cdot 0,185 = 5,55 = e^{1,715}.$$

Откуда для базового количества циклов нагружения $N = 2 \cdot 10^6$ цикл.
 $C \cdot (2 \cdot 10^6 - N_1) \cdot 10^{-5} = 1,715.$ (9)

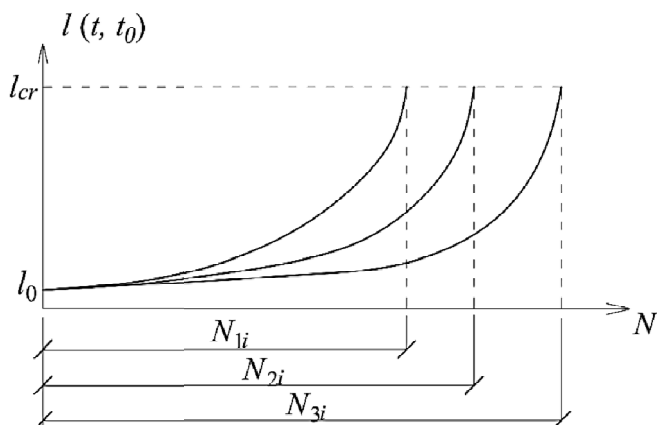


Рис. 2. Графики зависимости $l(t, t_0) = N$ для различных уровней напряжений в бетоне (иллюстрация авторов)

Количество циклов нагружения N_1 , с которых необходимо учитывать влияние длины трещины на прочность материала (т.е. когда длина трещины $l_0 = 1,5d_3 = 2,5$ см), определяем обработкой результатов численных экспериментов, полученных, исходя из уравнения объективной прочности при сжатии:

$$N_1 = N_{1i} \left[\left(\frac{\sigma_b^{max}}{R_{b0,rep}} - 1 \right) \cdot \frac{\sigma_b^{max}}{R_b} \right], \text{ если } \frac{\sigma_b^{max}}{R_{b0,rep}} > 1,1, N_1 = N_{1i}, \text{ если } \frac{\sigma_b^{max}}{R_{b0,rep}} \leq 1,1,$$

где N_{1i} – долговечность бетона при заданном уровне нагружения;
 $R_{b0,rep}$ – предел выносливости бетона на базе $2 \cdot 10^6$ циклов.

Тогда из (4) определяем коэффициент C для базового количества циклов $N=2 \cdot 10^6$:
 $C = 0,095.$

Определяем общую формулу для остальных случаев, исходя из уравнения усталостной прочности. Долговечность (т.е. количество циклов при разрушении) для уровня напряжений $\sigma_{bi} > R_{b0,rep}$:

$$\lg N_i = \frac{k_d R_b - \sigma_{bi}^{max}}{k_d R_b - R_{b0,rep}} \lg 2000000 = \frac{k_d R_b - \sigma_{bi}^{max}}{k_d R_b - R_{b0,rep}} \cdot 6,33.$$

Тогда

$$N_i = 10^{6,33} \left(\frac{k_d R_b - \sigma_{bi}^{max}}{k_d R_b - R_{b0,rep}} \right).$$

Учитывая то, что независимо от уровня нагружения длина трещины, вычисляемая третьим членом уравнения, равняется 5,55 см, определяем множитель, учитывающий уровень нагружения. При этом исходим из того, что выражение в скобках левой части уравнения (4) всегда должно быть равно $1,8 \cdot 10^6$.

Тогда составляем уравнение:

$$k \cdot \left\{ 10^{6,33} \frac{k_d R_b - \sigma_{bi}^{max}}{k_d R_b - R_{b0,rep}} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{li}^{max}}{R_{b0,rep}} - 1 \right) \cdot \frac{\sigma_{li}^{max}}{R_{b0,rep}} \right] \right\} = 1,8 \cdot 10^6,$$

откуда

$$k = \frac{1,8 \cdot 10^6}{10^{6,33} \frac{k_d R_b - \sigma_{bi}^{max}}{k_d R_b - R_{b0,rep}} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{li}^{max}}{R_{b0,rep}} - 1 \right) \cdot \frac{\sigma_{li}^{max}}{R_{b0,rep}} \right]}$$

Таким образом, третий член уравнения для всех режимов нагружения имеет вид:
 $e^{k \cdot 0,095(N-N_1)}$

Теперь составим обобщенную формулу для второго члена уравнения (3). Сначала определим коэффициент при базовом количестве циклов нагружения. Результаты численного эксперимента показывают, что длина трещины, вычисленная вторым членом уравнения, составляет примерно $0,73 l_{cr}$, то есть $\approx 21,9$ см.

Исходя из этого, составляем уравнение: $\sec[\varphi(N_i - N_1) \cdot 10^{-5}] = 21,9$.

Учитывая то, что $\sec x = 1/\cos x$, уравнение перепишем в виде:

$$\frac{1}{\cos[\varphi(N_i - N_1) \cdot 10^{-5}]} = 21,9,$$

тогда $\cos[\varphi(N_i - N_1) \cdot 10^{-5}] = \cos(1,525) = 0,0457$,

откуда $\varphi(N_i - N_1) \cdot 10^{-5} = 1,525$;

$$\varphi = \frac{1,525 \cdot 10^5}{N - N_1} = 8,47 \cdot 10^{-2}.$$

Для других уровней нагружения вводим коэффициент:

$$k = \frac{1,8 \cdot 10^6}{10^{6,33} \frac{k_d R_b - \sigma_{bi}^{max}}{k_d R_b - R_{b0,rep}} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{li}^{max}}{R_{b0,rep}} - 1 \right) \cdot \frac{\sigma_{li}^{max}}{R_{b0,rep}} \right]}.$$

Тогда получаем окончательное выражение для второго члена уравнения:

$$\sec[0,0847 \cdot k \cdot (N_i - N_1) \cdot 10^{-5}].$$

Окончательное уравнение длины обобщенной трещины будет иметь вид:

$$l(t, t_0) = 2,5 + \sec[0,0847 \cdot k \cdot (N_i - N_1) \cdot 10^{-5}] + e^{k \cdot 0,095 (N_i - N_1) \cdot 10^{-5}}. \quad (10)$$

В тех случаях, когда одновременное использование обратной тригонометрической функции $\sec z$ и показательной функции e^x показывают затруднения вычислительного характера, функцию $\cos z$ раскладываем в степенной ряд аргумента z :

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} = 1 - \frac{z^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{12} \right). \quad (11)$$

Учитывая то, что в данном случае численные значения аргумента $z = 0,0847 \cdot k(N_i - N_1) \cdot 10^{-5}$ находятся в пределах 0,5-1,52, с небольшой погрешностью (не более 9 %) выражение (6) можно привести к виду: $\cos z = 1 - 0,41 \cdot z^2$.

Тогда

$$l(t, t_0) = 2,5 + \{1 - 0,41[0,0847 \cdot k(N_i - N_1) \cdot 10^{-5}]^2\}^{-1} + \exp(k \cdot 0,095(N_i - N_1) \cdot 10^{-5}), \quad (12)$$

где N_i – количество циклов нагружения в рассматриваемом этапе.

Учитывая вышеизложенное, уравнение для нелинейных деформаций виброползучести перепишем в виде:

$$\varepsilon_{pl3} = \frac{\sigma_b^{max}(t, t_0)}{E_b} \cdot \left[\frac{l^2(t, t_0)}{2l_{cr}^2} \cdot \left(\arctg \frac{-1}{\rho_r} - \frac{\rho_r}{1 + \rho_r^2} \right) \right], \quad (13)$$

где ρ_r – коэффициент трения бетона, в практических расчетах можно принимать $\rho_r \approx 0,7-0,9$.

При циклическом нагружении происходит уменьшение коэффициента трения бетона и для практических расчетов коэффициент условий работы $\gamma_{rep,r}$ может быть принят равен 0,65.

Для практических расчетов коэффициент трения бетона при циклическом нагружении принимаем $\rho_r = 0,26$, а критическая длина суммарных трещин может быть принята $l_{cr} = 25$ см. Тогда уравнение (8) принимает вид:

$$\varepsilon_{pl3} = \frac{\sigma_b^{max}(t, t_0)}{E_b} \cdot \frac{0,707}{1250} \cdot l^2(t, t_0) = 0,566 \cdot \sigma_b^{max}(t, t_0) \cdot E_b^{-1} \cdot l^2(t, t_0) \cdot 10^{-3}. \quad (14)$$

Тогда окончательно уравнение деформации виброползучести в упрощенной постановке имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{pl}(N) = \varepsilon_{pl1} + \varepsilon_{pl2} + \varepsilon_{pl3} = C_{\infty}(t, \tau) \cdot \sigma_b^{min}(t, t_0) \cdot \{1 - \exp[-\gamma(t - t_0)]\} + \\ + C_{\infty}(t, \tau) [1 - (1 - a)^N] \cdot \sigma_b^{max}(t, t_0) (1 - \rho_b) + \\ + 0,566 \cdot \sigma_b^{max}(t, t_0) \cdot E_b^{-1} \cdot l^2(t, t_0) \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (15)$$

В тех случаях, когда не требуется высокая точность вычислений, уравнение (15) можно упростить и привести к общепринятому виду записи уравнений ползучести с учетом нелинейности:

$$\varepsilon_{pl}(N) = C_{\infty}(t, \tau) \cdot \sigma_b^{min}(t, t_0) \cdot \{1 - \exp[-\gamma(t - t_0)]\} \rho_b + [1 - (1 - a)^{N_i} (1 - \rho_b)] \cdot S_k \left(\frac{\sigma_b^{max}}{R_b} \right) \cdot f(N). \quad (16)$$

где $S_k \left(\frac{\sigma_b^{max}}{R_b} \right) = 1 + \eta_n \left(\frac{\sigma_b^{max}}{R_b} \right)^{m_n}$ – функция нелинейности деформации ползучести;

$m_n = 5 - 0,07R_b$; $\eta_n = 45 \cdot R_b^{-1}$ – параметры нелинейности;

$f(N) = \frac{2,5 + \{1 - 0,41[0,0847(N_i - N_1) \cdot 10^{-5}]^2\}^{-1}}{30}$ – функция роста части деформации виброползучести.

Изменение модуля упругости бетона

В общем случае изменения модуля упругости бетона при циклическом нагружении описывается уравнением:

$$E_b(N) = E_b(t_0) \left[1 + \frac{l^2(t, t_0)}{2l_{cr}^2} \left(\operatorname{arctg} \rho_r^{-1} - \frac{\rho_r}{1 + \rho_r^2} \right) \right]^{-1}. \quad (17)$$

С учётом упрощений, принятых для вычисления деформации выбор ползучести, уравнение (12) перепишем в упрощенной постановке:

$$E_b(N) = \frac{E_b(t_0)}{1 + 0,566 \cdot l^2(t, t_0) \cdot 10^{-3}}. \quad (18)$$

С учетом (7) уравнение (13) перепишем в виде:

$$E_b(N) = E_b(t_0) \cdot \{1 + 0,566 \cdot [2,5 + \{1 - 0,41[0,847 \cdot k(N_i - N_1) \cdot 10^{-5}]^2\}^{-1} + \exp k \cdot 0,095 N_i - N_1 \cdot 10 - 52 \cdot 10^{-3} - 1]. \quad (19)$$

3. Результаты

Деформации виброползучести при режимных нагружениях

Характер развития деформаций виброползучести при режимных циклических нагружениях имеет свои особенности и, связанные закономерностями, изменения деформаций обратной ползучести, длины суммарной трещины при переходах с одного режима циклического нагружения на другой. При этом случае рассматриваются два варианта блочного режимного циклического нагружения:

а) блоки циклического нагружения меняются с последовательным увеличением максимальной нагрузки цикла в каждом блоке при постоянном значении коэффициента асимметрии цикла напряжений;

б) блоки циклического нагружения меняются с последовательным уменьшением максимальной нагрузки цикла в каждом блоке при постоянном значении коэффициента асимметрии цикла напряжений.

При режимных нагружениях градиент изменения максимальных напряжений цикла оказывает существенное влияние на закономерности развития деформаций виброползучести. В случае изменения блоков с последовательным увеличением максимальной нагрузки цикла происходит самоупрочнение бетона за счёт повторной гидратации цемента, и деформации виброползучести постепенно затухают, а затем увеличиваются, если преодолен предел выносливости. Во втором варианте, когда блоки циклического нагружения меняются с последовательным уменьшением максимальной нагрузки цикла, после перехода на блоки с меньшими значениями максимальной нагрузки цикла, наблюдается уменьшение скорости развития деформаций, связанное с процессами ползучести, упрочнения бетона за счёт повторной гидратации цемента, задержки развития и самозалечивания микротрещин.

В первом блоке нагружения, независимо от варианта изменения блоков, деформации виброползучести описываются уравнениями (14) и (15). В следующих блоках происходит изменение деформаций виброползучести в зависимости от варианта блочного режимного циклического нагружения.

С учетом вышеизложенного, уравнения деформации виброползучести при режимном циклическом нагружении можно представить в виде:

- последовательно повышающийся режим:

$$\varepsilon_{pl}(N) = C_{\infty}(t, \tau) \cdot \sigma_b^{\min}(t, t_0) \cdot [1 - \exp(-\gamma(t - t_0))] + C_{\infty}(t, \tau) \cdot \sigma_b^{\max}(t, t_0) (1 - \rho_{b_1}) \cdot [1 - (1 - a)^{N_1}] + \sum_2^i C_{\infty}(t, \tau) \cdot \Delta \sigma_{bi} (1 - \rho_{bi}) \cdot [1 - (1 - a)^{N_i}] + \sum_1^i \frac{\sigma_{bi}^{\max}(t, t_0)}{E_b} \cdot 0,566 \cdot l^2(t, t_0) \cdot 10^{-3}, \quad (20)$$

- последовательно понижающийся режим:

$$\varepsilon_{pl}(N) = C_{\infty}(t, \tau) \cdot \sigma_b^{\min}(t, t_0) \cdot [1 - \exp(-\gamma(t - t_0))] + C_{\infty}(t, \tau) \cdot \sigma_{b_1}^{\max}(t, t_0) (1 - \rho_{b_1}) \cdot [1 - (1 - a)^{N_1}] + \sum_1^i \frac{\sigma_{bi}^{\max}(t, t_0)}{E_b} [0,566 \cdot l^2(t, t_0) \cdot 10^{-3}] - \sum_2^i \Delta \sigma_{bi} \{B_1 [1 - e^{-\beta_1(t-t_0)}] + B_2 [1 - e^{-\beta_2(t-t_0)}]\}, \quad (21)$$

где B_1 , B_2 , β_1 , β_2 – эмпирические коэффициенты, учитывающие обратную ползучесть после перехода на блок с более низким уровнем нагрузки [1].

В практических расчетах $B_1 = 2,625 \cdot 10^{-7}$; $B_2 = 4,2 \cdot 10^{-7}$; $\beta_1 = 0,12 r^{-1}$; $\beta_2 = 0,0036 r^{-1}$.

Упрощенный способ вычисления предела выносливости бетона

В общем случае предел выносливости бетона зависит от количества циклов, частоты нагружения, величины, уровня и амплитуды изменения напряжений. Наиболее точно предел выносливости можно вычислить по уровню объективной прочности. Однако, использование этого уравнения в практических расчетах вызывает затруднения вычислительного характера. Поэтому в практических расчетах воспользуемся более простой зависимостью между пределом выносливости, количеством циклов и частотой нагружения, уровнем и амплитудой изменения напряжений.

Накопленные результаты экспериментальных и теоретических исследований показывают, что изменение прочности бетона при циклическом нагружении в полулогарифмических координатах $R_{b,rep} - \lg N$ описывается линейной зависимостью. При описании этой зависимости наиболее важной задачей является правильное определение начала и конца графика выносливости.

Начало графика выносливости соответствует прочности бетона при однократном нагружении со скоростью равной скорости приложения циклической нагрузки. При этом необходимо отметить, что, чем выше частота приложения нагрузки, тем больше прочность при однократном нагружении.

Для практических расчетов за начало графика выносливости бетона принимаем точку:

$$R_{b,rep}(t_0) = \cdot R_b, \quad (22)$$

где k_d – коэффициент динамического упрочнения бетона, учитывающий увеличение прочности бетона при нагружении со скоростью, равной скорости приложения циклической нагрузки.

Коэффициент динамического упрочнения бетона, нагруженного впервые, описывается уравнением:

$$k_d = 1 + 0,6 \frac{0,27 + 0,8[\text{th}(0,15 \cdot \lg v) - 0,358]}{1 - 0,358 \cdot \text{th}(0,15 \cdot \lg v)}, \quad (23)$$

где v – скорость нагружения в $\text{кг/см}^2/\text{сек}^{-1}$.

Коэффициент динамического упрочнения с учётом отжатия пластического ресурса в предыдущих этапах определяется из уравнения:

$$k_d = 1 + 0,085 \cdot \lg v \cdot \lg \left\{ C_{\infty}(t, \tau) - \left[C_{\infty}(t, \tau) \cdot \sigma_{b1}^{\max}(t, t_0) \cdot (1 - \rho_{b1}) \cdot [1 - (1 - a)^N] \cdot 10^5 + \sum_2^k \Delta \sigma_b C_{\infty}(t, \tau) \cdot (1 - \rho_{bi}) \cdot [1 - (1 - a)^{N_i}] \cdot 10^5 \right] \cdot R_b^{-1} \right\}. \quad (24)$$

Конечная точка графика выносливости соответствует пределу выносливости бетона на базе $2 \cdot 10^6$ циклов. Для унификации расчетных формул эту точку выразим через абсолютный предел выносливости бетона. Анализ результатов численного эксперимента, полученного из уравнений объективной прочности, а также результатов экспериментальных исследований показывает, что численное значение абсолютного предела выносливости колеблется в пределах $(0,47-0,55)R_b$ (рис. 3) и в практических расчетах может быть принято равным $0,5R_b$.

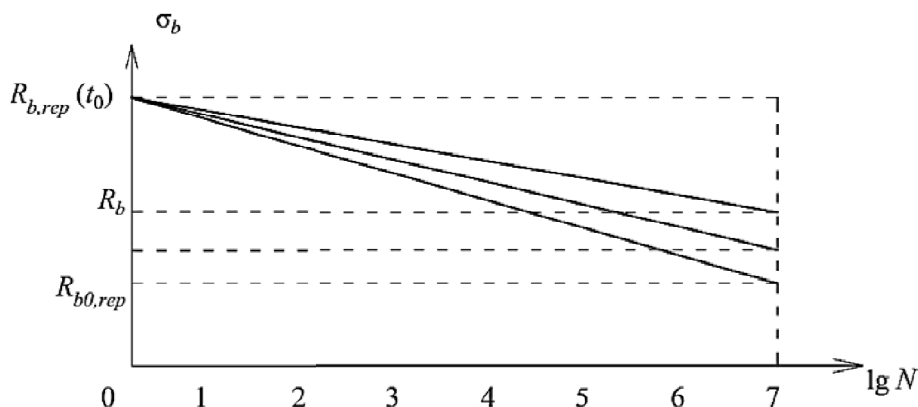


Рис. 3. Графики выносливости бетона в координатах $\sigma - \lg N$ (иллюстрация авторов)

В практических расчетах для стационарных режимов предел выносливости может быть вычислен по формуле:

$$R_{b,rep} = R_b \left[k_d - \frac{\lg N}{\lg 10^7} \cdot \left(k_d - \frac{k_{\rho b}^T}{1 - 0,616\rho_b} \right) \right], \quad (25)$$

где $k_{\rho b}^T = \frac{R_{b0,rep}}{R_b}$;

$R_{b0,rep}$ – абсолютный предел выносливости (предел усталости) бетона;

$R_{b,rep}$ – предел выносливости бетона в момент времени t , соответствующий количеству циклов нагружения N ;

$\rho_b = \frac{\sigma_b^{min}(t,t_0)}{\sigma_b^{max}(t,t_0)}$ – коэффициент асимметрии цикла напряжений;

$\sigma_b^{max}(t, t_0)$, $\sigma_b^{min}(t, t_0)$ – минимальные и максимальные напряжения цикла соответственно.

4. Обсуждение

Уравнения изменения выносливости бетона при режимном циклическом нагружении разработаны на основании предположений и допущений, использованных при получении уравнения выносливости (25) для стационарного режима циклического нагружения с учетом особенностей поведения бетона при изменении градиента максимальных напряжений цикла в последовательно меняющихся блоках циклического нагружения.

При этом, нестационарное циклическое нагружение разбивается на отдельные блоки, а изменение предела выносливости бетона в пределах каждого блока представляется уравнениями как для стационарного циклического нагружения. Рассматриваются два варианта блочного циклического нагружения:

а) в каждом блоке максимальное напряжение цикла увеличивается по сравнению с предыдущим блоком;

б) в каждом блоке максимальное напряжение цикла уменьшается по сравнению с предыдущим блоком.

В первом варианте блочного режимного циклического нагружения предел выносливости бетона увеличивается по сравнению со стационарным режимом циклического нагружения, вследствие самоупрочнения бетона за счёт повторной гидратации части цемента. Во втором варианте изменение предела выносливости бетона имеет свои особенности, связанные с образованием и развитием микротрещин до критических величин. При уменьшении уровня максимальных напряжений цикла, микро- и макротрещины самозалечиваются и, как следствие, скорость снижения предела выносливости бетона будет незначительной.

В пределах первого блока, независимо от варианта блочного режимного циклического нагружения, изменение предела выносливости бетона представляется формулой (25). В последующих блоках происходит увеличение или уменьшение пределов выносливости в зависимости от варианта режимного нагружения. Предел выносливости бетона в начале каждого последующего блока зависит от уровня и градиента максимальных напряжений цикла.

Если в рассматриваемых блоках максимальное напряжение цикла меньше предела выносливости бетона, то уменьшение усталостной прочности не происходит, и коэффициент структурного упрочнения будет больше единицы, а предел выносливости бетона в конце этого блока нагружения будет равен:

$$R_{bi,rep} = R_{bi-1,rep} \cdot m_\gamma(t, \tau), \quad (26)$$

где m_γ – коэффициент структурного упрочнения бетона в практических расчетах:

$$m_\gamma(t, \tau) = 1,2 [1 - (1 - a)^N];$$

$R_{b0,rep}$ – предел выносливости бетона на базе $2 \cdot 10^6$ циклов;

$R_{bi-1,rep}$ – предел выносливости бетона в конце предыдущего блока нагружения;

R_{bi} – предел выносливости бетона в конце рассматриваемого блока нагружения.

В тех случаях, когда $\sigma_{bi}^{max}(t,t_0) > R_{b0,rep}$, разупрочнение преобладает над упрочнением, и необходимо учитывать накопление усталостных повреждений в пределах каждого блока и влияние этих повреждений на изменение выносливости в последующих блоках.

Выносливость бетона в пределах первого блока вычисляется по формуле (25), а в последующих блоках:

$$R_{bi,rep} = R_{bi-1,rep} \left\{ k_d - \frac{\lg N}{\lg 10^7} \cdot \left[k_{di} - \frac{\frac{k_{pb}^T}{\Delta k}}{1 - \rho_b \left(1 - \frac{k_{pb}^T}{k_{di}} \right)} \right] \right\}, \quad (27)$$

где

$$\Delta k = \frac{0,5}{k_{di} - \frac{\lg N_{1i}}{\lg N_{1i}} \cdot (k_{di} - k_{pb}^T)},$$

N_{1i} – долговечность бетона в циклах при заданных параметрах циклического нагружения без учёта накопленных на предыдущем этапе повреждений;

N_{3i} – то же, с учётом накопленных на предыдущем этапе повреждений;

$R_{bi-1,rep}$ – выносливость бетона в конце предыдущего блока;

k_{pb}^T – относительные предел усталости на базе 10 циклов;

k_{di} – коэффициент динамического упрочнения бетона с учетом снижения пластических свойств предыдущих этапах нагружения.

Численное значение N_{3i} определяется, исходя из (8), приравнивая третий член этого уравнения к $0,18 [l_{cr} - l(t, t_0)]$. После ряда преобразований получаем уравнение для вычисления N_{3i} :

$$N_{3i} - N_3 = \frac{\langle \ln\{0,18[l_{cr} - l(t, t_0)]\} \rangle \cdot 10^5}{0,095 \cdot k},$$

где $N_3 = N_{3i} \left(\frac{\sigma_{bi}^{max}}{R_{b0,rep}} - 1 \right) \cdot \frac{\sigma_{bi}^{max}}{R_{b0,rep}}$, если $\frac{\sigma_{bi}^{max}}{R_{b0,rep}} > 1,1$. $N_3 = 0,1 \cdot N_{3i}$, если $\frac{\sigma_{bi}^{max}}{R_{b0,rep}} \leq 1,1$.

5. Заключение

1. Установлены и аналитически описаны основные закономерности изменения деформаций линейной и нелинейной виброползучести, модуля упругости и предела выносливости при стационарных и режимных циклических нагружениях. Разработаны уравнения, связывающие деформации и предел выносливости бетона с суммарной длиной микро- и макротрещин.

2. Разработаны аналитические уравнения механического состояния при стационарных и нестационарных режимах многократно повторяющегося циклического нагружения на основе теории виброползучести бетона и механики разрушения упругопластических материалов для инженерного метода расчета.

3. Полученные аналитические расчетные уравнения изменения деформаций виброползучести, усталостной прочности и модуля упругости бетона сжатой зоны адекватно и достаточно точно, с позиции требования практических расчетов, позволяют оценивать выносливость бетона сжатой зоны при стационарных и нестационарных режимах многократно повторяющегося циклического нагружения и получить надежные и одновременно экономичные решения. При этом экономия бетона составляет 20 %.

Список библиографических ссылок

1. Atutis E., Valivonis J., Atutis M. Deflection determination method for BFRP prestressed concrete beams under fatigue loading // Compos. Struct. 2019. № 226. P. 111182. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111182.
2. Kim G., Loreto G., Kim J.-Y., Kurtis K. E., Wall J. J., Jacobs L. J. In situ nonlinear ultrasonic technique for monitoring microcracking in concrete subjected to creep and cyclic loading // Ultrasonics. 2018. № 88. P. 64–71. DOI: 10.1016/j.ultras.2018.03.006.
3. Li Q., Liu M., Lu Z., Deng X. Creep Model of High-Strength High-Performance Concrete Under Cyclic Loading // J. Wuhan Univ. Technol. Sci. Ed. 2019. № 3 (34). P. 622–629. DOI: 10.1007/s11595-019-2096-9.
4. Chen P., Zhou X., Zheng W., Wang Y., Bao B. Influence of high sustained loads and longitudinal reinforcement on long-term deformation of reinforced concrete beams // J. Build. Eng. 2020. № 30. DOI: 10.1016/j.job.2020.101241.
5. Bouziadi F., Boulekbache B., Haddi A., Hamrat M., Djelal C. Finite element modeling of

- creep behavior of FRP-externally strengthened reinforced concrete beams // *Eng. Struct.* 2020. № 204. P. 109908. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109908.
6. Mirsayapov Ilshat T. Detection of stress concentration regions in cyclic loading by the heat monitoring method // *Mech. Solids.* 2010. № 1 (45). P. 133–139. DOI: 10.3103/S0025654410010164.
 7. Song L., Fan Z., Hou J. Experimental and Analytical Investigation of the Fatigue Flexural Behavior of Corroded Reinforced Concrete Beams // *Int. J. Concr. Struct. Mater.* 2019. № 1 (13). DOI: 10.1186/s40069-019-0340-5.
 8. Zamaliev F. S., Zakirov M. A. Stress-strain state of a steel-reinforced concrete slab under long-term // *Magazine of Civil Engineering.* 2018. P. 12–23.
 9. Tang H., Chen Z., Avinesh O., Guo H., Meng Z., Engler-Pinto C., Kang H. Notch Insensitivity in Fatigue Failure of Chopped Carbon Fiber Chip-Reinforced Composites Using Experimental and Computational Analysis // *Compos. Struct.* 2020. № 10 (16). P. 112280. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112280.
 10. Choe G., Shinohara Y., Kim G., Lee S., Lee E., Nam J. Concrete corrosion cracking and transverse bar strain behavior in a reinforced concrete column under simulated marine conditions // *Appl. Sci.* 2020. № 5 (10). DOI: 10.3390/app10051794.
 11. Gambarelli S., Ožbolt J. Interaction between damage and time-dependent deformation of mortar in concrete: 3D FE study at meso-scale // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2019. № 615. P. 012013. DOI: 10.1088/1757-899X/615/1/012013.
 12. Augeard E., Ferrier E., Michel L. Mechanical behavior of timber-concrete composite members under cyclic loading and creep // *Eng. Struct.* 2020. № 210. P. 110289. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110289.
 13. Trekin N. N. Kodysh E. N., Mamin A. N., Trekin D. N. Onana J. Improving methods of evaluating the crack resistance of concrete structures // *American Concrete Institute, ACI Special Publication.* 2018. № 326. P. 93.1–93.6.
 14. Liang J., Nie X., Masud M., Li J., Mo Y. L. A study on the simulation method for fatigue damage behavior of reinforced concrete structures // *Eng. Struct.* 2017. № 150, P. 25–38. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.07.001
 15. Zhang G., Zhang Y., Zhou Y. Fatigue Tests of Concrete Slabs Reinforced with Stainless Steel Bars // *Adv. Mater. Sci. Eng.* 2018. P. 1–5.
 16. Zhang G., Zhang Y., Zhou Y. Fatigue Tests of Concrete Slabs Reinforced with Stainless Steel Bars // *Advances in Materials Science and Engineering.* 2018. № 1. DOI: 10.1155/2018/5451398/.
 17. Barcley L., Kowalsky M. Critical bending strain of reinforcing steel and the buckled bar tension test // *ACI Materials Journal.* 2019. № 3 (116). P. 53–61. DOI: 10.14359/51715583.
 18. Luo X., Tan Z., Chen Y. F., Wang Y. Comparative study on fatigue behavior between unbonded prestressed and ordinary reinforced reactive powder concrete beams // *Mater. Test.* 2019. № 4 (61), P. 323–328. DOI: 10.3139/120.111323.
 19. Tang S. W., Yao Y., Andrade C., Li Z. Recent durability studies on concrete structure // *Cem Concr Res* 2015. № 78. P. 143–154. DOI: 10.1016/j.cemconres.2015.05.021.
 20. Berrocal C. G., Fernandez I., Lundgren K., Lofgren I. Corrosion-induced cracking and bond behaviour of corroded reinforcement bars in SFRC // *Compos B Eng.* 2017. № 113. P. 123–137. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.01.020.
 21. Chen E., Berrocal C. G., Löfgren I., Lundgren K. Correlation between concrete cracks and corrosion characteristics of steel reinforcement in pre-cracked plain and fibre-reinforced concrete beams // *Mater. Struct. Constr.* 2020. № 2 (53). DOI: 10.1617/s11527-020-01466-z.

Mirsayapov Ilizar Talgatovich

doctor of technical sciences, professor

E-mail: mirsayapov1@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya str., 1

Garifullin Dinar Rafikovich

chief engineer

E-mail: fszrkazan@mail.ru**NPPF Fundamentspetcremont**

The organization address: 420087, Russia, Kazan, Gvardeyskaya str., 56

Engineering methods for calculating elastic modulus deformations and limits of concrete endurance under cyclic loading**Abstract**

Problem statement. In reinforced concrete bent structures with repeated cyclic loads of stationary mode in the concrete of the compressed zone, the modulus of elasticity decreases and inelastic deformations of vibration creep develop. Due to the fact that creep deformations occur in connected conditions, the concrete deformations of the compressed zone are non-stationary even in the stationary mode of external load.

Results. Theoretical studies of concrete behavior under stationary and non-stationary modes of repeated cyclic loading are carried out. To assess the change in the endurance limit and elastic modulus of concrete under such deformation modes, studies were conducted using the methods of fracture mechanics of elastic-plastic materials and engineering methods for calculating the endurance, deformations and elastic modulus of concrete for stationary and non-stationary deformation modes were obtained. Based on the conducted research, the equation of changes in the strength, modulus of elasticity and deformations of concrete was developed for practical calculations of reinforced concrete bending elements in stationary and non-stationary modes of repeated cyclic loading.

Conclusions. The significance of the results obtained for the construction industry is that the proposed method allows the most accurate assessment of the stress-strain state of concrete in the compressed zone and the processes of concrete change from the point of view of fracture mechanics, which is a significant contribution to the theory of fatigue strength and provides concrete savings of up to 35 % compared to existing methods.

Keywords: reinforced concrete, concrete, endurance, Young modulus, cyclic load, stationary loading, non-stationary loading, fracture mechanics, inelastic deformations of vibration creep.

For citation: Mirsayapov Ilizar T., Garifullin D. R. Engineering methods for calculating elastic modulus deformations and limits of concrete endurance under cyclic loading // Izvestija KGASU. 2020. № 3 (53). P. 15–26.

References

1. Atutis E., Valivonis J., Atutis M. Deflection determination method for BFRP prestressed concrete beams under fatigue loading // Compos. Struct. 2019. № 226. P. 111182. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111182.
2. Kim G., Loreto G., Kim J.-Y., Kurtis K. E., Wall J. J., Jacobs L. J. In situ nonlinear ultrasonic technique for monitoring microcracking in concrete subjected to creep and cyclic loading // Ultrasonics. 2018. № 88. P. 64–71. DOI: 10.1016/j.ultras.2018.03.006.
3. Li Q., Liu M., Lu Z., Deng X. Creep Model of High-Strength High-Performance Concrete Under Cyclic Loading // J. Wuhan Univ. Technol. Sci. Ed. 2019. № 3 (34). P. 622–629. DOI: 10.1007/s11595-019-2096-9.
4. Chen P., Zhou X., Zheng W., Wang Y., Bao B. Influence of high sustained loads and longitudinal reinforcement on long-term deformation of reinforced concrete beams // J. Build. Eng. 2020. № 30. DOI: 10.1016/j.job.2020.101241.
5. Bouziadi F., Boulekbache B., Haddi A., Hamrat M., Djelal C. Finite element modeling of creep behavior of FRP-externally strengthened reinforced concrete beams // Eng. Struct. 2020. № 204. P. 109908. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109908.
6. Mirsayapov Ilshat T. Detection of stress concentration regions in cyclic loading by the

- heat monitoring method // *Mech. Solids*. 2010. № 1 (45). P. 133–139. DOI: 10.3103/S0025654410010164.
7. Song L., Fan Z., Hou J. Experimental and Analytical Investigation of the Fatigue Flexural Behavior of Corroded Reinforced Concrete Beams // *Int. J. Concr. Struct. Mater.* 2019. № 1 (13). DOI: 10.1186/s40069-019-0340-5.
 8. Zamaliev F. S., Zakirov M. A. Stress-strain state of a steel-reinforced concrete slab under long-term // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. P. 12–23.
 9. Tang H., Chen Z., Avinesh O., Guo H., Meng Z., Engler-Pinto C., Kang H. Notch Insensitivity in Fatigue Failure of Chopped Carbon Fiber Chip-Reinforced Composites Using Experimental and Computational Analysis // *Compos. Struct.* 2020. № 10 (16). P. 112280. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112280.
 10. Choe G., Shinohara Y., Kim G., Lee S., Lee E., Nam J. Concrete corrosion cracking and transverse bar strain behavior in a reinforced concrete column under simulated marine conditions // *Appl. Sci.* 2020. № 5 (10). DOI: 10.3390/app10051794.
 11. Gambarelli S., Ožbolt J. Interaction between damage and time-dependent deformation of mortar in concrete: 3D FE study at meso-scale // *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2019. № 615. P. 012013. DOI: 10.1088/1757-899X/615/1/012013.
 12. Augéard E., Ferrier E., Michel L. Mechanical behavior of timber-concrete composite members under cyclic loading and creep // *Eng. Struct.* 2020. № 210. P. 110289. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110289.
 13. Trekin N. N., Kodysh E. N., Mamin A. N., Trekin D. N., Onana J. Improving methods of evaluating the crack resistance of concrete structures // *American Concrete Institute, ACI Special Publication*. 2018. № 326. P. 93.1–93.6.
 14. Liang J., Nie X., Masud M., Li J., Mo Y. L. A study on the simulation method for fatigue damage behavior of reinforced concrete structures // *Eng. Struct.* 2017. № 150, P. 25–38. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.07.001
 15. Zhang G., Zhang Y., Zhou Y. Fatigue Tests of Concrete Slabs Reinforced with Stainless Steel Bars // *Adv. Mater. Sci. Eng.* 2018. P. 1–5.
 16. Zhang G., Zhang Y., Zhou Y. Fatigue Tests of Concrete Slabs Reinforced with Stainless Steel Bars // *Advances in Materials Science and Engineering*. 2018. № 1. DOI: 10.1155/2018/5451398/.
 17. Barclay L., Kowalsky M. Critical bending strain of reinforcing steel and the buckled bar tension test // *ACI Materials Journal*. 2019. № 3 (116). P. 53–61. DOI: 10.14359/51715583.
 18. Luo X., Tan Z., Chen Y. F., Wang Y. Comparative study on fatigue behavior between unbonded prestressed and ordinary reinforced reactive powder concrete beams // *Mater. Test.* 2019. № 4 (61). P. 323–328. DOI: 10.3139/120.111323.
 19. Tang S. W., Yao Y., Andrade C., Li Z. Recent durability studies on concrete structure // *Cem Concr Res* 2015. № 78. P. 143–154. DOI: 10.1016/j.cemconres.2015.05.021.
 20. Berrocal C. G., Fernandez I., Lundgren K., Lofgren I. Corrosion-induced cracking and bond behaviour of corroded reinforcement bars in SFRC // *Compos B Eng.* 2017. № 113. P. 123–137. DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.01.020.
 21. Chen E., Berrocal C. G., Löfgren I., Lundgren K. Correlation between concrete cracks and corrosion characteristics of steel reinforcement in pre-cracked plain and fibre-reinforced concrete beams // *Mater. Struct. Constr.* 2020. № 2 (53). DOI: 10.1617/s11527-020-01466-z.