



УДК 533.69.048

**Гумеров Анвар Васильевич**

кандидат технических наук, доцент

E-mail: [anvar\\_gumerov@list.ru](mailto:anvar_gumerov@list.ru)

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

**Жерехов Владимир Викторович**

кандидат технических наук, доцент

**Казанский национальный исследовательский технический университет им.**

**А.Н. Туполева**

Адрес организации: 420111, Россия, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10

### **Определение сил, действующих на, движущуюся под углом атаки, пластину методом дискретных вихрей**

#### **Аннотация**

*Постановка задачи.* Требуется определить силу, действующую на пластину при его обтекании несжимаемым потоком воздуха при различных углах атаки.

*Результаты.* Получены зависимости коэффициента нормальной силы пластины по времени для различных углов атаки методом дискретных вихрей. Варьированием шага интегрирования дифференциальных уравнений оторвавшихся вихрей и разбивкой пластины обеспечивается сходимость расчетных коэффициентов сил с имеющимися экспериментальными результатами.

*Выводы.* Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в возможности оценки пластинчатых элементов конструкции на прочность и усталость, применяя рассчитанные коэффициенты нормальной силы.

**Ключевые слова:** метод дискретных вихрей, присоединенные и сводные вихри, контрольные точки, пластина, число Струхала, комплексный потенциал течения.

#### **Введение**

Расчетный метод дискретных вихрей позволяет моделировать отрывные обтекания различных тел идеальной несжимаемой средой. Данный метод облегчает решение таких задач ввиду линейности уравнения неразрывности и возможности использования наложения потоков. Развитие и распространение метода дискретных вихрей хорошо описано в обзорной статье Сарпкая Т. [1]. В многочисленных работах Белоцерковского С.М. подробно описывается данный метод для различных задач обтекания.

Проведение расчетов методом дискретных вихрей в общем случае заключается в следующем. Контур обтекаемого тела заменяется присоединенными дискретными вихрями, а отрывное движение потока за телом моделируется свободными дискретными вихрями, перемещающимися с местной скоростью среды. Интенсивности присоединенных вихрей в каждый момент времени определяются из условия непроницаемости поверхности обтекаемого тела, и равенства нулю суммарной интенсивности присоединенных и свободных вихрей.

Как правило, при обтекании пластины или прямоугольника их поверхности заменяются непрерывной вихревой пеленой с применением конформного отображения плоскостей [2-4]. Интенсивности отрывающихся вихрей определяются как половина квадрата скорости в точках отрыва, а положения точек схода вихрей определяются из условия Кутты, т.е. из условия конечности скорости на кромках пластины.

В работе Белоцерковского С.М. [5] рассматривается обтекание пластины с заменой ее присоединенными вихрями. Интенсивности отрывающихся вихрей находятся из условия непроницаемости в контрольных точках. Приводится формула для определения коэффициента давления в положении присоединенных вихрей, полученная по давлению в неустановившемся потоке интегралом Коши-Лагранжа.

В настоящей работе моделируется обтекание пластины по методу, описанному у Белоцерковского С.М. [5]. Определение коэффициента аэродинамической силы

проводилось импульсным способом, по формуле приведенным в статье Брайсона [6] и по формуле Белоцерковского С.М. [5], полученного из интеграла Коши-Логранжа.

**Постановка задачи и методика расчета**

Пусть пластина шириной  $a$  (рис. 1), движется в идеальной несжимаемой среде со скоростью  $V_\infty$  под углом атаки  $\alpha$ . Требуется определить коэффициенты сил, действующих на пластину импульсным способом, для последующего расчета ветровой нагрузки [7].

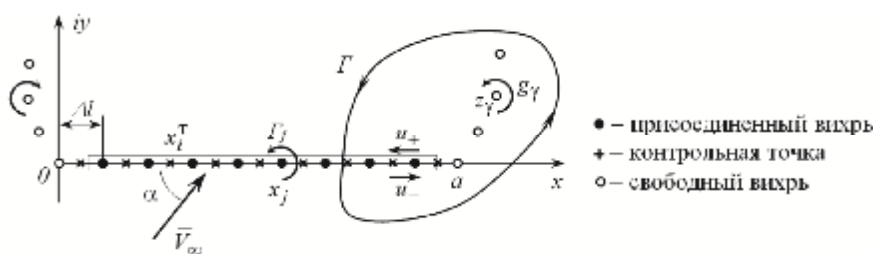


Рис. 1. Расчетная схема обтекания пластины

Составляем систему линейных алгебраических уравнений  $AX = B$  для определения интенсивностей присоединенных вихрей  $\Gamma_j$  из условия непроницаемости в контрольных точках, т.е. при  $V_n^i = 0$ . Матрица  $A$  скоростей от присоединенных вихрей заполняется один раз. Скорость, индуцированная  $j$ -м присоединенным вихрем в  $i$ -й контрольной точке:

$$A = (a_{ij}) = \frac{1}{2\rho(x_i^T - x_j)}$$

Матрица столбец  $X = (\Gamma_j)$  представляет собой неизвестные интенсивности присоединенных вихрей. Составляем матрицу столбец  $B$ , свободные члены которой известны и представляют собой проекцию скорости от набегающего потока и свободных вихрей на нормаль в каждой контрольной точке. Комплексная скорость, индуцированная свободными вихрями  $g_g$  в  $i$ -ой контрольной точке, запишется:

$$v_i = \text{conj} \sum_{g=2}^m \frac{g_g}{2\rho(x_i^T - z_g)} \dot{u}_g$$

тогда

$$B = (b_i) = -V_\infty \sin \alpha - \text{Im}(v_i) \tag{1}$$

Полученная матрица  $A$  имеет размерность  $k \times k - 1$  (т.к. количество присоединенных вихрей на 1 больше контрольных точек), чтобы решить ее необходимо ввести дополнительную строку к системе  $AX = B$ :

$$\sum_{j=0}^k \dot{a}_j \Gamma_j + \sum_{g=2}^m \dot{a}_g g_g = 0$$

Данное условие следует из теоремы о постоянстве циркуляции по контуру, охватывающему присоединенные вихри на пластине и оторвавшиеся вихри.

Решив полученную систему:

$$\begin{cases} a_{00}\Gamma_0 + a_{01}\Gamma_1 + \dots + a_{0k}\Gamma_k = b_0, \\ a_{10}\Gamma_0 + a_{11}\Gamma_1 + \dots + a_{1k}\Gamma_k = b_1, \\ \dots \\ a_{k-10}\Gamma_0 + a_{k-11}\Gamma_1 + \dots + a_{k-1k}\Gamma_k = b_{k-1}, \\ \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_k = -\sum g_\gamma \end{cases} \tag{2}$$

методом Гаусса находим интенсивности  $\Gamma_j$  присоединенных вихрей заменяющих пластину. На краях пластины в соответствии с гипотезой Чаплыгина-Жуковского скорости должны быть конечными. Это обеспечивается тангенциальным сходом потока с краев, т.е. в каждый расчетный момент времени крайние присоединенные вихри

принимают за свободные. Что позволяет в каждый расчетный момент времени найти циркуляции свободных (оторвавшихся) вихрей.

Для определения положения свободных вихрей в следующий момент времени необходимо решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений движения этих вихрей:

$$\frac{dz_g}{dt} = v_g.$$

Эти уравнения решаются методом Эйлера, обеспечивая при этом численную диффузию вихрей:

$$z_g^{t+Dt} = z_g^t + v_g \times Dt, \tag{3}$$

где  $Dt$  – шаг по времени,  $v_g$  – скорость свободного вихря, определяется как сопряженная производная от комплексного потенциала течения  $F(z)$ :

$$F(z) = -i \sum_{j=0}^k \frac{\Gamma_j}{2\rho} \ln(z - x_j) - i \sum_{g=2}^m \frac{\Gamma_g}{2\rho} \ln(z - z_g) + V_\infty z e^{-ia}, \quad v_g = \text{conj} \left[ \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=z_g}.$$

После определения нового положения свободного вихря заново формируется правая часть (1) системы уравнений (2), находятся новые интенсивности присоединенных вихрей и по (3) определяются их последующие положения. Таким образом, выражения (1), (2) и (3) образуют замкнутый цикл численного метода дискретных вихрей.

**Определение сил, действующих на присоединенные вихри**

Силу, действующую на пластину в каждый момент времени, можно определить по теореме об изменении импульса силы [6], [8]:

$$X + iY = i\rho \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma_j \cdot x_j = i\rho \left[ \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\Gamma}_j \cdot x_j + \frac{\Gamma_0 \cdot x_0}{\Delta t} + \frac{\Gamma_k \cdot x_k}{\Delta t} \right] - i\rho \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma_j \cdot \dot{x}_j. \tag{4}$$

Первое слагаемое в скобках есть сила, действующая на присоединенный вихрь вследствие изменения его интенсивности за промежуток времени  $Dt$ . После каждого отрыва крайних вихрей слева и справа от пластины в место них размещаем новые вихри для обеспечения условия Чаплыгина-Жуковского. Поэтому сила от вновь введенных вихрей в конце промежутка  $Dt$  учитываются выражениями  $\Gamma_0 \cdot x_0 / \Delta t$  и  $\Gamma_k \cdot x_k / \Delta t$  в (4). Согласно рис. 1 начало координат совпадает с положением крайнего вихря слева ( $x_0=0$ ) и  $\Gamma_0 \cdot x_0 / \Delta t$  не будет влиять на силу. Последнее выражение в (4) учитывает силу, обусловленную наличием скорости в точках расположения присоединенных вихрей:

$$\dot{x}_j = \text{conj} \left[ \frac{-i}{2\pi} \sum_{\gamma=2}^m \frac{\Gamma_\gamma}{x_j - z_\gamma} + V_\infty (\cos\alpha - i \sin\alpha) \right].$$

Введя следующие безразмерные переменные  $x\phi = x/a$ ,  $t\phi = V_\infty t/a$ ,  $\Gamma\phi = \Gamma/(V_\infty a)$  коэффициенты сил (4) примут вид:

$$c_x + ic_y = \frac{2(X + iY)}{\rho V_\infty^2 a} = i \left( \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\Gamma}'_j \cdot x'_j - \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma'_j \cdot \dot{x}'_j + \frac{\Gamma'_k}{\Delta t'} \right). \tag{5}$$

Коэффициенты аэродинамических сил также можно получить интегрированием коэффициента давления используя формулу Коши-Лагранжа:

$$c_p = 1 - \frac{u^2}{V_\infty^2} = \frac{2}{V_\infty^2} \times \frac{\Pi_j}{\Pi_t}.$$

Заменим пластину непрерывным вихревым слоем и вычислим нагрузку в некоторой точке  $s$  (рис. 1):

$$Dc_p = c_{p-} - c_{p+} = -\frac{u_-^2}{V_\infty^2} + \frac{u_+^2}{V_\infty^2} = \frac{2}{V_\infty^2} \times \frac{\Pi_j}{\Pi_t} - \frac{\Pi_j + \ddot{\phi}}{\Pi_t \phi}.$$

Преобразуем  $Dc_p$  согласно [5]:

$$\frac{1}{V_{\infty}^2}(u_+^2 - u_-^2) = \frac{1}{V_{\infty}^2}(u_+ - u_-)(u_+ + u_-).$$

Циркуляция скорости в окрестности точки  $s$  равна интенсивности присоединенного вихря:

$$\Gamma_j = \oint y_x dx = (u_- - u_+)Dl. \quad (6)$$

Скорость в вихревом слое:

$$(u_+ + u_-)/2 = u. \quad (7)$$

Циркуляция по контуру, пересекающему вихревой слой в некоторой точке  $s$  и охватывающему все вихри справа, равна разности потенциалов (рис. 1):

$$\Gamma = j_+ - j_- = \sum_{j=s}^{k-1} \Gamma_j. \quad (8)$$

Используя полученные выражения (6)-(8) коэффициент давления в точке расположения присоединенного вихря приводится к виду:

$$Dc_{pj} = -\frac{1}{V_{\infty}^2} \frac{\Gamma_j}{Dl} 2u + \frac{2}{V_{\infty}^2} \frac{D\Gamma + \Gamma_k}{Dt}.$$

Или в безразмерных переменных ( $u\phi = u/V_{\infty}$ )

$$Dc_{pj} = -2\Gamma\phi_j(k-1) + 2(D\Gamma\phi + \Gamma\phi_k)/Dt\phi.$$

Суммируя  $Dc_p$  по длине пластины и учитывая, что кромки пластины заканчиваются контрольными точками, получим коэффициент нормальной силы:

$$c_y = \frac{Dl}{a} \sum_{j=1}^{k-1} Dc_{pj} = 2 \sum_{j=1}^{k-1} \Gamma\phi_j\phi + \frac{D\Gamma\phi + \Gamma\phi_k}{Dt(k-1)\phi}.$$

Учет ядра вихря на картину обтекания и на коэффициент нормальной силы практически не влияет. Как показывают расчеты, часто происходит пробитие пластины свободными дискретными вихрями. Оторвавшийся дискретный вихрь близко подходит к присоединенным вихрям и под их действием оказывается на наветренной стороне пластины. Это приводит к неправильному расчету действующих сил. Для исключения всплесков сил, нормальная составляющая скорости вихря считается равной нулю, если от вихря до пластины меньше чем  $Dl = a/k$ .

### Результаты расчетов

Основными параметрами, влияющие на коэффициент нормальной силы и частоту срыва вихрей с пластины, являются, шаг интегрирования по времени  $Dt\phi = 1/n$  и интервал между присоединенными вихрями на пластине  $Dx\phi = 1/k$ . Методические расчеты показали, что шаг интегрирования  $Dt\phi$  сильно влияет на динамику свободных вихрей. Уменьшение  $Dt\phi$  затягивает развитие и срыв вихрей, но при этом увеличивает суммарную интенсивность вихрей за пластиной, что ведет к росту коэффициента нормальной силы  $c_y$ . Увеличение числа разбивки пластины  $k$  мало влияет на частоту срыва вихрей, но приводит к некоторому уменьшению  $c_y$ . Это объясняется, тем что, при увеличении разбивки интенсивности крайних вихрей на пластине распределяются более равномерно и интенсивности отрывающихся вихрей становятся не столь значительными.

Расчеты поперечного обтекания пластины при различных параметрах  $n$  и  $k$  показали, что при  $n = 12$  и  $k = 20$  среднее значение коэффициента нормальной силы  $c_y \approx 2,5$ , а число Струхала  $Sh = 0,175$  (рис. 2). Как показали последние экспериментальные исследования [11]  $Sh = 0,165$ , что на 0,01 меньше чем получаемое методом дискретных вихрей. Уменьшением шага интегрирования можно приблизить число Струхала к экспериментальному значению, но при этом увеличится коэффициент сопротивления пластины.

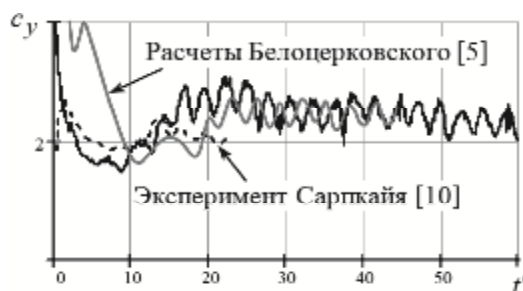


Рис. 2. Зависимость коэффициента нормальной силы пластины по безразмерному времени ( $\alpha=90^\circ$ )

Проведенные расчеты при угле атаки  $\alpha = 60^\circ$  и  $40^\circ$  при тех же параметрах  $n$  и  $k$ , подобранные для поперечного обтекания, дали следующие зависимости нормальной силы по времени (рис. 3).

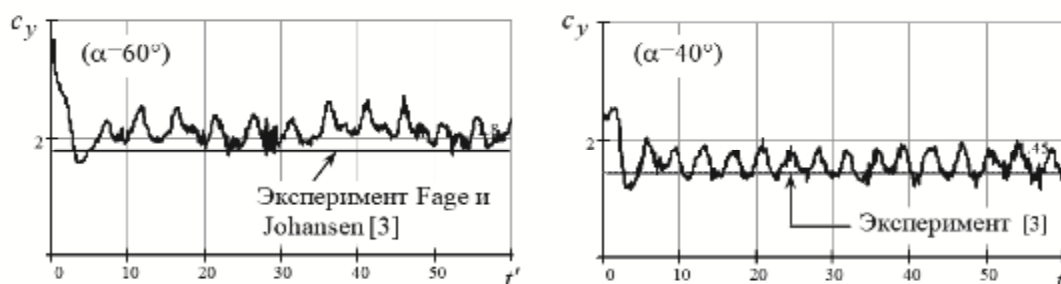


Рис. 3. Зависимости коэффициента нормальной силы пластины по безразмерному времени

Согласно [2] при  $\alpha = 60^\circ$  экспериментальное значение числа Струхаля  $Sh = 0,171$ , но по расчетам (рис. 3) получается значительно больше  $Sh \approx 0,2$ . Варьирование параметров  $k$  и  $n$  в не вносят изменения в  $Sh$ .

Несимметричность вводилась смещением оторвавшихся вихрей с левой кромки пластины вниз по потоку в промежутке  $2\epsilon t' \leq 3$  по зависимости [9]:

$$Dy\phi = 0,01 \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} - \cos \frac{\pi}{\epsilon} \frac{(t\phi - 5)}{4} \frac{\partial \dot{u}}{\partial t}$$

### Заключение

Приведенные расчеты показали, что подбором шага интегрирования и числа разбивки пластины удается получить удовлетворительную сходимость с экспериментальными результатами по коэффициенту нормальной силы. Но при этом получается некоторое расхождение по числу Струхаля, особенно при малых углах атаки.

Замена пластины присоединенными вихрями приводит к прохождению свободных вихрей сквозь нее, что приводит к скачкообразному изменению ее аэродинамических характеристик. Во избежание последнего необходимо вводить условие, например, исключение нормальной составляющей скорости свободного вихря вблизи пластины.

Формула сил, полученная импульсным способом, оказалась более чувствительна к движению вихрей вблизи пластины. Введение начального возмущения влияет в некоторой степени на последующее развитие вихрей и тем самым на зависимость коэффициента нормальной силы по времени.

Периодическое изменение нагрузок на пластинчатых конструкциях может привести к их разрушению. Рассчитанные коэффициенты нормальной силы для пластины методом дискретных вихрей для различных углов натекания позволяют определить действующие нагрузки для конкретного случая обтекания и рассчитать пластинчатые конструкций на прочность и усталость.

**Список библиографических ссылок**

1. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture // J. of Fluids Engineering. 1989. Vol. 111. P. 5–52.
2. Sarpkaya T. An inviscid model of two-dimensional vortex shedding for transient and asymptotically steady separated flow over an inclined plate // J. Fluids Mech. 1975. Vol. 68, part 1. P. 109–128.
3. Kiya M., Arie M. A contribution to an inviscid vortex-shedding model for an inclined flat plate in uniform flow // J. Fluids Mech. 1977. Vol. 82, part 2. P. 223–240.
4. Chein Reiyu, Chung J. N. Discrete-vortex simulation of flow over inclined and normal plates // Computers & Fluids 1988. Vol. 16. № 4. P. 405–427.
5. Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М. : Наука. 1978. 352 с.
6. Bryson A.E. Symmetric vortex separation on circular cylinders and cones // J. of Applied Mechanics. 1959. Vol. 26. № 4. P. 643–648.
7. Зиннуров Т. А., Каюмов Р. А., Манапов А. З. О чувствительности результатов статистического моделирования постоянных и ветровых нагрузок на сооружения к отклонениям параметров их законов распределений // Известие ВУЗов. Строительство. 2012. № 1. С. 132–136.
8. Гумеров А.В. Расчет движения вихревой нити вокруг кругового цилиндра методом дискретных вихрей // Известия КГАСУ. 2015. № 4 (33). С. 433–439.
9. Fraczak J. Numerical Simulation of Separated Flow Past a Circular Cylinder by a Discrete-Vortex Method // J. of Theoretical and Applied Mechanics. 1991. Vol. 22. № 3. P. 75–88.
10. Сарпкая Т. Течение с отрывом около тел, обладающих подъемной силой, и внезапно начинающееся течение около цилиндров // Ракетная техника и космонавтика. 1965. № 3. С. 41–49.
11. Yi Yang. Experimental investigation of vortex induced vibration of a flat plate in pitch oscillation. Master Thesis, Texas A&M University, US, 2010. P. 75.

**Gumerov Anvar Vasilovich**

candidate of technical sciences, associate professor

E-mail: [anvar\\_gumerov@list.ru](mailto:anvar_gumerov@list.ru)

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

**Zherekhov Vladimir Viktorovich**

candidate of technical sciences, associate professor

**Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev**

The organization address: 420111, Russia, Kazan, K. Marks st., 10

**Determination of the forces acting on the plate moving at an angle of attack  
by the method of discrete vortices****Abstract**

*Problem statement.* It is required to determine the force acting on the plate when it flows around an incompressible air stream at various angles of attack.

*Results.* Dependences of the coefficient of the normal force of the plate on time for different angles of attack by the method of discrete vortices are obtained. By varying the step of integrating the differential equations of detached vortices and splitting the plate, the convergence of the calculated force coefficients is ensured with the available experimental results.

*Conclusions.* The significance of the results obtained for the construction industry consists in the possibility of evaluating the lamellar structural elements for strength and fatigue by applying the calculated coefficients of normal force.

**Keywords:** the method of discrete vortices, associated and free vortices, control points, a plate, the Strouhal number, the complex flow potential.

### References

1. Sarpkaya T. Computational Methods With Vortices – The 1988 Freeman Scholar Lecture // *J. of Fluids Engineering*. 1989. Vol. 111. P. 5–52.
2. Sarpkaya T. An inviscid model of two-dimensional vortex shedding for transient and asymptotically steady separated flow over an inclined plate // *J. Fluids Mech.* 1975. Vol. 68. part 1. P. 109–128.
3. Kiya M., Arie M. A contribution to an inviscid vortex-shedding model for an inclined flat plate in uniform flow // *J. Fluids Mech.* 1977. Vol. 82, part 2. P. 223–240.
4. Chein Reiyu, Chung J. N. Discrete-vortex simulation of flow over inclined and normal plates // *Computers & Fluids* 1988. Vol. 16. № 4. P. 405–427.
5. Belotserkovsky S. M., Nisht M. I. Separated and unseparated flow around thin wings of an ideal fluid. M. : Nauka. 1978. 352 p.
6. Bryson A. E. Symmetric vortex separation on circular cylinders and cones // *J. of Applied Mechanics*. 1959. Vol. 26. № 4. P. 643–648.
7. Zinnurov T. A., Kayumov R. A., Manapov A. Z. On the sensitivity of the results of statistical modeling of constant and wind loads on structures to deviations of the parameters of their distribution laws // *Izvestiye VUZov. Stroitel'stvo*. 2012. №1. P. 132–136.
8. Gumerov A. V. Calculation of the movement of vortex filament around the circular cylinder using the method of discrete vortices // *Izvestiya KGASU*. 2015. № 4 (33). P. 433–439.
9. Fraczak J. Numerical Simulation of Separated Flow Past a Circular Cylinder by a Discrete-Vortex Method // *J. of Theoretical and Applied Mechanics*. 1991. Vol. 22. № 3. P. 75–88.
10. Sarpkaya T. Separated flow about lifting bodies and impulsive flow about cylinders // *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika*, 1965. № 3. P. 41–49.
11. Yi Yang. Experimental investigation of vortex induced vibration of a flat plate in pitch oscillation. Master Thesis. Texas A&M University. US. 2010. P. 75.