УДК 532.5:621.694:519.6
Горская Т.Ю. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: tatyana_gorskaya@mail.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1
Галимянов А.Ф. – кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: anis_59@mail.ru
Казанский (Поволжский) федеральный университет
Адрес организации: 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Аппроксимация дробных интегралов частными суммами ряда Фурье

Аннотация

Постановка задачи. Целью настоящего исследования является разработка и применение приближенного метода для вычисления интегралов, являющихся составной частью моделей, использующих интегралы Римана-Лиувилля, а также создание программного продукта, позволяющего проводить подобные вычисления для заданных функций.

Результаты. Основные результаты исследования состоят в построении квадратурной формулы для интеграла, при этом рассматривались случаи, когда плотность интеграла есть функция из пространств непрерывных функций, имеющих обобщенные производные с весом, и гельдеровых классов функций с весом. Для предложенной квадратурной формулы далее исследовалась погрешность ее приближения в пространствах непрерывных функций и квадратично-суммируемых с весом функций. В результате исследования установлены эффективные оценки погрешности аппроксимативного аппарата в предложенных классах функций. Кроме того приближенный метод реализован на компьютере в виде программы на языке СИ.

Выводы. Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в том, что при решении задач, в том числе задач по нахождению форм конструкций, учитывающих свойства материалов, изменения окружающей среды, модели которых используют интегралы Римана-Лиувиля, можно будет применять приближенный подход, квадратурную формулу, предложенную в статье.

Ключевые слова: интегралы Римана-Лиувилля, ряды Фурье, квадратурные формулы, приближенные вычисления, оценки погрешности.

В последние десятилетия возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений, имеющих дробный порядок, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка, а также и к интегральным уравнениям дробного порядка интегрирования. Это обусловлено рядом причин: во-первых, развитием как таковой теории дробного интегрирования и дифференцирования, во-вторых, обширными приложениями применения этого математического аппарата в различных областях науки и производства, особенно, в областях, связанных с нанотехнологиями, задачами диффузии, а также при создании конструкций, учитывающих состояние вещества [1, 2]. Кроме того разными авторами ранее проводились исследования в области приближенных методов дробных интегралов [3-5]. Нами также проводились работы, основанные на известных методологических подходах для решения задач приближения, сначала проекционно-сеточными методами [6, 7], затем по построению квадратурных формул для интегралов [8-10].

Вначале укажем некоторые определения и вспомогательные предложения, которыми будем оперировать при изложении материала.

Напомним, что функция $f(x) \in C_p^{(r)} (r > 0), x \in (-\infty; +\infty)$, имеющая производные до r-го порядка с весом $p(x)$: $f_p^{(i)}(x) = p(x)\frac{d}{dx}f_p^{(i-1)}(x), i = \overline{1,r}$, и для нее выполняется условие $-\infty < f_p^{(j)}(\infty) = f_p^{(j)}(-\infty) < \infty, j = \overline{0,r-1}$. Здесь и далее вес $p(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Функцию $f(x)$ представим рядом Фурье по системе функций $\{c_k(x), s_k(x)\}$, где $c_k(x) = \cos(2k\,arctg x), s_k(x) = \sin(2k\,arctg x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k(x) + b_k\, s_k(x),$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)c_k(x)dx}{1+x^2}, k = 0, 1, ..$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)s_k(x)dx}{1+x^2}, k = 1, 2, ..$$

Обозначим через:

$$u_n f = u_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k c_k(x) + b_k s_k(x) - \quad (1)$$

частную сумму ряда Фурье по системе функций $\{c_k(x), s_k(x)\}$.

Для функции $f(x) \in W_p^{(r)}, r \geq 1, x \in (-\infty; +\infty)$ справедливо следующее:

Лемма 1.

Пусть функция $f(x) \in W_p^{(r)}, r \geq 1, x \in (-\infty; +\infty)$, тогда для нее имеет место представление:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{dt}{1+t^2} + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_p^{(r)}(t)K_r(x,t)\frac{dt}{1+t^2},$$

где

$$K_r(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kr}(t)c_k(x) + s_{kr}(t)s_k(x),$$

$$c_{kr}(t) = \frac{1}{k^r}\cos\left(2arctgt + \frac{r\pi}{2}\right), s_{kr}(t) = \frac{1}{k^r}\sin\left(2arctgt + \frac{r\pi}{2}\right).$$

Из свойства ортогональности функций $\{c_k(x), s_k(x)\}$ с весом p на всей числовой прямой следует следующее:

Лемма 2.

Если $f(x) \in C_p^{(r)}, r \geq 1$, то $E_n(f)_C \leq E_n\left(f_p^{(r)}\right)_C E_n(K_r)_{L_p}$, если $f(x) \in W_p^{(r)}, r \geq 1$, то $E_n(f)_C \leq M E_n(K_r)_{L_p}$.

Следствие 1.

Если $f(x) \in H_{\beta,p}^{(r)}(A), r \geq 0, 0 < \beta \leq 1$,

то

$$E_n(f)_C \leq \frac{9\pi A}{2(n+1)^{r+\beta}}.$$

Следствие 2.

Если $f(x) \in W_p^{(r)}, r \geq 1$, то $E_n(f)_C \leq \frac{\pi M}{2(n+1)^r}$.

Обозначим через $H = L_{2,p}$ – линейное нормированное пространство квадратично-суммируемых функций с весом p. Напомним, здесь и далее в статье $p(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Введем норму $\|f\|_H = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^2(t)dt}{1+x^2}}$.

Для суммы (1) справедливы следующие оценки, представленные в виде леммы:

Лемма 3.

Для любых натуральных $n = 1, 2, ...$ справедливы соотношения:

$$\|u_n\|_{C\to H} \leq 1, \|u_n\|_{C\to C} \leq 2 + \ln n.$$

Справедлива также следующая теорема:

Теорема 1.

Если $f(x) \in C(-\infty; +\infty)$, то справедлива оценка погрешности аппроксимации функции частными суммами ряда Фурье (1) в пространстве H:

$$\|f - u_n f\|_H \leq 2E_n(f)_C.$$

Следствие 1.

Если $f(x) \in H_{\beta,p}^{(r)}(A), r \geq 0, 0 < \beta \leq 1$,

то

$$\|f - u_n f\|_H \leq \frac{9\pi A}{(n+1)^{r+\beta}}.$$

Следствие 2.

Если $f(x) \in W_p^{(r)}, r \geq 1,$

то

$$\|f-u_n f\|_H \leq \frac{\pi M}{(n+1)^r}.$$

Доказательство теоремы 1 следует из известной теоремы Лебега и оценок леммы 3, а следствия 1, 2 теоремы 1 следуют непосредственно из следствий 1, 2 леммы 3, соответственно.

Также справедлива следующая теорема:

Теорема 2.

Если $f(x) \in C(-\infty;+\infty)$, то справедлива оценка погрешности аппроксимации функции частными суммами ряда Фурье (1) в пространстве непрерывных функций:

$$\|f-u_n f\|_C \leq (3+\ln n) E_n(f)_C.$$

Следствие 1.

Если $f(x) \in H_{\beta,p}^{(r)}(A), r \geq 0, 0 < \beta \leq 1,$

то

$$\|f-u_n f\|_H \leq \frac{9\pi(3+\ln n)A}{2(n+1)^{r+\beta}}.$$

Следствие 2.

Если $f(x) \in W_p^{(r)}, r \geq 1,$

то

$$\|f-u_n f\|_H \leq \frac{\pi M}{2(n+1)^r}(3+\ln n).$$

Утверждения теоремы 2, а равно следствия 1, 2 следуют непосредственно из леммы 3 и ее следствий.

Результаты

Рассмотрим интеграл Римана-Лиувилля на бесконечном промежутке:

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Здесь функция $f(x)$, *заданная на числовой оси* $(-\infty;\ +\infty)$.

Аппроксимируя плотность интеграла (2) частной суммой ряда Фурье (1), придем к следующей приближенной формуле:

$$I_+^\alpha(u_n f; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k c_k(x) + b_k\, s_k(x)\right)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k c_{k\alpha}(x) + b_k\, s_{k\alpha}(x), \quad (3)$$

где

$$c_{n\alpha}(x) = \frac{1}{(2n)^\alpha}\cos\left(2narctgx + \frac{\alpha\pi}{2}\right), s_{n\alpha}(t) = \frac{1}{(2n)^\alpha}\sin\left(2narctgx + \frac{\alpha\pi}{2}\right),$$
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)c_k(x)dx}{1+x^2}, k = 0,1,..\ b_k = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)s_k(x)dx}{1+x^2}, k = 1,2,.. \quad (4)$$

Для формулы (3)-(4) имеет место следующее:

Лемма 4.

Если $f(x) \in C(-\infty;+\infty)$, то справедливо соотношение:

$$\|I_+^\alpha(f-u_n f)\|_H^2 \leq \frac{1}{(2n)^{2\alpha}}\|f-u_n f\|_H^2.$$

Скорость сходимости приближенного процесса (3) по метрике пространства H характеризует:

Теорема 3. Если $f(x) \in H_{\beta,p}^{(r)}(A), (r \geq 0, 0 < \beta \leq 1)$, то справедлива оценка:

$$\|I_+^\alpha(f-u_n f)\|_H = O\left(\frac{1}{(n+1)^{\beta+r}n^\alpha}\right).$$

Если $f(x) \in W_p^{(r)}, r \geq 1$, то

$$\|I_+^\alpha(f-u_n f)\|_H = O\left(\frac{1}{(n+1)^r n^\alpha}\right).$$

Утверждения теоремы следуют непосредственно из леммы 4 и следствий 1 и 2 теоремы 1 соответственно.

Далее рассмотрим оценки погрешности приближенной формулы (3) в равномерной метрике, для доказательства которых воспользуемся утверждением следующей леммы.

Лемма 5. Для любых натуральных $n = 1, 2, \ldots$ справедливо соотношение:

$$\|I_+^\alpha u_n\|_{C\to C} \le \frac{4}{2^\alpha}(1 + \ln n).$$

Теорема 4. Если $f(x) \in H_{\beta,p}^{(r)}(A), (r \ge 0, 0 < \beta \le 1)$, то справедлива оценка:

$$\|I_+^\alpha(f - u_n f)\|_C \le \frac{18\pi A}{2^\alpha(n+1)^{\beta+r}}\left\{1 + \ln n \frac{2}{1 - 2^{-r-\beta}} + \frac{1 + 2^{-r-\beta}}{(1 - 2^{-r-\beta})^2}\ln 2\right\}.$$

Если $f(x) \in W_p^{(r)}, r \ge 1$, то:

$$\|I_+^\alpha(f - u_n f)\|_C \le \frac{2\pi M}{2^\alpha(n+1)^r}\left\{1 + \ln n \frac{2}{1 - 2^{-r}} + \frac{1 + 2^{-r}}{(1 - 2^{-r})^2}\ln 2\right\}.$$

Оценивая остаточный член формулы (3) и последовательно применяя следствие 1, 2 леммы 2 и результаты леммы 5, получаем утверждение теоремы.

Выводы

В работе предложена квадратурная формула (3) с коэффициентами (4) для интеграла Римана-Лиувилля на бесконечном промежутке (2). Установлены скорости сходимости аппроскимационного аппарата (3) в метриках пространств непрерывных функций и квадратично суммируемых с весом функций (соответственно теоремы 4 и 3). Кроме того, данные оценки получены для приближения интеграла (2) в случаях плотностей $f(x) \in H_{\beta,p}^{(r)}(A), (r \ge 0, 0 < \beta \le 1)$ u $f(x) \in W_p^{(r)}, r \ge 1$. Считаем, что данные исследования будут интересны в качестве теоретического обоснования применения квадратурных формул для интегралов Римана-Лиувилля на бесконечном промежутке. Кроме того, авторами разработана программа, реализующая приближенный метод на языке программирования СИ.

Список библиографических ссылок

1. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их приложения. Нальчик : НИИ ПМА КБНЦ РАН. 2009.
2. Салимов Р. Б. Асимптотическое представление сингулярного интеграла с ядром Гильберта вблизи точки слабой непрерывности плотности // Известия вузов. Математика. № 7. 2015, С. 58–62.
3. Marinov T. M., Ramirez N., Santamaria F. Fractional integration toolbox // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013. V. 16, № 3. P. 670–681.
4. Barton T. A., Purnaras I. K. *Lp*-solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl., 2012, № 386. P**.** 830–841.
5. Saeed R. K., Ahmed C. Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method // Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2008.V. 2, № 1. P. 114–124.
6. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М. : Наука, 1981. 416 с.
7. Горская Т. Ю., Ожегова А. В. О сходимости проекционного метода для уравнения задачи движения // Известия КГАСУ, 2013, № 2 (24). С. 112–126.
8. Галимянов А. Ф., Сайфуллина Д. Э. Квадратурный метод решения интегрального уравнения смешанного типа // Известия Вузов. Математика, 2009, № 12. С. 22–27.
9. Галимянов А. Ф., Горская Т. Ю. Обобщенный метод Бубнова-Галеркина для уравнений с дробно–интегральным оператором // Известия КГАСУ, 2013, № 2 (24). С. 112–126.
10. Горская Т. Ю., Галимянов А. Ф., Воронцова В. Л. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла с логарифмически ослабленным ядром : Тезисы докладов 69 международной научной конференции по проблемам архитектуры и строительства / КГАСУ, Казань. 2017. С. 373.

Gorskaya T.Yu. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: tatyana_gorskaya@mail.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1
Galimyanov A.F. – candidate of physical-mathematical sciences, associate professor
E-mail: anis_59@mail.ru
Kazan Federal University
The organization address: 420008, Russia, Kazan, Kremlevskaya st., 18

Approximation of fractional integrals by private sums of the Fourier series

Abstract

Problem statement. The purpose of this study is the development and application of approximate methods for calculating integrals, which is the part of the models used by the integrals of Riemann-Liouville and the creation of a software product, allowing to carry out similar calculations for the given functions.

Results. Main results of the research consist in the construction of quadrature formulas for the integral, there were cases when the density of the integral is a function from space of continuous functions having generalized derivatives with the weight, and Hölder classes of functions with weight. For the proposed quadrature formulas next, we investigated the error of its approximation in spaces of continuous functions and square-summable with weight functions. The study has efficient error estimates approximation of the apparatus in the proposed classes of functions. In addition an approximate method implemented on a computer in the form of a program in the C language.

Conclusions. The significance of the results for the construction industry is that when solving the tasks, including the task of finding shapes of structures, considering material properties, environmental changes, models which use integrals of Riemann-Liouvile, you can apply the approximate approach, the quadrature formula proposed in the article.

Keywords: Riemann-Liouville integrals, Fulier series, quadrature formulas, approximate calculations, error estimates.

References

1. Nakhushev A. M. Elements of fractional calculus and their applications. Nalchik : NII PMA KBSC RAS. 2009.
2. Salimov R. B. Asymptotic representation of the singular integral with the Hilbert kernel near a point of weak continuity of the density of // Izvestiya vuzov. Math. № 7. 2015. P. 58–62.
3. Marinov T. M., Ramirez N., Santamaria F. Fractional integration toolbox // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013. V. 16, № 3. P. 670–681.
4. Barton T. A., Purnaras I. K. Lp-solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl., 2012, № 386. P. 830–841.
5. Saeed R. K., Ahmed C. Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method. Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2008. V. 2, № 1. P. 114–124.
6. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Introduction to projection-grid methods. M. : Nauka, 1981. 416 p.
7. Gorskaya T. Yu., Ozhegova A. V. On the convergence of the projection method for the equation of the motion problem // Izvestiya KGASU, 2013, № 2 (24). P. 112–126.
8. Galimyanov A. F., Sayfullin D. E. Quadrature method for solving an integral equation of mixed type // Izvestiya Vuzov. Matematika, 2009, № 12. P. 22–27.
9. Galimyanov A. F, Gorskaya T. Yu. A generalized Bubnov-Galerkin method for equations with a fractional-integral operator // Izvestiya KGASU, 2013, № 2 (24). P. 112–126.
10. Gorskaya T. Yu., Galimyanov A. F., Vorontsov V. L. Quadrature formula for a hypersingular integral with a logarithmically weakened core : Theses of reports of the 69th International scientific conference on architecture and construction / KGASU, Kazan. 2017. P. 373.