



УДК 521.11

**Воронцова В.Л.** – кандидат физико-математических наук, доцент

E-mail: [milen99@yandex.ru](mailto:milen99@yandex.ru)

**Казанский (Поволжский) федеральный университет**

**Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского**

Адрес организации: 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

## **О влиянии роста аэродинамического параметра на поведение предельных циклов при движении орбитальной тросовой системы по круговой орбите**

### **Аннотация**

Исследуется влияние значения аэродинамического параметра на поведение предельных циклов при движении жесткой орбитальной связки двух тел по круговой орбите. Используется уравнение относительного движения орбитальной связки двух тел с учетом влияния гравитационного эффекта, аэродинамического давления, аэроградиентного и диссипативного факторов. Для исследования применены известные методы нелинейной механики: метод уравнений Лагранжа первого рода, метод фазовой плоскости, метод точечных отображений, методы теории устойчивости движения. Эти методы нелинейной механики часто применяются в строительстве.

**Ключевые слова:** динамика космических систем, качественная теория динамических систем, орбитальная связка тел, тросовые системы, предельные циклы, цилиндрическое фазовое пространство, аэродинамический параметр, эксцентриситет орбиты.

### **Введение**

Тросовые системы, созданные на орбите из отдельных тел, связанные друг с другом и находящиеся друг от друга на расстояния от нескольких метров до десятков и сотен километров, занимают в космической технике особое место.

Существенный интерес к созданию КТС (космических тросовых систем) [2] появился в 70-е годы XX века в связи с предложением G. Colombo, M.D. Grossi (Смитсоновская астро-физическая лаборатория, США) использования зонда на тросе протяженностью 100 км для исследования параметров полей Земли и ее атмосферы на низких высотах. Оценка влияния аэродинамических эффектов на вращение и положение искусственных спутников проводилась в течение нескольких десятилетий и до сих пор является актуальной задачей. Эти исследования представлены, например, в монографиях [3-5], а также в многочисленных журнальных публикациях. Новый интерес к этой области возник в связи с проектированием крупномасштабных тросовых систем, в котором эффект аэроградиента является существенным [5].

Орбитальные космические тросовые системы большой протяженности, как новая перспективная область освоения космического пространства, имеет широкое практическое использование. Для таких космических тросовых систем аэродинамические эффекты имеют большое значение.

### **Постановка задачи**

В данной статье рассматривается, как ведет себя предельный цикл для уравнения относительного движения жесткой орбитальной связки двух тел с учетом влияния гравитационного эффекта, аэродинамического давления, аэроградиентного и диссипативного факторов, на круговой орбите, когда эксцентриситет орбиты равен нулю. В работе [6] дан вывод уравнения движения для круговой орбиты, а в работе [1] – вывод уравнения движения (1)-(5) с учетом аэроградиентного и диссипативного факторов для эллиптической орбиты.

Имеется орбитальная «связка тел» – две материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенные жестким безмассовым стержнем (жесткая гантель), под действием гравитационных и аэродинамических сил, приложенных к точкам  $m_1$  и  $m_2$ . Предполагается, что центр масс системы движется по кеплеровой эллиптической орбите.

В работе с помощью численной реализации метода точечных отображений Пуанкаре построены фазовые портреты задачи с регулярными и хаотическими движениями и прослежена эволюция этих фазовых портретов с изменением параметров. На фазовую плоскость  $(\alpha, \alpha')$  выводились результаты численного интегрирования уравнения движения только при значениях независимой переменной  $\nu = 2\pi n$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$  ( $\alpha$  – угол, отсчитываемый от трансверсали  $\vec{t}$  до направления  $\vec{r}_2$  в сторону направления орбитального движения). Исследования по решению дифференциальных уравнений проводились в пакете MathCad, как и в работах [10-12].

Сочетание аэроградиентной раскрутки связки ее торможением аэродинамическим трением приводит в пределе либо к относительным равновесиям, либо к предельным циклам второго рода (делается предположение, что угловая скорость  $\alpha'$  вдоль цикла постоянна).

Независимой переменной является истинная аномалия  $\nu$  (угол между перигейным и текущим радиусами-векторами центра масс  $S$  гантели). Для изучаемого уравнения в случае круговой орбиты предельный цикл располагался в окрестности  $\alpha' \approx 30$  (угловая скорость гантели  $\alpha'$  вдоль цикла постоянна), т.е. гантель на предельном цикле на круговой орбите вращается в 30 раз быстрее, чем движется по орбите.

### Результаты

В статьях [7] и [8] была предпринята попытка исследования предельных циклов с учетом влияния гравитационного градиента ( $n^2$ ), аэродинамического давления ( $a$ ), градиента плотности вдоль гантели ( $k$ ), аэродинамической диссипации ( $b$ ) в случае эллиптической орбиты. В случаях, рассмотренных в статьях [7-9] для предельных циклов на эллиптической орбите можно было указать значение  $\alpha'$ , к которому скатываются все точки.

При возрастании эксцентриситета орбиты на порядок при одинаковых значениях параметра  $a$  и значениях параметров  $k$  и  $b$ , расположение предельного цикла становится значительно выше. По результатам исследований в статьях [7-9] можно сделать вывод, что чем больше значение параметра  $a$ , тем больше различаются значения  $\alpha'$ . При приближении к максимальному значению  $a$  (больше которого предельные циклы исчезают), значения  $\alpha'$  отличаются больше чем на единицу.

В данной работе было проведено исследование по выявлению предельных циклов на круговой орбите, когда эксцентриситет  $e=0$ .

При малом значении аэродинамического параметра « $a$ » предельных циклов нет.

В рассматриваемом случае точки скатываются в достаточно широкую полосу, образуется «слой» хаотического движения (рис. 1). На представленных рисунках по оси абсцисс отложены значения  $\alpha$ , а по оси ординат – значения  $\alpha'$ .

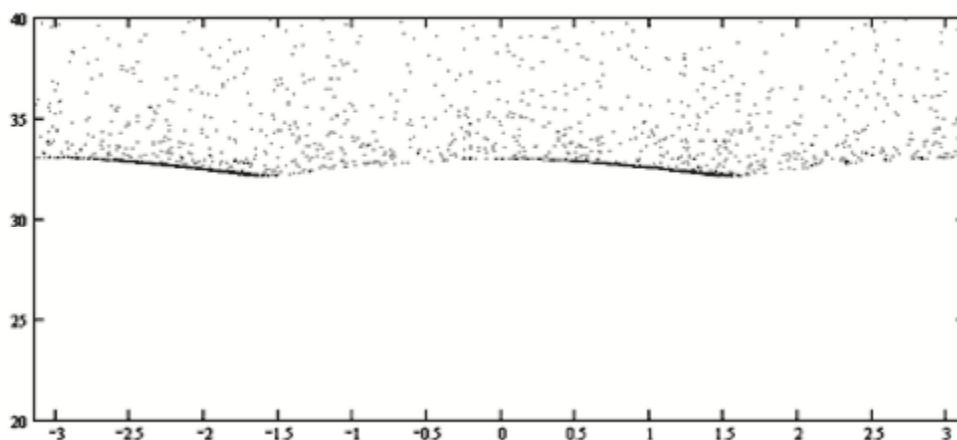
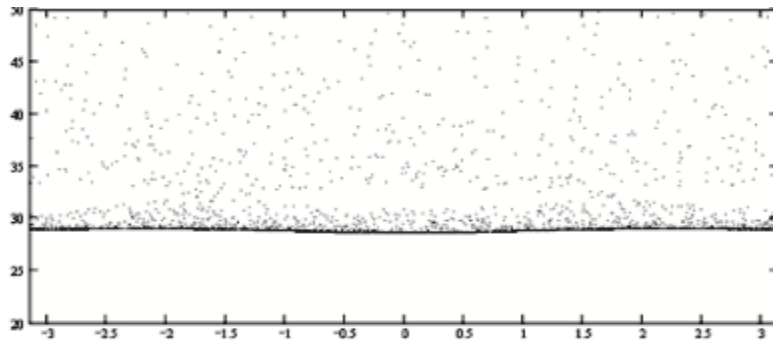
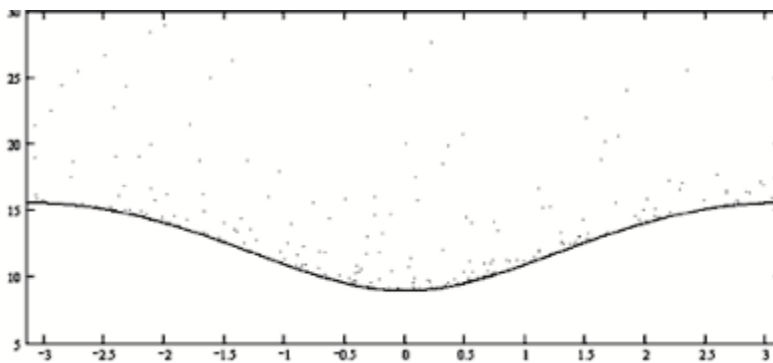


Рис. 1. ( $e=0$ ;  $a=1$ ;  $b=0,001$ ;  $k=0,1$ )

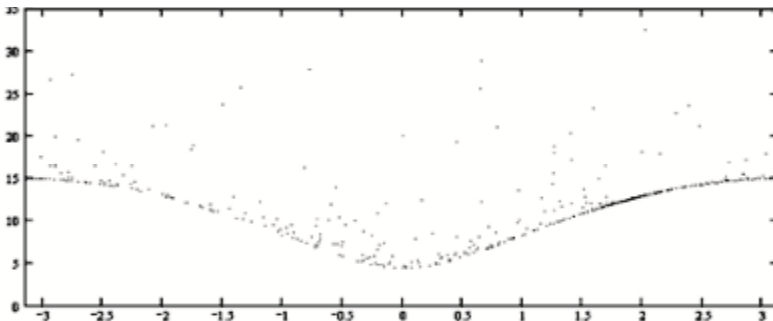
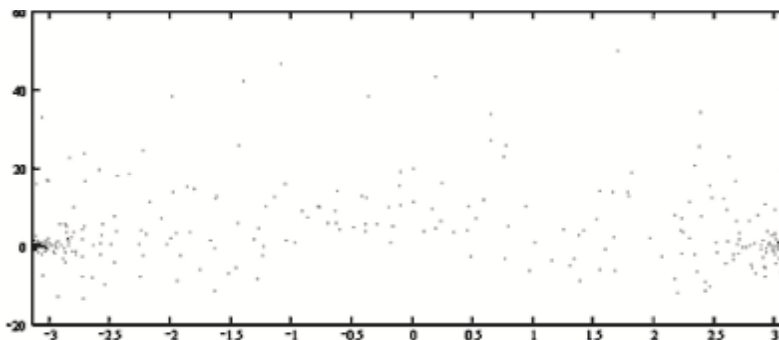
Предельный цикл возникает при  $a=5$  в окрестности  $\alpha' \approx 29$ . Пример такого цикла приведен на рис. 2.

Рис. 2. ( $e=0$ ;  $a=5$ ;  $b=0,001$ ;  $k=0,1$ )

При возрастании параметра  $a$  предельный цикл снижается (рис. 3).

Рис. 3. ( $e=0$ ;  $a=40$ ;  $b=0,001$ ;  $k=0,1$ )

Предельный цикл существует при значениях параметра  $a$  от 5 до 48. С дальнейшим возрастанием параметра  $a$  хаотические слои размываются (рис. 4-5).

Рис. 4. ( $e=0$ ;  $a=50$ ;  $b=0,001$ ;  $k=0,1$ )Рис. 5. ( $e=0$ ;  $a=60$ ;  $b=0,001$ ;  $k=0,1$ )

### Заключение

По результатам исследований в данной статье можно сделать вывод, что при движении по круговой орбите и равных значениях параметров  $k$  и  $b$ , положение предельного цикла зависит от значения аэродинамического параметра  $a$ . Рост параметра  $a$  приводит к уменьшению значения угловой скорости  $\alpha'$ . Расположение предельного цикла при этом становится ниже.

При маленьких значениях аэродинамического параметра  $a$  предельных циклов нет, возрастание аэродинамического параметра  $a$  приводит к появлению предельных циклов. Когда параметр  $a$  находится в диапазоне от 5 до 48, предельный цикл существует. При этом значение  $\alpha'$ , к которому «скатываются» все точки на фазовом портрете, снижается от 29 до 15. При дальнейшем увеличении параметра  $a$  ( $a > 48$ ) предельные циклы исчезают.

### Список библиографических ссылок

1. Белецкий В.В., Пивоваров М.Л. О влиянии атмосферы на относительное движение гантелеобразного спутника // Прикладная математика и механика, 2000, № 4. – С. 691-700.
2. Steiner W., Steindl A., Troger H. Dynamics of a space satellite system with two rigid endbodies. – Washington, April 10-14, 1995.
3. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
4. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. – М.: Наука, 1977. – 432 с.
5. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. – Киев: Наукова думка, 1984. – 187 с.
6. Белецкий В.В., Воронцова В.Л. Влияние градиента плотности атмосферы на вращение и ориентацию гантелеобразного спутника // Вестник МГУ. Сер. Матем. Мех. 2000, № 5. – С. 35-39.
7. Воронцова В.Л. Об исследовании поведения предельных циклов в зависимости от возрастания эксцентриситета. Вестник СГУ, 2011, № 77 (1). – С. 304-306.
8. Воронцова В.Л. Об анализе поведения предельных циклов при росте эксцентриситета орбиты и аэродинамического параметра // Вестник Московского авиационного института, 2013, т. 20, № 1. – С. 255-258.
9. Воронцова В.Л. Об исследовании поведения предельных циклов в зависимости от роста аэродинамического параметра при движении орбитальной тросовой системы по эллиптической орбите // Вестник Московского Авиационного института, 2015, т. 22, № 4. – С. 74-82.
10. Vorontsova V.L., Gorskay T.Uy. Approximate Methods of the Decision Differential the Equations for Continuous Models of Economy // Asian Social Science, 2015, vol. 11 (11). – P. 214-220.
11. Vorontsova V.L., Gorskay T.Uy. Numerical methods of the decision differential the equations for continuous models of economy // Mediterranean Journal of Social Sciences, 2015, vol. 6 (53). – P. 198-203.
12. Vorontsova V.L., Gorskaya T.Yu. On Application of Bubnov-Galerkin Method of the Solution of Differential Equations // International Journal of Applied Engineering Research (IJAER), 2015, Vol. 10, № 24. – P. 44715-44723.

**Vorontsova V.L.** – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor  
E-mail: [milen99@narod.ru](mailto:milen99@narod.ru)

**Kazan Federal University**

**Institute of Mathematics and Mechanics N.I. Lobachevskogo**

The organization address: 420008, Russia, Kazan, Kremlevskaya st., 18

## About influence of the growth of aerodynamic parameters on the behavior of limit cycles while orbital tether system driving in a circular orbit

### Resume

Assessing the impact of aerodynamic effects on the rotation and position of artificial satellites, carried out over several decades is still an urgent task. The new interest in this area arose in connection with the design of large-scale tether systems, in which the effect of the aero-gradient is considered significant.

In this paper study of the limit cycle for the equation of the relative motion of two bodies' rigid orbital link, taking into account the gravitation effect influence, the aerodynamic pressure, aero-gradient and dissipative factors, depending on the growth of aerodynamic parameter  $a$  when moving in a circular orbit. With the numerical implementation of the Poincare method of pointed mapping we have constructed phase portraits of the task with regular and random motions, and also traced the evolution of these phase portraits with the change of parameters.

**Keywords:** space systems dynamics, qualitative theory of dynamical systems, orbital bunch of bodies, tether systems, limit cycles, aerodynamic parameter, eccentricity of the orbit.

### Reference list

1. Beletsky V.V., Pivovarov M.L. About the influence of the atmosphere on the relative motion of a dumbbell satellite // *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, № 4. – P. 691-700.
2. Steiner W., Steindl A., Troger H. Dynamics of a space satellite system with two rigid endbodies. – Washington, April 10-14, 1995.
3. Beletsky V.V. Artificial satellite motion relative to the center of mass. – M.: Science, 1965. – 416 p.
4. Beletsky V.V. Essays about cosmic bodies motion. – M.: Science, 1977. – 432 p.
5. Beletsky V.V., Yanshin A.M. The influence of aerodynamic forces on the rotational motion of artificial satellites. – Kiev: Scientific thought, 1984. – 187 p.
6. Beletsky V.V., Vorontsova V.L. Atmosphere density gradient influence on rotation and orientation of a dumbbell-like satellite // *Vestnik Mosk. Gos. Univ. Ser. Mat. Mekh.*, 2000, № 5. – P. 35-39.
7. Vorontsova V.L. On the investigation of the behavior of limit cycles depending on the increase of the eccentricity of the orbit // *Vestnik SGU*, 2011, № 77 (1). – P. 304-306.
8. Vorontsova V.L. Analysis of the behavior of cycles limit under the increase of the orbit eccentricity and under the change of aerodynamic parameters // *Vestnik of the Moscow aircraft institute*, 2013, Vol. 20, № 1. – P. 255-258.
9. Vorontsova V.L. About the study of the behavior of the limit cycles, depending on the growth of the aerodynamic parameter when the orbital tether system moving by an elliptical orbit, 2015, Vol. 22, № 4. – P. 74-82.
10. Vorontsova V.L., Gorskay T.Uy. Approximate Methods of the Decision Differential the Equations for Continuous Models of Economy // *Asian Social Science*, 2015, vol. 11 (11). – P. 214-220.
11. Vorontsova V.L., Gorskay T.Uy. Numerical methods of the decision differential the equations for continuous models of economy // *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 2015, vol. 6 (53). – P. 198-203.
12. Vorontsova V.L., Gorskaya T.Yu. On Application of Bubnov-Galerkin Method of the Solution of Differential Equations // *International Journal of Applied Engineering Research (IJAER)*, 2015, Vol. 10, № 24. – P. 44715-44723.