

УДК 69.01

Удлер Е.М. – кандидат технических наук, профессор

E-mail: udler41@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Приближенный расчет площади поверхности тентового покрытия с точно заданной геометрией

Аннотация

В статье описывается подход к моделированию ячейки сложной криволинейной поверхности мягкой оболочки, заданной массивом высот в узлах квадратной координатной горизонтальной сети. В пределах проекции ячейки этой сети на оболочку, ее геометрия представляет собой поверхность отрицательной гауссовой кривизны и моделируется пирамидой с вершиной в центре криволинейной поверхности ячейки. Координаты вершины вычисляются как средние арифметические соответствующих координат узлов ячейки. Боковая поверхность пирамиды, определяемая как сумма площадей четырех треугольников, принимается за площадь оболочки в пределах ячейки координатной сети. Искомая площадь оболочки вычисляется как сумма площадей всех ячеек в границах горизонтальной проекции оболочки. В качестве примера, приводится листинг процедуры вычисления площади ячейки поверхности на языке программирования Паскаль.

Ключевые слова: мягкие оболочки. Тентовые покрытия. Криволинейные поверхности. Сетчатая модель поверхности. Площадь криволинейной поверхности. Численные методы. Компьютерное программирование.

Тентовые покрытия, как правило, имеют форму весьма сложной криволинейной поверхности отрицательной гауссовой кривизны. Пример тентового покрытия с такой поверхностью, разработанного с участием автора [1] представлен на рис. 1.



Рис. 1. Пример геометрии тентового покрытия

Трудности их аналитического описания предполагают применение численных методов при проектировании. В связи с этим предлагается простой алгоритм вычисления площади поверхности, использующий пространственные координаты ее точно заданной геометрии.

Удобство использования декартовой координатной системы часто предполагает дискретное моделирование поверхности в виде пространственной четырехугольной сетки с квадратной проекцией ячеек на горизонтальную плоскость. Графический пример такого представления приведен на рис. 2 и описанный в работах [2-3].

Тогда геометрия поверхности может быть описана массивом высот узлов сети, а абсциссы и ординаты узлов определяются их индексами и шагом сети (1).

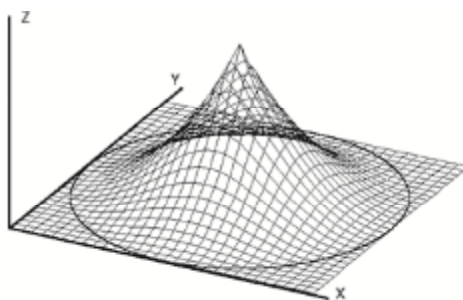


Рис. 2. Пример сетчатой модели шатровой оболочки в E_3

$$\begin{aligned} & \left[z_{i,j} \right] \\ x_{i,j} &= i \cdot d & y_{i,j} &= j \cdot d \end{aligned} \tag{1}$$

Очевидно, что площадь всей оболочки является суммой площадей поверхности, ограниченных ячейками сети. Участок оболочки в пределах произвольно выбранной ячейки, обозначенный полигоном ABCD на рис. 3, имеет вид пространственно криволинейной поверхности отрицательной гауссовой кривизны, характерной для тентовых покрытий.

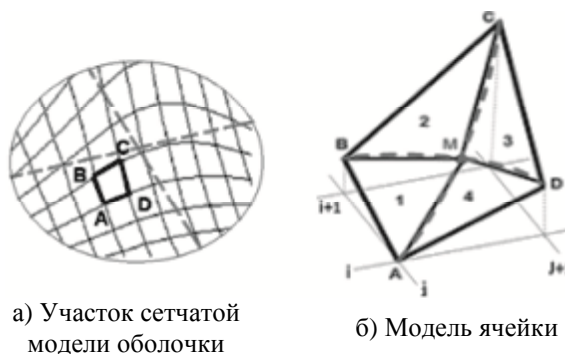


Рис. 3. Моделирование: а – покрытия сеткой, б – поверхности ячейки многогранником.
Кривые образующие седла условно показаны пунктирными линиями

Точное аналитическое вычисление площади поверхности такого участка представляет большую сложность. Предлагается заменить этот участок многогранной моделью, путем добавления еще одной вершины в точке М. Тогда площадь поверхности в пределах участка определится как площадь боковой поверхности четырех угольной пирамиды, то есть суммой площадей четырех треугольников, принадлежащих многограннику модели и обозначенных на рис. 3 цифрами 1, 2, 3, 4.

Координаты вершины в точке М могут быть вычислены по формулам (2) и (3). Они реализуют простой линейный алгоритм отыскания некоторой срединной точки на криволинейной поверхности оболочки в ячейке, предложенный и использованный автором в работах [4-6].

$$x_M = \frac{x_{i,j} + x_{i,j+1}}{2}; \quad y_M = \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j}}{2}; \tag{2}$$

$$z_M = \frac{z_{i,j} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j} + z_{i+1,j+1}}{4}. \tag{3}$$

Для вычисления площадей треугольников по известной из геометрии [7-8] формуле (4) достаточно найти длины хорд АВ, ВС, CD и AD ячейки сети на поверхности по формуле (5), длины ребер многогранника АМ, ВМ, СМ и DM по формуле (6), а также значения синусов углов между ними, используя теорему косинусов (7).

$$S_{\Delta} = \frac{ab \sin(g)}{2}, \quad (4)$$

$$l = \sqrt{d^2 + \Delta z^2}, \quad (5)$$

$$l = \sqrt{d^2 / 2 + \Delta z^2}, \quad (6)$$

$$\cos(g) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (7)$$

В этих формулах приняты обозначения:

a и b – длины смежных ребер пирамиды;

d – шаг узлов сети;

Δz – превышение высот концов отрезков;

c – хорда ячейки сети, противоположной вычисляемому углу.

Порядок вычисления площади поверхности ячейки сети, может быть следующим:

1. Вычислить высоту точки М, как вершины моделирующего многогранника по формуле (3);

2. Вычислить длину каждой стороны ячейки по формуле (5);

3. Вычислить длину каждого ребра пирамиды по формуле (6);

4. Вычислить косинус каждого угла при вершине М по формуле (7);

5. Вычислить площади четырех треугольников с вершиной в точке М по формуле (4) с учетом, что $\sin^2(\gamma) = 1 - \cos^2(\gamma)$.

В качестве примера, ниже приводится листинг простой процедуры, которая вычисляет площадь поверхности ячейки сетчатой модели тентового покрытия, реализующей этот алгоритм и составленная на языке программирования Паскаль.

Листинг процедуры:

```

procedure Sqwcell (i,j: integer; var S: real);
var a, b, c, d, zm: real;
{процедура-функция вычисления длины отрезка}
function Linelen (k: byte; h1, h2: real): real;
var dz, u: real;
begin
dz:=h1-h2;
if k=1 then u:=d*d+dz*dz else u:=d*d/2+dz*dz;
Linelen:=sqrt(u);
end;
{процедура-функция вычисления площади треугольника}
function Stre: real;
var cosu, sinu : real;
begin
cosu := (a*a + b*b -c*c) / 2 / a / b;
sinu := sqrt (1- cosu*cosu);
Stre := a*b*sinu/2;
end;

begin {main}
S:= 0; {обнуление счетчика площади}
zm:=( z[i,j] + z[i,j+1] + z[i+1,j] + z[i+1,j+1])/4;
a:= Linelen (2, z[i,j], zm);
b:= Linelen (2,z[i+1,j], zm);
c:= Linelen (1,z[i,j],z[i+1,j]);
S:= S + Stre; {добавлена площадь 1-ого треугольника}
b:= Linelen (2,z[i,j+1], zm);
c:= Linelen (1,z[i,j], z[i,j+1]);
S:= S + Stre; {добавлена площадь 2-ого}
a:= Linelen (2,z[i+1,j+1], zm);
c:= Linelen (1,z[i,j+1],z[i+1,j+1]);
S:= S + Stre; {добавлена площадь 3-ого}

```

```

b:= Linelen (2,z[i+1,j], zm);
c:= Linelen (1,z[i+1,j],z[i+1,j+1]);
S:= S + Stre;    {добавлена площадь 4-ого и вычислена площадь ячейки}
end;

```

Для проверки работы программы и алгоритма, на примере модели кругового шатрового покрытия (рис.2), произведено сравнение с результатами расчета, проведенного путем суммирования площадей усеченных конических поверхностей [5] с тем же шагом дискретизации, по формуле (8):

$$S_{об} = p \sum_{i=1}^n (2R - (2i - 1) \cdot d) \cdot d \cdot \sqrt{1 + f'^2(x_{i,j})}. \quad (8)$$

Здесь: R – радиус основания шатра; d – шаг дискретизации оболочки;
 $n=R\text{modd}$ – количество конических участков, на которые разбита поверхность;
 $f'(x)$ – производная от уравнения образующей оболочки вращения.

Таблица

Сравнение площадей, вычисленных в м² по приближенному алгоритму с более точным расчетом по формуле (8)

Отношение высоты оболочки к радиусу основания	Шаг сетки 50 мм,		Расхождение в %	Шаг сетки 100 мм,		Расхождение в %
	По алгоритму	По (8)		По алгоритму	По (8)	
0,3	21,96	21,74	1,01	21,94	21,74	0,92
0,4	23,36	23,14	0,95	23,34	23,14	0,86
0,5	24,98	24,76	0,89	24,96	24,77	0,81
0,6	26,77	26,55	0,83	26,74	26,55	0,72
0,7	28,68	28,46	0,77	28,65	28,46	0,67
0,8	30,69	30,47	0,72	30,65	30,48	0,59
0,9	32,78	32,56	0,68	32,74	32,57	0,55
1,0	34,93	34,72	0,60	34,89	34,72	0,49

В таблице приводятся результаты этих расчетов. Их анализ показывает незначительное расхождение величин площадей. Оно зависит от принимаемого шага сети и обычно не превышает 1-ого процента. Это позволяет сделать вывод о приемлемости предлагаемого подхода для практических целей проектирования.

Список библиографических ссылок

- Ишанова В.И., Удлер Е.М. Апробация метода раскрыя при реконструкции тентового навеса сложной формы в г. Нижнекамске // Известия КГАСУ, 2012, № 4. – С. 124-130.
- Ишанова В.И., Удлер Е.М. Развертка поверхности кругового шатра с вогнутой параболической образующей. // Известия КГАСУ, 2014, № 2. – С. 85-89.
- Толстов Е.В., Удлер Е.М. Проектирование тентовых оболочек // «CADmaster», 2001, № 1 (6). – С. 43-47.
- Удлер Е.М. Сеть Чебышева на поверхности сферы // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований, 2014, № 6. – С. 43-44.
- Удлер Е.М., Ишанова В.И. Компьютерное моделирование оболочек сетями Чебышева. // Труды V международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». Иркутский ГТУ, 2014. – С. 182-183.
- Пекерман Э.Е., Удлер Е.М. Численное определение формы тканевых строительных оболочек. // Известия КГАСУ, 2007, № 1. – С. 56-57.
- Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука. ФизматГИЗ, 1981. – 300 с.
- Краткий физико-технический справочник. Под редакцией К.П. Яковлева. Том первый. ФизматГИЗ, 1960. – 445 с.

Udler E.M. – candidate of technical sciences, professor

E-mail: udler41@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

An approximate calculation of the surface area of an awning cover with numerical representation of the geometry

Resume

In the design process of tent structures it is necessary to calculate the consumption of materials in the soft shell. However in the available literature the author has not found a description of methods of calculations for shells not trivial forms. In this regard we propose a new approach to solving the problem. An algorithm for calculating the area of a complex curved surface of a soft shell, given by an array of heights at the nodes of a square horizontal coordinate mesh.

Within projection of this mesh cell on the shell its geometry has a surface of negative Gaussian curvature and modeled by the pyramid with the apex at the center of the curved surface of the cell. The coordinates of the vertices are calculated as the arithmetic mean of the coordinates of the cell sites. The side surface of the pyramid defined as the sum of the areas of four triangles taken as a shell area within the coordinates of the cell mesh. Seeking envelope area is calculated as the sum of the squares of all the cells in the horizontal projection of the shell borders. As, an example, provided the procedure of calculating the surface cell's area, in the Pascal programming language. The comparison of calculation of the proposed algorithm with some exact solutions. The calculation results differ very little. This proves the possibility of wider use in engineering practice.

Keywords: soft shell, fabric covering, the curved surface, the mesh model of the surface, the area of the curved surface, numerical methods, computer programming.

Reference list

1. Ishanova V.I., Udler E.M. Aprobaton of method of cutting in the reconstruction of complex shaped tent shed in the Nizhnekamsk city // *Izvestiya KGASU*, 2012, № 4 (22). – P. 124-129.
2. Ishanova V.I., Udler E.M. Sweep the surface of shell circular in plan with the concave parabolic side // *Izvestiya KGASU*, 2014, № 2 (28). – P. 85-89.
3. Tolstov E.V., Udler E.M. Design of soft tent shell // «CADmaster», 2001, № 1 (6). – P. 43-47.
4. Udler E.M. Chebyshev's mesh on the spherical surface // *Mezhdunarodnyj zhurnal prikladnyh i fundamental'nyh issledovanij*, 2014, № 6. – P. 43-44
5. Udler E.M., Ishanova V.I. Computer's modelling of shell by Chebyshev's mesh. // *Trudy V mezhdunarodnogo simpoziuma «Aktual'nye problemy komp'yuternogo modelirovaniya konstrukcij i sooruzhenij»*. – Irkutskij GTU, 2014. – P. 182-183.
6. Pekerman E.E., Udler E.M. Numerical method of determination of surface shape of soft construction shell // *Izvestiya KGASU*, 2007, № 1. – P. 56-57.
7. Bronshtejn I.N., Semendyaev K.A. Handbook of Mathematics. // For engineers and technical colleges students. – M.: Nauka. FizmatGIZ, 1981. – 300 p.
8. Summary of physical and technical reference // By editing K.P. Yakovlev, Tom 1: *FizmatGIZ*, 1960. – 445 p.