УДК 624.04
Гирфанов И.С. – кандидат технических наук, профессор
E-mail: Girfanov@kgasu.ru
Юманов В.А. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: 2381802@kgasu.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1

Определение длины ребер жесткости, усиляющих приузловые зоны ферм и структур, выполненных из тонкостенных профилей

Аннотация

Целью работы было аналитическое определение длины ребер жесткости, препятствующих депланации сечений тонкостенных стержней конструкции, потере их прочности в приузловых зонах, где помимо предельных усилий действуют изгибающие моменты и поперечные силы, вызывающие сложное напряженное состояние в этих зонах стержней конструкций. Несмотря на локализацию данных зон элементов металлоконструкций, именно они являются причинами начала процессов разрушения элементов конструкций.

Ключевые слова: вариационные методы, краевые эффекты, депланация тонкостенных сечений, гипотеза плоских сечений, шпренгели, эвристически.

В металлических плоских и перекрестных фермах, а также структурных конструкциях, изготовленных из облегченных тонкостенных профилей, одной из важных проблем остается передача сосредоточенных узловых усилий с одного элемента конструкции на другой (с пояса, например, на раскосы, стойки или шпренгели), поскольку именно в этих приузловых зонах конструкций помимо продольных усилий действуют изгибающие моменты и поперечные силы, вызывающие сложное напряженное состояние в них.

Несмотря на локализацию данных зон, именно они являются причинами начала процессов разрушения элементов отмеченных выше металлоконструкций, поскольку именно в этих зонах имеют место краевые эффекты, вызванные неравномерностью распределения напряжений в них, потерей местной устойчивости стенок, депланацией тонкостенных сечений, потерей прочности материала конструкций.

С целью предотвращения появления подобных проблем приузловые зоны конструкций усиляются ребрами жесткости, длину и сечение которых назначают большей частью эвристически.

Поскольку для установления размеров усиляющих данные зоны ребер непригодны соотношения между напряжениями и деформациями, построенные на гипотезе плоских сечений, используем более точные методы, учитывающие отмеченные выше аспекты работы соединений, а именно вариационный метод (в перемещениях) В.З.Власова [1].

В соответствии с ним будем считать, что перемещения, возникающие в отдельных точках поперечного сечения тонкостенного профиля, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} Z(x,y) &= Z_1(y)g_1(x) + Z_2(y)g_2(x), \\ w(x,y) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

здесь $Z_1(y)$ - предельное перемещение сечения стержня, соответствующее гипотезе плоских сечений; $Z_2(y)$ - депланация сечения; $w(x,y)$ - перемещение в плоскости поперечного сечения; $g_1(x)$ и $g_2(x)$ - функции распределения обобщенных перемещений $Z_1(y)$ и $Z_2(y)$ по контуру поперечного сечения.

Эпюры $g_1(x)$ и $g_2(x)$ соответствуют единичным значениям обобщенных перемещений $Z_1(y)$ и $Z_2(y)$ и на протяжении длины зоны усилия являются взаимно ортогональными.

Запишем интегральные условия равновесия по В.З. Власову в виде:

- для верхней части стержня:

$$\left.\begin{aligned} &E\alpha_{11}Z_1'' = 0, \\ &E\alpha_{22}Z_2'' - G\cdot\beta_{22}Z_2 = 0; \end{aligned}\right\};\qquad (2)$$

- для нижней части стержня:

$$\left.\begin{aligned} &E\cdot\bar\alpha_{11}\cdot\bar Z_1'' + E\cdot\bar\alpha_{12}\cdot\bar Z_2'' = 0, \\ &E\cdot\bar\alpha_{12}\cdot\bar Z_1'' - E\cdot\bar\alpha_{22}\cdot\bar Z_2'' - G\cdot\bar\beta_{22}\cdot\bar Z_2 = 0; \end{aligned}\right\},\qquad (3)$$

где E – модуль упругости; G – модуль сдвига.

Коэффициенты уравнений (А.2) и (А.3) определяются из соотношений (А.4):

$$\begin{aligned} &\beta_{22} = \alpha_{11} = A_в, \quad \bar\alpha_{12} = \int_{A_н}\gamma_1(x)\gamma_2(x)dA, \\ &\alpha_{22} = \int_{A_в}\gamma_2^2(x)dA, \\ &\bar\alpha_{11} = \bar\beta_{22} = A_н, \quad \bar\alpha_{22} = \int_{A_н}\gamma_2^2(x)dA. \end{aligned}\qquad (4)$$

Здесь $A_в$ и $A_н$ площади сечений верхней и нижней частей стержня.

Интегрируя уравнения (А.2) и (А.3) получаем соответственно:

$$\left.\begin{aligned} &Z_1(y) = C_1y + C_2, \\ &Z_2(y) = C_3e^{ky} + C_4e^{-ky}, \end{aligned}\right\},\qquad (5)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{G\beta_{22}}{E\alpha_{22}}}\,,\qquad (6)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\bar Z_1(y) = -\frac{\bar\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\left(D_1e^{\bar k\cdot y} + D_2e^{-\bar k\cdot y}\right) + D_3 + D_4y, \\ &\bar Z_2(y) = D_1e^{\bar k\cdot y} + D_2e^{-\bar k\cdot y}, \end{aligned}\right\},\qquad (7)$$

где

$$\bar k = \sqrt{\frac{G\bar\beta_{22}}{E(\bar\alpha_{22} - \dfrac{\bar\alpha_{12}^2}{\bar\alpha_{11}^2})}}\,.\qquad (8)$$

Постоянные интегрирования находим из граничных уравнений на верхнем и нижнем концах стержня, а также на плоскости контакта этих частей.

При $y = l_1$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} &E\cdot\alpha_{11}\cdot\bar Z_1' = -p, \\ &E\cdot\alpha_{22}\cdot\bar Z_2' = -p\gamma_p, \end{aligned}\right\},\qquad (9)$$

здесь γ_p – ордината эпюры $\gamma_2(x)$ в центре тяжести сечения стержня.

Подставляя в уравнения (А.9) значения Z_1' и Z_2', определяемые из уравнений (А.5), определяем постоянные интегрирования C_1 и C_3:

$$C_1 = \frac{p}{E\alpha_{11}}, \quad C_3 = -\frac{p\gamma_p}{E\alpha_{22}k}e^{-kl_1} + C_4e^{-2kl_1}.\qquad (10)$$

После этого уравнения (А.5) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &Z_1(y) = -\frac{p}{E\alpha_{11}}y + C_2, \\ &Z_2(y) = -\frac{p\gamma_p}{E\alpha_{22}k}e^{k(y-l_1)} + C_4\left(e^{k(y-2l_1)} + e^{-ky}\right). \end{aligned}\right\}.\qquad (11)$$

При $y = -l_2$ имеем:

$$\bar Z_1(y) = \bar Z_2(y) = 0.\qquad (12)$$

Вводя в соотношения (А.12) функции (А.7) и решая полученные уравнения совместно находим, что:

$$D_2 = -D_1 e^{-2\bar{k}\cdot l_2} \text{ и } D_3 = D_4 l_2 . \qquad (13)$$

Выражения (А.7) с соотношениями (А.13) перепишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} \bar{Z}_2(y) &= D_1\left(e^{\bar{k}\cdot y} - e^{-\bar{k}(y+2l_2)}\right), \\ \bar{Z}_1(y) &= -D_1 \frac{\bar{\alpha}_{12}}{\bar{\alpha}_{11}}\left(e^{\bar{k}\cdot y} - e^{-\bar{k}(y+2l_2)}\right) + D_4\left(l_2 + y\right). \end{aligned}\right\} . \qquad (14)$$

Определение оставшихся постоянных интегрирования получим используя условия контакта нижней и верхней частей стержня конструкции.

При $y = 0$ получим:

$$\left.\begin{aligned} &Z_1(y) = \bar{Z}_1(y), \qquad Z_2(y) = \bar{Z}_2(y), \\ &\int_{A_в} Q_y \gamma_1 dA = \int_{A_н} \bar{Q}_y \gamma_1 dA, \\ &\int_{A_в} Q_y \gamma_2 dA = \int_{A_н} \bar{Q}_y \gamma_2 dA, \end{aligned}\right\} . \qquad (15)$$

Здесь $Q_y(x, y)$ и $\overline{Q}_y(x, y)$ – значения напряжений, определяемые из уравнения:

$$Q_y = E\frac{\partial Z}{\partial y} = E z_1' \gamma_1 = E z_2' \gamma_2 . \qquad (16)$$

Внося в уравнения (А.15) значения $Q_y(x, y)$ и $\overline{Q}_y(x, y)$, найденные из уравнения (А.16) и функции $Z_i(y)$ и $\bar{Z}_i(y)$, определяемые уравнениями (А.11) и (А.13), и решая полученную систему алгебраических уравнений, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&D_4 = \frac{p}{E\bar{\alpha}_{11}}, \\
&D_1 = -\frac{p\gamma_p}{E}\cdot\frac{e^{-\bar{k}l_1}\left(\dfrac{2}{1+e^{-2\bar{k}l_1}} - \dfrac{\bar{\alpha}_{12}}{\gamma_p\bar{\alpha}_{11}}e^{\bar{k}l_1}\right)}{\bar{k}\left(\bar{\alpha}_{22} - \dfrac{\bar{\alpha}_{12}^{\,2}}{\bar{\alpha}_{11}}\right)\cdot\left(1+e^{-2\bar{k}l_2}\right) + \alpha_{22}k\cdot\dfrac{\left(1-e^{-2\bar{k}l_2}\right)\left(1-e^{-2kl_1}\right)}{1+e^{-2kl_1}}}, \\
&C_4 = -\frac{p\gamma_p}{E}\cdot\frac{e^{-kl_1}\left(\dfrac{2}{1+e^{-2kl_1}} - \dfrac{\alpha_{12}}{\gamma_p\bar{\alpha}_{11}}e^{kl_1}\right)}{\bar{k}\left(\alpha_{22} - \dfrac{\bar{\alpha}_{12}^{\,2}}{\alpha_{11}}\right)\dfrac{\left(1-e^{-2\bar{k}l_2}\right)\left(1+e^{-2kl_1}\right)}{\left(1-e^{-2\bar{k}l_2}\right)} + \alpha_{22}k\cdot\left(1-e^{-2kl_1}\right)} + \\
&+\frac{p\gamma_p}{E\alpha_{22}k}\cdot\frac{e^{-kl_1}}{\left(1+e^{-2kl_1}\right)}, \\
&C_3 = \frac{p\gamma_p}{E\alpha_{11}}\left(\frac{\alpha_{12}\cdot e^{-kl_1}\left(\dfrac{2}{1+e^{-2kl_1}} - \dfrac{\alpha_{12}}{\gamma_p\alpha_{11}}\cdot e^{kl_1}\right)}{\bar{k}\left(\alpha_{22} - \dfrac{\bar{\alpha}_{12}^{\,2}}{\alpha_{11}}\right)\cdot\dfrac{\left(1+e^{-2\bar{k}l_2}\right)}{\left(1-e^{-2\bar{k}l_2}\right)} + \alpha_{22}k\cdot\left(\dfrac{1-e^{-2kl_1}}{1+e^{-2kl_1}}\right)} - \frac{l_1}{\gamma_p}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

В полученные выражения для постоянных интегрирования осталась неопределенной длина усиляющих приузловые зоны конструкций ребер l_1.

Для определения ее величины введем условие, полученное из приведенного выше решения, чтобы напряжения в месте окончания ребра жесткости отличались от напряжений, вычисленных по гипотезе плоских сечений не более 4 %.

Это условие запишется в виде:

$$-\frac{0{,}04\cdot p}{\bar{\alpha}_{11}} = E\bar{Z}_2'\cdot\gamma_p . \qquad (18)$$

Подставляя в выражение (А.18) значение $\bar{Z}_2'(y)$ из уравнений (А.14), используя соотношения (А.17) и вводя обозначения:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 0{,}02\frac{\bar{\alpha}_{22}}{\bar{\alpha}_{11}\gamma_p^2} - 0{,}02\frac{\bar{\alpha}_{12}^2}{\bar{\alpha}_{11}\gamma_p^2} + 0{,}4\frac{\bar{\alpha}_{12}}{\bar{\alpha}_{11}\gamma_p}, \\ N_2 &= 0{,}02\frac{\alpha_{22}\cdot k}{\bar{\alpha}_{11}\cdot\bar{k}\gamma_p^2}, \end{aligned}\right\}, \qquad (19)$$

получим:

$$\begin{aligned} &(N_1+N_2)+(N_1-N_2)e^{-2kl_1}+\left(N_1+N_2-e^{kl_1}\right)e^{-2\bar{k}L}e^{2l_1(\bar{k}-k)}+ \\ &+(N_1-N_2)^{-2kL}e^{2\bar{k}l_1}-e^{-kl_1}=0, \end{aligned} \qquad (20)$$

здесь L – полная длина стержня.

В том случае, если в (А.20) значения N_1 и N_2 близки, то в силу малости разницы можно пренебречь вторым, третьим и четвертым членами равенства (А.20).

Тогда уравнение (А.20) примет вид:

$$N_1+N_2-e^{-kl_2}=0. \qquad (21)$$

Из уравнения (А.21) искомая длина ребра жесткости будет равна:

$$l_1=\frac{1}{k}\ln\frac{1}{N_1+N_2}. \qquad (22)$$

В случае же, когда значения N_1 и N_2 существенно различны, тогда пренебрегать вторым членом равенства (А.20) нельзя.

В этом случае уравнение (А.20) запишется в виде:

$$(N_1+N_2)+(N_1-N_2)e^{-2kl_1}-e^{-kl_1}=0. \qquad (23)$$

Определяя из него значение e^{-kl_1} получим:

$$e^{-kl_1}=\frac{1}{2(N_1-N_2)}\pm\sqrt{\frac{1-4\left(N_1^2-N_2^2\right)}{4(N_1-N_2)^2}}. \qquad (24)$$

Логарифмируя обе части выражения (А.24) получим формулу необходимой длины ребра:

$$l_1=\frac{1}{k}\ln\frac{2(N_1-N_2)}{1-\sqrt{1-4N_1^2+4N_2^2}}. \qquad (25)$$

Список библиографических ссылок

1. Власов В.З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. – М.: Стройиздат, 1949. – 154 с.
2. Уманский А.А. Строительная механика самолета. – М.: Оборонгид, 1961. – 529 с.
3. Юманов В.А., Гирфанов И.С. К вопросу обеспечения минимума массы некоторых тонкостенных статически неопределимых систем. // Исследования, расчет и испытания МК, 1988, вып. 2. – Казань. – 529 с.
4. Лейбензон Л.С. Вариационные методы решения задач теории упругости. – М.: Мир, 2010. – 204 с.
5. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. – М.: Мир, 2009. – 301 с.
6. Манапов А.З. Расчет надежности и ресурса строительных конструкций. – Казань: Изд-во КГАСУ, 2010. – 131 с.
7. Сальвадори М. Численные методы в технике. – М.: ИЛ., 2010. – 231 с.
8. Юманов В.А., Гирфанов И.С. К вопросу обеспечения минимума массы тонкостенных статически неопределимых систем. // Известия КГАСУ, 2009, № 1 (11). – 10 с.

Girfanov I.S. – candidate of technical sciences, professor
E-mail: Girfanov@kgasu.ru
Jumanov V.A. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: 2381802@kgasu.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Determining the length of the stiffeners, that amplifies nodal zone of farms and structures made of thin-walled profiles

Resume

This article contains issues and methods of prognosis of the local buckling effects and cross section distortions in nodal zones of the thin shell elements of the spatial lattice structures and trusses with cold formed members. The issue is as follows. Load bearing capacity calculations of connections in the mentioned structures, where braced members usually are joined together, wouldn't be correct to derive from equations of a structure mechanic, which based on a hypothesis of a flat cross sections, hence there is need in more precise approaches. To achieve more accurate results, variation method of dr. Vlasov written in deformations was used. By solving integral equations, obtained with that method, constants of integration were defined with unknown values of length of the rib plates and nodal zones should have been reinforced with. When indeterminacy got retrieved, certain values of length of these reinforcing plates, depending on fixed numbers of summand in final equation, were obtained. Then choosing one of the two parameters, which describe reinforcing near-to-connection areas of the members, can be determined either length of the reinforcing plate with fixed cross section area or cross section area with fixed length of reinforcing plate.

Keywords: variational methods, edge effects, warping of thin-walled cross-sections, the hypothesis of flat sections, sprengel, heuristically.

Reference list

1. Vlasov V.Z. Structural mechanics of thin-walled spatial systems. – M.: Stroiizdat, 1949. – 154 p.
2. Umanskii A.A. Structural Mechanics and Aircraft. – M.: Oborongid, 1961. – 529 p.
3. Yumanov V.A., Girfanov I.S. On the question of ensuring some minimum mass of thin statically indeterminate systems. // Sb. «Issledovaniya, raschet i ispytaniya MK», vyp. 2. – Kazan, 1988. – 529 p.
4. Leibenzon L.S. Variational methods for solving the problems of elasticity theory. – M.: Mir, 2010. – 204 p.
5. Kapur K., Lamberson L. Reliability and system design. – M.: Mir, 2009. – 301 p.
6. Manapov A.Z. Calculation of reliability and service life of building structures. – Kazan: RIO KGASU, 2010. – 131 p.
7. Sal'vadori M. Numerical methods in engineering. – M.: IL., 2010. – 231 p.
8. Yumanov V.A., Girfanov I.S.. On the question of providing a minimum mass of thin statically indeterminate systems // Izvestiya KGASU, 2009, № 1 (11). – 10 p.