УДК 539.42 (624.04)

Кулиев В.Д. – доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: pmdekanat@gmail.com
Московский государственный машиностроительный университет
Адрес организации:107023, Россия, г. Москва, ул. Большая Семеновская, д. 38
Зайцев Ю.В. – доктор технических наук, профессор
E-mail: zaytsev2003@mail.ru
Российская академия архитектуры и строительных наук
Адрес организации: 107031, Россия, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, д. 24
Султыгова П.С. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: sultygova@yandex.ru
Ингушский государственный университет
Адрес организации: 386132, Россия, г. Назрань, ул. Магистральная, д. 39

Разрушение многослойных материалов с усталостной трещиной

Аннотация

Целью работы являлось исследование разрушения многослойных материалов с усталостной трещиной.

Предложена модель разрушения многослойных материалов с усталостной трещиной нормального разрыва. Считалось, что упругие слои в композите жестко сцеплены между собой вдоль плоскостей. О долговечности многослойной конструкции с центральной трещиной судили по долговечности (числу циклов до разрушения) слоя, содержащего трещину.

Исследовано влияние физико-механических свойств и других комплексных параметров на рост усталостных трещин.

Для практического вычисления долговечности необходимо, помимо сведений о геометрии конструкции и действующих нагрузках, располагать данными о начальной длине трещины и константах материала.

Ключевые слова: долговечность, усталость, критическая длина трещины.

На основе обобщенной феноменологической модели квазихрупкого развития усталостных трещин с учетом кинетических эффектов, для описания скорости роста трещин нормального разрыва на всех участках диаграммы усталостного разрушения, получена следующая зависимость [1]:

$$\frac{dl}{dN} = -\beta\left[\frac{K_{\mathrm{Imax}}^2 - K_{\mathrm{Im}in}^2}{K_{*f}^2} + \ln\frac{K_{*f}^2 - K_{\mathrm{Im}ax}^2}{K_{*f}^2 - K_{\mathrm{Im}in}^2}\right] + \frac{A}{\omega}\{ch[4\lambda(K_{\mathrm{Im}ax} + K_{\mathrm{Im}in})]I_0[4\lambda(K_{\mathrm{Im}ax} - K_{\mathrm{Im}in})] + 3 - \tag{1}$$

$$-4\,ch\,[2\lambda\,(K_{\mathrm{Im}ax} + K_{\mathrm{Im}in})]\,I_0[2\lambda\,(K_{\mathrm{Im}ax} - K_{\mathrm{Im}in})]\} \equiv f(K_{\mathrm{Im}ax}, K_{\mathrm{Im}in})\,.$$

В [2] рассмотрена задача о центральной трещине в n ($n \geq l$)-слойных композитных материалах.

Пусть упругие слои в композите жестко сцеплены между собой вдоль плоскостей $x = \pm h_k$ $(k = 1,...,n)$. Центральный слой $|x| \leq h_1$, $|y| < \infty$ содержит трещину отрыва $y = 0,\ |x| \leq l < h_1$ перпендикулярную поверхности $x = \pm h_1$ (рис. 1). К берегам трещины приложено симметричное относительно плоскости x=0 нормальное напряжение (касательные напряжения равны нулю). На бесконечности напряжения отсутствуют, а смещения исчезают.

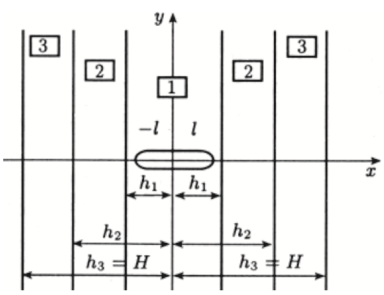

Рис. 1.

Решение данной задачи в [2] сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Предположим, что пограничные слои в n ($n \geq 1$)-слойном материале отсутствуют, т.е. в пределах границ каждого i-го слоя материал считается однородным, изотропным и упругим и его циклическая трещиностойкость характеризуется постоянной $K_{*f}^{(i)}$.

Кроме того, предполагается, что амплитуда растягивающих напряжений и свойства материала первого слоя таковы, что критическая длина трещины $l_{кр}$, меньше толщины первого слоя h_1. Критическая длина трещины $l_{кр}$ определяется как наименьший корень уравнения:

$$K_{\mathrm{I}max}(l_{кр}) = K_{*f}^{(1)}. \tag{2}$$

Здесь:

$$K_{\mathrm{I}max} = \sigma_{\max}\sqrt{\pi l}\,\psi_*\left(1, \frac{l}{h_1}, \frac{h_1}{h_2}, ...\right). \tag{3}$$

Функция $\psi_*(\ldots)$ для данной задачи определяется из интегрального уравнения Фредгольма второго рода [2]. Функция $\psi_*(\ldots)$ для некоторых практически важных случаев сочетаний упругих свойств слоев трех- и четырехслойных материалов аппроксимирована полиномом вида:

$$\psi_*\left(1, \frac{l}{h_1}, \frac{h_1}{h_2}, ...\right) = \sum_{q=0}^{4} d_q \left(\frac{l}{h_1}\right)^q. \tag{4}$$

Значение d_q приведено в работе [2].

Согласно формулам (2)-(4) безразмерная критическая длина трещины $l_* = \frac{l_{кр}}{h_1}$ зависит лишь от безразмерного нагружения:

$$B = \sigma_{\max}\frac{\sqrt{\pi h_1}}{K_{*f}^{(1)}}. \tag{5}$$

О долговечности многослойной конструкции с центральной трещиной будем судить по долговечности (числу циклов до разрушения) слоя, содержащего трещину.

Решение дифференциального уравнения (1) ($N=0$ при $l=l_0$) можно записать в виде:

$$N = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{f(K_{\mathrm{I}max}, K_{\mathrm{I}min})}, \tag{6}$$

где $f(K_{Imax}, K_{Imin})$ дается правой частью (1).

Если в качестве верхнего предела интегрирования в (6) подставить критическое значение $l=l_{кр}$, то формула (6) определит общее число циклов нагружения, требуемое для подрастания трещины от начальной длины l_0 ($l_0<h_1$) до ее критической длины $l_{кр}$ ($l_{кр}<h_1$), т.е. число циклов нагружения, требующихся для разрушения многослойной конструкции. Очевидно, что эта величина представляет большой практический интерес.

Считая $K_{Imin}=0$, запишем (6) с учетом (1) в следующем виде:

$$\beta N_f = -\int_{l_0}^{l_{кр}} \frac{dl}{\left(\frac{K_{\mathrm{I}max}}{K_{\mathrm{I}fc}}\right)^2 + \ln\left[1-\left(\frac{K_{\mathrm{I}max}}{K_{\mathrm{I}fc}}\right)^2\right] - \frac{A}{\beta\omega}\left[ch\,(4\lambda K_{\mathrm{I}max})\,I_0\,(4\lambda K_{\mathrm{I}max}) + 3 - 4\,ch\,(2\lambda K_{\mathrm{I}max}) I_0(2\lambda K_{\mathrm{I}max})\right]}. \tag{7}$$

С учетом (3)-(5) из (7) получаем:

$$\frac{\beta N_f}{h_1} = \int_{l_{кр}/h_1}^{l_0/h_1} \frac{d\tau}{f(\tau)}. \tag{8}$$

$$f(\tau) = B^2\tau\left(\sum_{q=0}^{4} d_q\tau^q\right)^2 + \ln\left[1 - B^2\tau\left(\sum_{q=0}^{4} d_q\tau^q\right)^2\right] -$$

$$-\frac{A}{\beta\omega}\left[ch\,(2CB\sqrt{\tau}\sum_{q=0}^{4} d_q\tau^q)\,I_0\,(2CB\sqrt{\tau}\sum_{q=0}^{4} d_q\tau^q) + 3 - 4\,ch\,(CB\sqrt{\tau}\sum_{q=0}^{4} d_q\tau^q) I_0(CB\sqrt{\tau}\sum_{q=0}^{4} d_q\tau^q)\right].$$

Здесь:

$$C = 2\lambda k_{If_c}.$$

Из (8) следует, что при фиксированных значениях упругих свойств и толщины слоев безразмерная долговечность $N_* = \frac{\beta N_f}{h_1}$ зависит лишь от $\frac{l_0}{l_{кр}}$ и B, если A=0.

Если А $\neq 0$, то из диаграммы усталостного разрушения следует найти постоянные материала, входящего в формулу (1).

Ниже рассмотрим случай, когда А=0, т.е. не рассматривается влияние кинетических эффектов на рост усталостных трещин. Этот случай имеет место для металлических многослойных материалов.

На рис. 2 приведены графики функции $N_* = N_*\left(B_0, \dfrac{l_0}{l_{кр}}\right)$ для случая трехслойной конструкции.

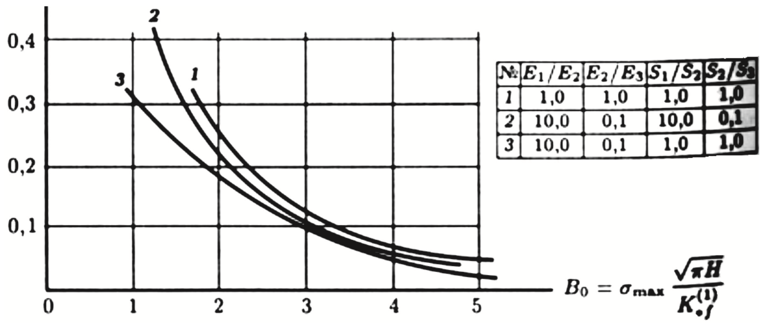

Рис. 2.

Для исследования влияния на долговечность многослойной конструкции длины трещины и толщины среднего слоя (прослойки), при неизменной общей толщине пакета Н, безразмерную долговечность представим в виде:

$$N_{**} = \frac{\beta N_f}{H}. \tag{9}$$

График функции $N_{**} = N_{**}\left(B_0, \dfrac{l_0}{H}\right)$, где $B_0 = \sigma_{max}\dfrac{\sqrt{\pi H}}{K_{Ifc}^{(1)}}$, приведен на рис. 3.

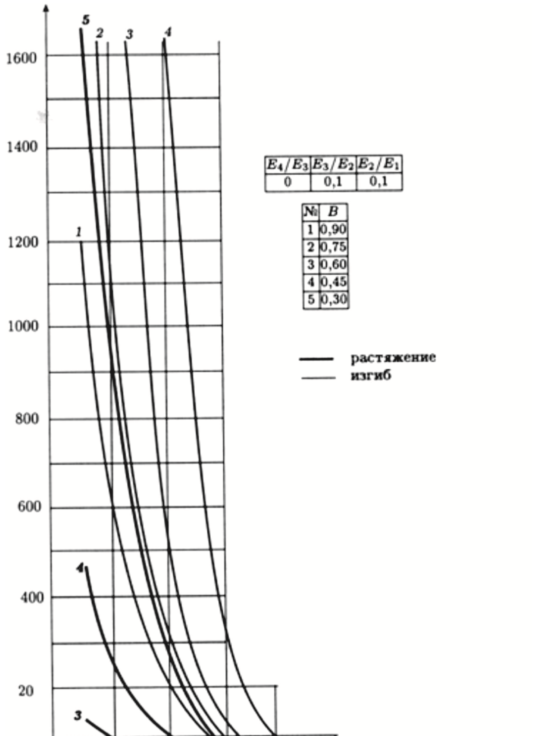

Рис. 3.

Из анализа графиков на рис. 2 и 3 следует:

- при фиксированных упругих свойствах слоев и заданном характере нагружения, когда критическая длина трещины однозначно определена, при увеличении начальной длины трещины долговечность конструкции уменьшается;
- при одних и тех же упругих свойствах слоев и длине начальной трещины долговечность многослойной конструкции зависит от вида нагружения: при переходе от растяжения к изгибу долговечность увеличивается, причем указанный эффект наиболее заметен при малых начальных размерах трещин;
- при больших длинах трещин (0,6 $l_{кр}$ и более) долговечность становится слабо зависимой от длины трещины, величины и вида нагрузки;
- наличие «мягкой» прослойки, симметрично расположенной по толщине пакета, снижает долговечность конструкции; данный эффект усиливается при увеличении толщины прослойки; при прочих равных условиях влияние толщины прослойки наиболее заметно при длине начальной трещины $\frac{l_0}{H} \approx 0{,}1$;
- при увеличении внешней нагрузки влияние толщины «мягкой» прослойки на долговечность конструкции уменьшается.

Для практического вычисления долговечности в соответствии с (8) необходимо, помимо сведений о геометрии конструкции и действующих нагрузках, располагать данными о начальной длине трещины l_0 и константах материала β и K_{Ifc}.

Более общая формула для скорости роста усталостных трещин получена в работе [3].

Разные, в том числе математические, вопросы для оценки прочности усталостной долговечности исследованы в работах [4-5]. Также в других работах авторов исследовано влияние механизмов пластической деформации и временных эффектов в различных условиях эксплуатации конструкций.

Список библиографических ссылок

1. Кулиев В.Д., Зайцев Ю.В., Гречухина О.С., Султыгова П.С. Рост усталостных трещин в многослойных материалах. // Вестник гражданских инженеров 2010, № 3 (24). – С. 66-70.
2. Кулиев В.Д. Сингулярные краевые задачи. – М.: Физмалит, 2005. – 720 с.
3. Кулиев В.Д., Курбанмагомедов А.К. К теории роста усталостных разрушений при циклическом нагружении. // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2013, № 4 (18).
4. Кулиев В.Д., Гречухина О.Д., Лоран А.Ю. Усталостная долговечность многослойных материалов. // Материалы X Международного семинара «Технологические проблемы прочности». – Подольск: ПИ МГОУ, 2003. – С. 64-68.
5. Кулиев В.Д. Некоторые проблемы механики разрушения и связанной с ней математики на рубеже XXI века. // Новые технологии. Сер. Матем., 1999, № 2.

Kuliev V.D. – doctor of physical-mathematical sciences, professor
E-mail: pmdekanat@gmail.com
Moscow State University of Engineering
The organization address: 107023, Russia, Moscow, Bolshaia Semyonovskaia st., 38
Zaitsev Y.V. – doctor of technical sciences, professor
E-mail: zaytsev2003@mail.ru
Russian Academy of Architecture and Building Sciences
The organization address: 107031, Russia, Moscow, Bolshaia Dmitrovka st., 24
Sultygova P.S. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: sultygova@yandex.ru
Ingush State University
The organization address: 386132, Russia, Nazran, Magistralnaia st., 39

Destruction laminates with a fatigue crack

Resume

The article shows the dependence to describe the rate of growth of normal tension cracks in all areas of the diagram of fatigue fracture of multilayer materials. The problem of a central crack in a laminated composite materials. Elastic fibers in the composite discussed in the article, rigidly linked together along the planes and to the shores of the crack applied symmetrical relative to the plane normal stress. Also suggested that the boundary layers in the laminate are missing, respectively, within the boundaries of each layer of material is considered homogeneous, isotropic and elastic. Also critical crack length considered in the article, was considered less than the thickness of the first layer of material. About durability of multilayer structures judged by durability (number of cycles to failure) layer containing a crack. The formula, which determines the total number of loading cycles required to grow up from the initial crack length to its critical length. Ie This formula will determine the number of loading cycles required for the destruction of multilayer structures. The formula for the investigation of the influence on the durability of the multilayer structure of crack length and thickness of the middle layer (layer) at a constant total thickness of the package. The paper noted that for practical computation durability besides geometrical and structural characteristics of the acting loads, it is necessary to have data on the initial length of the crack and the material constants.

Keywords: durability, fatigue, critical crack length.

Reference list

1. Kuliyev V.D., Zaitsev Iu.V., Grechukhina O.S., Sultygova P.S. The growth of fatigue cracks in the multilayer material. // Bulletin of Civil Engineers, 2010, № 3 (24). – P. 66-70.
2. Kuliyev V.D. Singular boundary value problems. – M.: Fizmalit, 2005. – 720 p.
3. Kuliyev VD, AK Kurbanmagomedov On the theory of fatigue damage under cyclic loading. // Herald CSPU of I.Y. Yakovlev. Series: Mechanics limit state, 2013, № 4 (18).
4. Kuliyev V.D., Grechukhina O.D., Laurent A.Y. Fatigue Life laminates. // Proceedings of the X International Workshop «Technological problems of strength». – Podolsk: PI MGOU 2003. – P. 64-68.
5. Kuliyev V.D. Some problems of fracture mechanics and related mathematics at the turn of the XXI century. // New Technology. Ser. Mat., 1999, № 2.