УДК 539.3
Павлов В.П. – доктор технических наук, профессор
E-mail: victor.pavlov.1951@gmail.com
Нусратуллин Э.М. – старший преподаватель
E-mail: nusratullinem@rambler.ru
Филиппов А.А. – младший научный сотрудник
E-mail: sigur_ros@list.ru
Уфимский государственный авиационный технический университет
Адрес организации: 450000, Россия, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12
Мухамедова И.З. – кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: muhamedova-inzilija@mail.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г.Казань, ул. Зеленая, д. 1

Методика определения упругих характеристик гибридного композиционного материала и оценка ее точности*

Аннотация

Предлагается методика расчета эффективных характеристик жесткости гибридного композиционного материала (ГКМ) с двумя видами армирующих волокон, базирующаяся на конечно-элементном анализе напряженно-деформированного состояния представительного элемента ГКМ в пакете ANSYS. Рассматривается ГКМ на основе магниевой матрицы, армированной углеродными и борными армирующими волокнами. При заданной структуре ГКМ вычислены эффективные характеристики его жесткости.

Ключевые слова: гибридный композиционный материал, эффективные коэффициенты жесткости.

Постановка задачи и этапы её решения

В изделиях современной техники широко применяют гибридные композиционные материалы (ГКМ), армированные одновременно двумя видами волокон (например, борными и углеродными).

При расчетах конструкций на прочность и жесткость обычно неоднородный гибридный композиционный материал заменяют эквивалентным ему однородным анизотропным материалом, для которого необходимо знать характеристики упругости.

При этом возникают две проблемы:

- что понимать под эквивалентностью неоднородного композиционного материала и однородного анизотропного материала;
- как определить эффективные упругие характеристики эквивалентного анизотропного материала.

В связи с этим существует актуальная задача механики композиционных материалов – вычисление эффективных характеристик упругости композитов на основе информации о физико-механических свойствах их компонент и законах распределения армирующих элементов по объему композиционного материала.

Следует отметить, что нет однозначного решения данной задачи, и каждый исследователь может реализовать свой путь.

В данном исследовании математически моделируются характеристики упругости гибридного композиционного материала на основе метода конечного элемента с применением программного комплекса ANSYS. При этом сначала создается идеализированная физическая модель представительного элемента ГКМ на основе магниевой матрицы, армированной углеродными и борными волокнами; затем формируется конечно-элементная модель данного элемента ГКМ; далее в пакете ANSYS рассчитываются напряжения на боковых поверхностях представительного элемента ГКМ

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект 2012-1.4-12-000-1004-006).

при шести основных видах его деформации (растяжениях и сдвигах) и вычисляются эффективные коэффициенты жесткости анизотропного однородного материала, эквивалентного рассматриваемому гибридному композиционному материалу.

Оценка точности предлагаемой методики выполняется на примере рассмотрения изотропного и ортотропного материалов, для которых известны точные соотношения закона Гука между напряжениями и деформациями.

Представительный элемент гибридного композиционного материала

В работе формируется представительный элемент трехкомпонентного гибридного композиционного материала на основе магниевой матрицы, содержащий углеродные и борные армирующие волокна (рис. 1).

Представительный элемент ГКМ имеет форму прямоугольного параллелепипеда с размерами сторон a_x, a_y, a_z, измеряемыми соответственно вдоль координатных осей X, Y, Z (рис. 1). В нем одно прямое борное волокно диаметра $d_B = 100$ мкм и четырнадцать прямых углеродных волокон цилиндрической формы диаметра $d_C = 10$ мкм (рис. 1). Борное волокно направлено вдоль оси Y, а углеродные волокна направлены вдоль оси X (рис. 1). Расстояние между соседними углеродными волокнами вдоль оси Z и минимальное расстояние между борным и углеродным волокнами равным $\Delta_C = 2$ мкм (рис. 1). Минимальные расстояния от углеродных волокон до боковых граней представительного элемента, перпендикулярных осям Y и Z, равны соответственно $\Delta_{CY} = 1$ мкм и $\Delta_{CZ} = 1$ мкм (рис. 1).

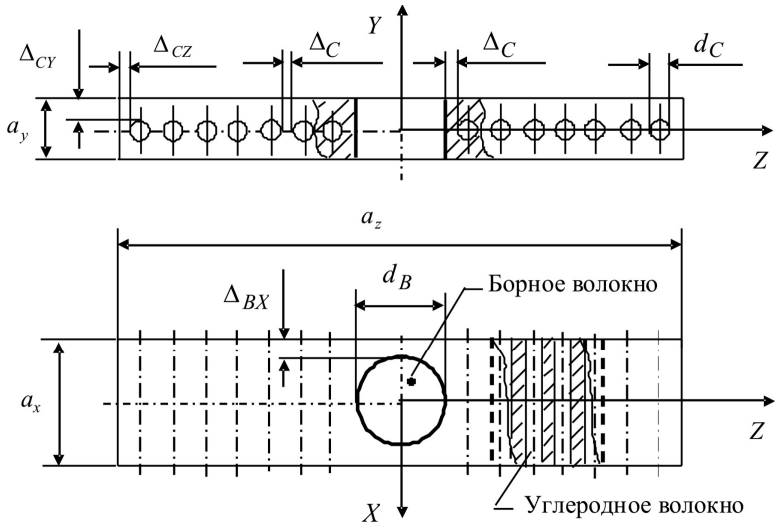

Рис. 1. Слоистая структура гибридного композиционного материала

Расстояние от борного волокна до боковых граней представительного элемента, перпендикулярных оси X равно $\Delta_{BX} = 5$ мкм (рис. 1). На основе указанных размеров определяются размеры представительного элемента вдоль координатных осей:

$$\begin{cases} a_x = d_B + 2\Delta_{BX}, & a_y = d_C + 2\Delta_{CY}. \\ a_z = 14d_C + 14\Delta_C + 2\Delta_{CZ}, \end{cases} \quad (1)$$

При указанных размерах:

- общий объем представительного элемента ГКМ равен $V = a_x a_y a_z$;
- объем углеродной компоненты равен $V_C = 14\pi d_C^2 a_x / 4$;
- объем борной компоненты равен $V_B = \pi d_B^2 a_z / 4$.

На основе данных выражений коэффициенты армирования ГКМ по углеродным (Ψ_C) и борным (Ψ_B) волокнам определяются по формулам:

$$\Psi_C = V_C / V = 0{,}34; \quad \Psi_B = V_B / V = 0{,}26. \tag{2}$$

Компоненты ГКМ имеют следующие характеристики:

- матрица из магниевого сплава МЛ-10: $E_{\text{Mg}} = 0{,}44 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_{\text{Mg}} = 0{,}28$;
- углеродные армирующие волокна: $E_{\text{C}} = 3 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_{\text{C}} = 0{,}2$;
- борные армирующие волокна: $E_{\text{B}} = 4 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_{\text{B}} = 0{,}25$.

Анизотропный однородный материал, эквивалентный гибридному композиционному материалу

Существующие пакеты программ не позволяют рассчитывать напряженно-деформированное состояние конструкций из композиционных материалов с полным учетом его структуры. Поэтому при расчетах неоднородный композиционный материал заменяется эквивалентным ему однородным анизотропным материалом.

В качестве эквивалентного в работе рассматривается ортотропный материал, для которого связь между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ определяется шестью соотношениями закона Гука:

$$\begin{cases} \sigma_x = E_{1,1}\varepsilon_x + E_{1,2}\varepsilon_y + E_{1,3}\varepsilon_z, \\ \sigma_y = E_{2,1}\varepsilon_x + E_{2,2}\varepsilon_y + E_{2,3}\varepsilon_z, \\ \sigma_z = E_{3,1}\varepsilon_x + E_{3,2}\varepsilon_y + E_{3,3}\varepsilon_z, \\ \tau_{xy} = E_{4,4}\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = E_{5,5}\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = E_{6,6}\gamma_{xz}. \end{cases} \tag{3}$$

Необходимые для практического применения соотношений системы (3) значения коэффициентов жесткости $E_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$, $E_{4,4}, E_{5,5}, E_{6,6}$ эквивалентного материала получаются на основе математического моделирования деформирования представительного элемента из ГКМ.

В соответствии с соотношениями (3) реализуется шесть экспериментов, в каждом из которых только одна из компонент деформации отличается от нуля.

Моделирование упругих характеристик гибридного композиционного материала в пакете ANSYS

Для определения эффективных коэффициентов жесткости ГКМ реализуется шесть экспериментов.

В *первом* эксперименте реализуется деформация представительного элемента при которой: $\varepsilon_x \neq 0,\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$. Изменение формы и размеров представительного элемента в этом случае показаны на рис. 2, *а*.

При линейной деформации $\varepsilon_x \neq 0$ перемещения точек на поверхностях представительного объема определяются следующим алгоритмом:

- перемещения точек на всех гранях представительного объема вдоль направлений осей Y, Z равны нулю $v_{\Gamma} = w_{\Gamma} = 0$,
- на всех гранях представительного элемента перемещения точек вдоль оси X определяются выражением $u_{\Gamma} = \varepsilon_x x$.

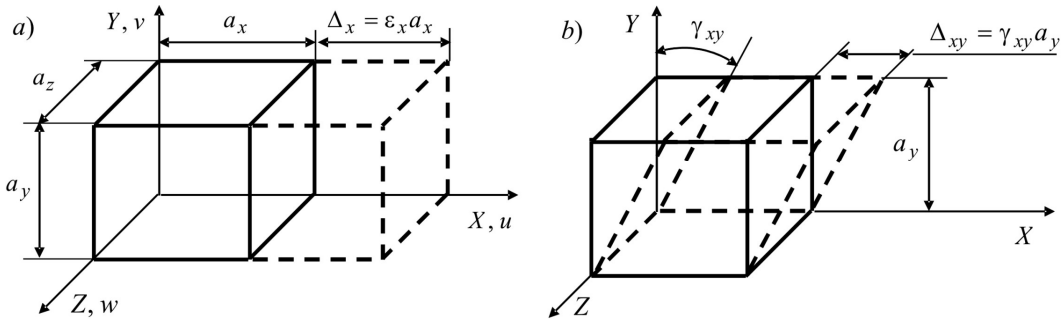

Рис. 2. Деформации представительного элемента ГКМ: а – линейная деформация при $\varepsilon_x \neq 0$, *b* – сдвиговая деформация при $\gamma_{xy} \neq 0$

Далее средствами ANSYS строится конечно-элементная модель представительного элемента ГКМ рассматриваемого представительного элемента и определяется его напряженное состояние. Затем на всех трех гранях представительного элемента ГКМ определяются осредненные напряжения $\overline{\sigma}_x^{(\varepsilon_x)}, \overline{\sigma}_y^{(\varepsilon_x)}, \overline{\sigma}_z^{(\varepsilon_x)}$, при подстановке которых в первые три уравнения системы (3) получаются выражения для определения коэффициентов жесткости:

$$E_{1,1} = \overline{\sigma}_x^{(\varepsilon_x)} / \varepsilon_x, \quad E_{2,1} = \overline{\sigma}_y^{(\varepsilon_x)} / \varepsilon_x, \quad E_{3,1} = \overline{\sigma}_z^{(\varepsilon_x)} / \varepsilon_x \tag{4}$$

Второй и третий эксперименты во многом схожи с первым экспериментом.

Так, во *втором* эксперименте задается отличная от нуля деформация эквивалентного материала $\varepsilon_y \neq 0$, а остальные деформации приравниваются нулю:

$$\varepsilon_y \neq 0, \ \varepsilon_x = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \tag{5}$$

При заданной деформации ε_y средствами пакета ANSYS определяются осредненные напряжения: $\overline{\sigma}_x^{(\varepsilon_y)}, \overline{\sigma}_y^{(\varepsilon_y)}, \overline{\sigma}_z^{(\varepsilon_y)}$, при подстановке которых в первые три уравнения системы (3) получаются выражения для определения коэффициентов жесткости:

$$E_{1,2} = \overline{\sigma}_x^{(\varepsilon_y)} / \varepsilon_y, \quad E_{2,2} = \overline{\sigma}_y^{(\varepsilon_y)} / \varepsilon_y, \quad E_{3,2} = \overline{\sigma}_z^{(\varepsilon_y)} / \varepsilon_y . \tag{6}$$

В *третьем* эксперименте задается отличная от нуля деформация эквивалентного материала $\varepsilon_z \neq 0$, остальные деформации считаются равными нулю:

$$\varepsilon_z \neq 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 . \tag{7}$$

При заданной деформации ε_z рассчитываются осредненные напряжения $\overline{\sigma}_x^{(\varepsilon_z)}, \overline{\sigma}_y^{(\varepsilon_z)}, \overline{\sigma}_z^{(\varepsilon_z)}$, при подстановке которых в первые три уравнения системы (3) получаются выражения для определения коэффициентов жесткости:

$$E_{1,3} = \overline{\sigma}_x^{(\varepsilon_z)} / \varepsilon_z, \quad E_{2,3} = \overline{\sigma}_y^{(\varepsilon_z)} / \varepsilon_z, \quad E_{3,3} = \overline{\sigma}_z^{(\varepsilon_z)} / \varepsilon_z . \tag{8}$$

Для определения характеристик жесткости при сдвиге рассматривается деформирование представительного элемента при деформациях сдвига $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$.

Так, в *четвертом* эксперименте задается отличной от нуля только сдвиговая деформация γ_{xy}: $\gamma_{xy} \neq 0, \ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$ (рис. 2, *b*). При этом перемещения точек на поверхностях представительного объема определяются по алгоритму:

- перемещения всех точек на всех гранях представительного объема вдоль направлений осей Y, Z равны нулю $v_\Gamma = w_\Gamma = 0$;
- перемещение точек вдоль оси X определяются формулой $u_\Gamma = \gamma_{xy} y$.

Далее средствами ANSYS определяется осредненное напряжение $\bar{\tau}_{xy}^{(\gamma_{xy})}$, при подстановке которого в четвертое уравнение системы (3) получается выражение для определения коэффициентов жесткости $E_{4,4} = \bar{\tau}_{xy}^{(\gamma_{xy})} / \gamma_{xy}$.

В *пятом* эксперименте рассматривается представительный элемент при отличной от нуля деформации сдвига γ_{yz}: $\gamma_{yz} \neq 0,\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$. Затем определяется осредненное напряжение $\bar{\tau}_{yz}^{(\gamma_{yz})}$, при подстановке которого в пятое уравнение системы (3) получается выражение для определения коэффициента жесткости $E_{5,5} = \bar{\tau}_{yz}^{(\gamma_{yz})} / \gamma_{yz}$.

В *шестом* эксперименте рассматривается представительный элемент при отличной от нуля деформации сдвига γ_{xz}: $\gamma_{xz} \neq 0,\ \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$. На основе ANSYS определяется осредненное напряжение $\bar{\tau}_{yz}^{(\gamma_{yz})}$, при подстановке которого в шестое уравнение системы (3) получается выражение для определения коэффициента жесткости $E_{6,6} = \bar{\tau}_{xz}^{(\gamma_{xz})} / \gamma_{xz}$.

Таким образом, шесть математических экспериментов позволяют определить все входящие в закон Гука (3) характеристики жесткости однородного ортотропного материала, эквивалентного неоднородному ГКМ.

В результате расчетов при числе узлов конечно-элементной сетки $N \approx 1 \cdot 10^6$ были получены следующие значения эффективных коэффициентов жесткости ГКМ в (Па):

$$\begin{cases} E_{1,1} = 1{,}4 \cdot 10^{11}, & E_{1,2} = 3{,}9 \cdot 10^{10}, & E_{1,3} = 3{,}1 \cdot 10^{10}, \\ E_{2,1} = 3{,}9 \cdot 10^{10}, & E_{2,2} = 1{,}9 \cdot 10^{11}, & E_{2,3} = 4{,}3 \cdot 10^{10}, \\ E_{3,1} = 3{,}1 \cdot 10^{10}, & E_{3,2} = 4{,}3 \cdot 10^{10}, & E_{3,3} = 1{,}0 \cdot 10^{11}, \\ E_{4,4} = 4{,}2 \cdot 10^{10}, & E_{5,5} = 4{,}1 \cdot 10^{10}, & E_{6,6} = 3{,}3 \cdot 10^{10}. \end{cases} \quad (9)$$

Оценка погрешности по эталонной задаче для изотропного материала

При любом математическом моделировании некоторого процесса возникает вопрос о точности получаемых результатов. В связи с этим разработанная методика расчета коэффициентов жесткости гибридного композиционного материала проверялась при решении модельных задач, имеющих точное решение.

При *первой* проверке всем компонентам ГКМ присваивались значения характеристик упругости изотропного материала (выбрана матрица). В этом случае при верном алгоритме и качественной реализации в пакете ANSYS должны получаться эффективные характеристики жесткости равные характеристикам жесткости выбранного изотропного материала.

Следуя такому подходу, были выполнены расчеты коэффициентов жесткости при различном числе узлов конечно-элементной сетки N и на их основе рассчитаны погрешности расчетов по формуле:

$$\delta_{ij} = \lg \left| \frac{E_{ij}^T - E_{ij}}{E_{ij}^T} \right|, \quad i = 1,...,6, \quad j = 1,...,6, \quad (10)$$

где E_{ij}^T – точное значение коэффициента жесткости материала,

E_{ij} – расчетное значение коэффициента жесткости материала.

Зависимости погрешностей расчетов δ_{ij} от десятичного логарифма числа узлов конечно-элементной сетки $\lg N$ для изотропного материала представлены на рис. 3.

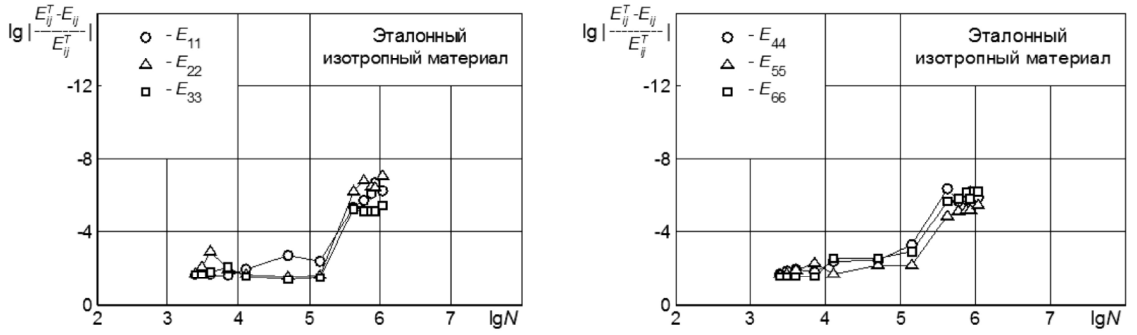

Рис. 3. Погрешности расчетов коэффициентов жесткости E_{ij} модельного изотропного материала в зависимости от числа узлов N конечно-элементной сетки

Из рис. 3 видно, что при максимальном числе узлов $N_{\max} \approx 1 \cdot 10^6$ погрешность расчетов $\delta_{ij} < 1 \cdot 10^{-5}$. Кроме этого, из рис. 3 видно, при числе узлов $N > 1 \cdot 10^6$ наблюдается тенденция увеличения погрешности, т.е. дальнейшее увеличение числа узлов не приведет к повышению точности расчетов, а, наоборот, приведет к увеличению погрешности расчетов из-за увеличения вычислительной ошибки, возникающей при выполнении арифметических операций в процессе математических вычислений.

При *второй* проверке всем компонентам ГКМ присваивались значения характеристик упругости ортотропного материала с характеристиками, близкими к характеристикам анализируемого ГКМ. В этом случае при верном алгоритме и качественной реализации в пакете ANSYS должны получаться эффективные характеристики жесткости, равные характеристикам жесткости модельного ортотропного материала.

Зависимости погрешностей расчетов δ_{ij} от десятичного логарифма числа узлов конечно-элементной сетки $\lg N$ для ортотропного материала представлены на рис. 4.

Рис. 4. Погрешности расчетов коэффициентов жесткости E_{ij} модельного ортотропного материала в зависимости от числа узлов N конечно-элементной сетки

Результаты расчетов для ортотропного материала во многом схожи с результатами расчетов для изотропного материала.

Видно (рис. 4), что минимальная погрешность, равная $\delta_{ij} \approx 1 \cdot 10^{-5}$, наблюдается при числе узлов $N_{\max} \approx 1 \cdot 10^6$. Из рис. 4 видно, при числе узлов $N > 1 \cdot 10^6$ наблюдается тенденция увеличения погрешности с ростом N.

Таким образом, исследования по оценке точности при решении эталонных задач показали, что оптимальной является конечно-элементная сетка при $N \approx 1 \cdot 10^6$ узлов, для которой погрешность расчетов не превышает величины $\delta_{ij} = 1 \cdot 10^{-5}$.

Ориентируясь на эту величину, можно ожидать, что и для ГКМ погрешность прогнозирования коэффициентов жесткости ГКМ, представленных в (9), при числе узлов $N = 1 \cdot 10^6$ не превысит величины $\delta_{ij} = 1 \cdot 10^{-3}$, необходимой для инженерных расчетов.

Выводы:

1. Предложена методика определения эффективных характеристик жесткости гибридного композиционного материала на основе магниевой матрицы, армированной борными и углеродными волокнами, базирующаяся на методе конечного элемента с применением программного комплекса ANSYS.
2. Сформирована модель представительного элемента гибридного композиционного материала, состоящая из одного борного и четырнадцати углеродных волокон, и на основе пакета ANSYS вычислены эффективные коэффициенты жесткости анизотропного однородного материала, эквивалентного рассматриваемому ГКМ.
3. На основе решения модельных задач, имеющих точное решение, проведен анализ зависимости погрешности расчетов от количества узлов конечно-элементной сетки и выяснено, что до числа узлов $N \approx 1 \cdot 10^6$ точность расчетов возрастает, а далее с ростом N в связи погрешностью арифметических вычислений точность расчетов убывает. Оптимальной является сетка с числом узлов $N \approx 1 \cdot 10^6$, при которой ожидаемая погрешность прогнозирования коэффициентов жесткости ГКМ не превысит достаточной для инженерных расчетов величины $\delta_{ij} = 1 \cdot 10^{-3}$.

Список литературы

1. Каюмов Р.А. Связанная задача расчета механических характеристик материалов и конструкций из них // Механика твердого тела, 1999, № 6. – С. 118-127.
2. Каюмов Р.А. Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций // Механика твердого тела, 2004, № 2. – С. 94-105.
3. Каюмов Р.А, Мухамедова И.З., Шакирова А.М., Абдуллин И.Ш., Хамматова В.В. Анализ влияния холодной плазмы на жесткостные характеристики полимерных материалов // Известия КГАСУ, 2010, № 1 (13). – С. 302-307.

Pavlov V.P. – doctor of technical sciences, professor
E-mail: victor.pavlov.1951@gmail.com
Nusratullin E.M. – senior lecturer
E-mail: nusratullinem@rambler.ru
Filippov A.A. – junior researcher
E-mail: sigur_ros@list.ru
Ufa State Aviation Technical University
The organization address: 450000, Russia, Ufa, Karl Marx st., 12
Muhamedova I.Z. – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor
E-mail: muhamedova-inzilija@mail.ru
Kazan State University of Architecture and Enginieering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

The methodology of determining the elastic characteristics of a hybrid composite material and estimation of its accuracy

Resume

A method is proposed to calculate the effective characteristics of rigidity of a hybrid composite material (HCM) with two types of reinforcing fibres, based on the finite-element analysis of stressed-deformed state of the representative element of the HCM on the package

ANSYS. Covers HCM on the basis of magnesium matrix, the reinforced carbon and boric reinforcing fibers. Several model problems are solved. When given the structure of the GCM calculated effective characteristics of its stiffness. On the example of reference objectives of the analysis of the accuracy of the developed method and it is shown that this method allows to obtain results with a permissible for practical calculations of the relative error not exceeding $1*10^{-5}$. Found the optimal number of grid nodes, where the expected error of prediction coefficients does not exceed the HCM stiffness sufficient for engineering calculations of value.

Keywords: hybrid composite material, effective coefficients of stiffness.

References

1. Kayumov R.A. Related problem of calculating of the mechanical characteristics of materials and its structures // Mekhanika tverdogo tela, 1999, № 6. – P. 118-127.
2. Kayumov R.A. Extended task of identifying the mechanical characteristics of materials based on the results of structures' tests // Mekhanika tverdogo tela 2004, № 2. – P. 94-105.
3. Kayumov R.A., Muhamedova I.Z., Shakirova A.M., Abdullin I.Sh., Hammatova V.V. Analysis of the influence of cold plasma to stiffness characteristics of polymeric materials // Izvestia KGASU, 2010, № 1(13). – P. 302-307.