



УДК 66.02:519.771.3

Ахмадиев Ф.Г. – доктор технических наук, профессор

E-mail: Akhmadiev@kgasu.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕРАБОТКИ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены вопросы математического моделирования кинетики технологических процессов переработки дисперсных сред. Построены математические модели кинетики целого класса процессов переработки материалов, таких как: процессы смешения, измельчения, классификации зернистых материалов по размерам на основе теории марковских процессов и приведены решения соответствующих дифференциальных уравнений. Установлена адекватность построенных кинетических моделей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: математические модели, кинетика, смешение, измельчение, классификация, дисперсная среда, марковские процессы.

Akhmadiev F.G. – doctor of technical sciences, professor

Kazan State University of Architecture and Engineering

MATHEMATICAL MODELLING OF KINETICS OF TECHNOLOGICAL PROCESSES OF CONVERSIONS OF DISPERSE ENVIRONMENTS

ABSTRACT

Questions of mathematical modeling of kinetics technological processes of conversions of disperse environments are considered. Mathematical models of kinetics the whole class of processes of conversions of materials, such as processes of mixture, crushing, classification of granular materials by the sizes on the basis of the theory of the Markov-processes are constructed and decisions of the corresponding differential equations are resulted. Adequacy of the constructed kinetic models is established.

KEYWORDS: mathematical models, kinetics, mixture, crushing, classification, the disperse environment, Markov-processes.

ВВЕДЕНИЕ

Основу современного подхода к построению методов расчета технологических процессов составляет системный анализ [1, 2]. Фундаментальную роль в системном анализе играет математическое моделирование.

Существенной особенностью технологических процессов в гетерогенных средах является то, что они имеют двойственную детерминированно-стохастическую природу и являются нелинейными. Поэтому при математическом моделировании технологических процессов в гетерогенных средах, кроме методов механики гетерогенных сред, должны быть использованы методы статистической физики и термодинамики необходимых процессов и современные математические методы. Все это в высшей степени относится к процессам переработки гетерогенных сред, таких как: смешение, измельчение, классификация, дозирование сыпучих материалов и т.п., которые составляют основу многих технологических процессов, в частности, производства строительных материалов.

При описании кинетики любого процесса рассматривают изменение некоторых величин, характеризующих реальный процесс во времени и пространстве. Такая оценка обычно определяется через средние физические параметры (концентрацию некоторого компонента, температуру, скорость движения материалов, размеры частиц и т.д.). Но во многих случаях при сушке, адсорбции (десорбции), измельчении, эмульгировании и смешении описание процессов через средние величины не дает исчерпывающей информации и не удовлетворяет требованиям, предъявляемым им технологической практикой. Обычно все технологические процессы, при которых осуществляется переработка гетерогенных сред, по своей природе являются случайными и

в них наблюдаются флуктуации основных физико-химических параметров. Поэтому во многих реальных процессах необходимо учитывать вероятностную природу этих процессов и оценить распределение по степени обработки (равномерность) перерабатываемых материалов [1, 3].

Решение поставленной задачи классическими методами осреднения турбулентного переноса и осреднения в механике гетерогенных сред вызывает большие трудности. Поэтому предлагается использовать упрощенный подход с применением приближения теории марковских процессов, некоторые приложения которой рассмотрены в работах [4-6].

Рассматриваемые процессы можно характеризовать через многомерную плотность распределения $W(\bar{x}, t)$ точек, изображающих соответствующее явление в фазовом пространстве, где $\bar{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$. Для вывода уравнения, которому удовлетворяет $W(\bar{x}, t)$, может быть использован следующий метод [7-8]. Пусть $\bar{x}(t)$ удовлетворяет системе кинетических уравнений:

$$dx_i(t)/dt = F_i(\bar{x}, t) + F_i'(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1)$$

где $F_i(\bar{x}, t)$ – детерминированные функции, $F_i'(\bar{x}, t)$ – дельта – коррелированное во времени гауссовское случайное поле со средним значением $\langle F_i'(\bar{x}, t) \rangle = 0$. Тогда случайный процесс $\bar{x}(t)$ является диффузионным марковским и $W(\bar{x}, t)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка (К.-Ф.-П.) [7-8]:

$$\frac{\partial W(\bar{x}, t)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [k_i(\bar{x}, t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [k_{ij}(\bar{x}, t) W(\bar{x}, t)], \quad (1.2)$$

где первый и второй инфинитезимальные моменты (коэффициенты сноса и диффузии) $k_i(\bar{x}, t)$ и $k_{ij}(\bar{x}, t)$ изменения случайной величины $\bar{x}(t)$ вычисляются по (1.1) известным правилам [7-8], т.е. нелинейная динамическая система (1.1) заменяется хорошо изученным уравнением (1.2) для плотности вероятности, которое полностью описывает исследуемый процесс. Причем, во многих случаях $k_i(\bar{x}, t)$ совпадают с функцией $F_i(\bar{x}, t)$, а $k_{ij}(\bar{x}, t)$ – являются постоянными величинами.

Данный подход может быть использован для не дельтакоррелированных процессов с конечным временным радиусом корреляции поля $F_i'(\bar{x}, t)$, для динамических систем с негауссовскими флуктуациями параметров и для кинетических систем интегро-дифференциальных уравнений [8].

Учитывая все вышеизложенное, в дальнейшем, не нарушая общность, можно рассматривать динамические уравнения только вида (1.1). При этом необязательно, чтобы каждый компонент $x_i(t)$ был марковским, чтобы процесс $\bar{x}(t)$ в целом был марковским диффузионным [7].

В качестве координат X_i фазового пространства могут быть приняты концентрация некоторого компонента, температура, скорость движения материалов, размеры частиц, время пребывания материалов в аппарате, внешние пространственные координаты и т.д. В этом случае динамические уравнения (1.1) должны быть дополнены также уравнениями сохранения механики гетерогенных сред с учетом флуктуаций соответствующих величин.

Для математического моделирования кинетики некоторых процессов переработки гетерогенных систем также можно использовать теорию разрывных марковских процессов на основе системы дифференциально-разностных уравнений Колмогорова [9]:

$$\frac{dP_{x_i}(t)}{dt} = I_{x_{i-1}} P(t)_{x_{i-1}} - (I_{x_i} + m_{x_i}) P_{x_i}(t) + m_{x_{i+1}} P_{x_{i+1}}(t), \quad (1.3)$$

где $x_i = \overline{x_{in}, x_{ik}}$, интенсивности I_{x_i} и m_{x_i} характеризуют скорости осуществления прямого и обратного процессов.

Некоторые аспекты математического моделирования нелинейных химических, химико-технологических и теплофизических процессов и обзор подобных работ рассмотрены также, например, в работах [10-11].

Рассмотрим применение вышеописанного подхода для математического моделирования кинетики некоторых процессов переработки дисперсных сред.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ ПРОЦЕССОВ СМЕШЕНИЯ КОМПОЗИЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ТВЕРДУЮ ФАЗУ

Смешение представляет собой процесс пространственного распределения компонентов смеси с целью получения однородной по составу, физико-механическим и химическим свойствам смеси и носит случайный характер. Оценка качества смеси обычно проводится через законы распределения определяющих параметров или их числовые характеристики.

Процесс смешения гетерогенных систем происходит под действием некоторого силового поля. Пусть $X_i(t)$ – случайные величины, определяющие количество несмешанных частиц или объединений частиц i -го сорта в момент времени t в некотором выделенном характерном объеме перерабатываемых материалов в соответствующем аппарате, x_i – те целочисленные значения, которые эти случайные величины могут принимать. Будем наблюдать за изменением случайной величины $X_i(t)$ и обозначим через $P_{x_i}(t) = P\{X_i(t) = x_i\}$, где $x_i = \overline{x_{ik}, x_{in}}, x_{in}, x_{ik}$ – соответственно начальное и предельное конечное числа частиц или групп частиц i -го сорта. В процессе смешения под действием силового поля происходит либо увеличение, либо уменьшение, либо одновременное увеличение и уменьшение числа частиц (групп частиц) $X_i(t)$, т.е. образование и распад (сегрегация) элементов смеси. Тогда исследуемому процессу можно поставить в соответствие марковский процесс рождения и гибели частиц (групп частиц) i -го сорта, который описывается системой уравнений (1.3). Интенсивности рождения I_{x_i} и гибели m_{x_i} , характеризующие процесс смешения, зависят от состояния системы, физико-механических свойств смешиваемых материалов, конструкций аппарата, условий и продолжительности процесса. Причем, вопрос выбора конкретного вида интенсивностей процесса $I_{x_i} = I_{x_i}(x_i, t)$ и $m_{x_i} = m_{x_i}(x_i, t)$ может быть решен на основании экспериментальных исследований физики (механизма) процесса и дискриминации конкурирующих гипотез с учетом физических особенностей реализации соответствующего процесса.

Из системы уравнений (1.3) можно получить уравнения относительно моментов распределения случайных величин. Для этого, если каждое уравнение системы (1.3) умножить на x_i в соответствующем состоянии и просуммировать их, то после несложных преобразований удастся получить дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{ds(t)}{dt} = f(s). \quad (2.1)$$

Здесь следует отметить, что при непрерывном добавлении (удалении) дисперсного материала в смеситель в процессе смешения правая часть системы уравнений (2.1) должна быть дополнена членами, характеризующими пуассоновские потоки с соответствующими интенсивностями $n_i(t)$.

Полученное кинетическое уравнение (2.1) описывает изменения математического ожидания соответствующих величин, характеризующих процесс смешения, т.е. величина $s(t)$ является средним абсолютным или среднеквадратичным отклонением концентрации соответствующего компонента от значения, заданного рецептурным соотношением.

При смешении бинарных смесей в периодическом режиме уравнение (2.1), например, имеет вид:

$$a) \frac{ds(t)}{dt} = -k(s^2 - s_p^2) \text{ при } m_{x_1} = m(x_1^2 - x_{1k}^2), \quad I_{x_1} = I(x_1^2 - x_{1k}^2), \quad (2.1.1)$$

$$б) \frac{ds(t)}{dt} = -k_2 s^2 + k_1 s \text{ при } m_{x_1} = m x_1^2, \quad I_{x_1} = I x_1(x_{1n} - x_1). \quad (2.1.2)$$

При соответствующих постулатах относительно интенсивностей гибели и рождения m_{x_1} и I_{x_1} можно получить и другие кинетические уравнения. Для выбора наилучшей модели необходимо провести дискриминацию гипотез на основе анализа остатков и критерия Уилкса [12].

Из полученных моделей (2.1.1.) и (2.1.2) некоторое предпочтение можно отдать модели (2.1.2). При выводе уравнений (2.1.1) и (2.1.2) был принят механизм образования смеси в виде схемы:



где A и B – группы частиц сортов A и B , представляющих собой наименьшее число частиц, из которых может образоваться элемент смеси (AB). В случае приготовления бинарных смесей $X(t)$ означает число несмешанных групп частиц сортов A и B ($i = 1, 2$), причем $X_1(t) = X_2(t)$. При выводе уравнения (2.1) также учтено, что $m_{x_1}(t) = \sum_{x_{1i}=x_{1k}}^{x_{1n}} x_{1i} P_{x_{1i}}(t)$ – математическое ожидание (среднее число) несмешанных элементов сорта A , $m_x \cdot Q_A / Q = C_{A\text{несм.}}$ – концентрация несмешанных частиц сорта A , где Q_A – вес или объем одного несмешанного элемента (группы) частиц сорта A , Q – вес или объем выделенного объема смеси, $C_{A\text{несм.}}$ с точностью до постоянной величины совпадает с абсолютным отклонением концентрации компонента A от значения, заданного рецептурным соотношением, т.е. $|C_A - m_A|$.

При приготовлении смесей в полунепрерывном режиме кинетическое уравнение (2.1), например, имеет вид:

$$\frac{ds(t)}{dt} = - \left[k(t) + \frac{q_{cp} + \mathbf{1} \sin wt}{q_o + q_{cp} \cdot t + \mathbf{1}(1 - \cos wt)/w} \right] s(t) + \frac{q_A(t)}{q_o + q_{cp} \cdot t + \mathbf{1}(1 - \cos wt)/w} \quad (2.1.3)$$

при линейной зависимости интенсивностей m_{x_1} и I_{x_1} от x_1 и подаче компонентов в смеситель по закону $n(t) = n_o + \mathbf{1}_o \sin wt$, где $q_A(t) = q_{Acp} + \mathbf{1}_A \sin wt$ – производительность дозатора по компоненту A , q_o – начальная загрузка смесителя, q_{cp} – мгновенная средняя производительность дозаторов, $\mathbf{1}$ и w – амплитуда и частота в подаче компонентов.

Работа смесительного комплекса в полунепрерывном режиме дает возможность сократить общее время приготовления смеси по сравнению с периодическим режимом смешения.

Этот выигрыш во времени в конкретных условиях в зависимости от времени загрузки t_3 и вида смесителя может составить до 25-35 % от времени смешения. На рис. 1 приведены расчетные данные по кинетике смешения в полунепрерывном режиме и их сравнение с опытными данными.

Таким образом, работу смесительных комплексов целесообразно осуществлять в полунепрерывном режиме по сравнению с периодическим. Это особенно важно при эксплуатации крупногабаритных аппаратов, заполнение которых происходит в течение значительного времени.

Аналогичным образом можно описать кинетику процессов смешения в непрерывнодействующих смесителях. Используя кинетические зависимости, можно оценить влияние пульсаций в подаче компонентов в смеситель на качество готовой смеси и сглаживающую способность смесительного комплекса.

Подобным подходом также удастся описать кинетику процессов смешения и многокомпонентных смесей.

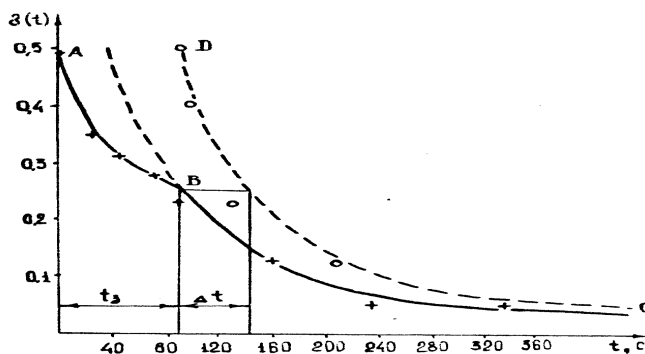


Рис. 1. Сравнение опытных и расчетных данных по кинетике смешения кварцевого песка с NaCl в двухвальном лопастном смесителе в полунепрерывном режиме.

Кривая АВ соответствует полунепрерывному режиму смешения в период загрузки $t_3 = 90$ с, а кривая ВС – периодическому режиму. Соотношение компонентов 0,417:0,583; $q_0 = 0,5$ кг;

$$q_A = 0,01156 \text{ кг/с}; q_B = 0,01624 \text{ кг/с}; q = 3 \text{ кг}; \Delta t = 55,7 \text{ с}, s(t = 325 \text{ с}) = 0,022.$$

Для более подробной оценки качества смесей необходимо определить плотность вероятности $W(s, t)$ из уравнения (К.-Ф.-П.) (1.2), которое строится по кинетическому уравнению (1.1), используя для этого выражение (2.1). Тогда уравнение (1.2) в случае системы с сосредоточенными параметрами (периодический процесс смешения) можно записать в виде:

$$\frac{\partial W(s, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial s} [f(s)W(s, t)] + \frac{\partial^2}{\partial s^2} [bW(s, t)], \quad (2.3)$$

которое решается при следующих начальном и граничном условиях:

$$W(s, 0) = j(s), \quad (2.4.1)$$

$$G[W(s_{\min}, t)] = 0, \quad G[W(s_{\max}, t)] = 0, \quad (2.4.2)$$

$$G[W(s, t)] = -f(s)W(s, t) + \frac{\partial}{\partial s} [bW(s, t)],$$

где s_{\min}, s_{\max} – соответственно минимально и максимально возможные значения s .

При описании кинетики реальных процессов смешения значение параметра « b » обычно меняется в пределах от 10^{-2} до 10^{-6} . Поэтому необходимо учитывать малость параметра « b » при старшей производной и при решении задачи (2.3)-(2.4) пользоваться асимптотическими методами [13]. Решение исходной задачи (2.3)-(2.4) может быть представлено в виде:

$$W(s, t) = W_{cm}(s) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-I_n t) Y'_n(s), \quad (2.5)$$

где $I_n = \frac{m_n^2}{b}$, $Y_n(s) = y(s) \tilde{Y}_n(s)$ определяют соответственно, собственные значения и функции исходной задачи:

$$W_{cm}(s) = \frac{p(s)}{\int_{s_{\min}}^{s_{\max}} p(s) ds}, \quad p(s) = \exp\left[\frac{1}{b} \int f(s) ds\right],$$

$$y(s) = \exp\left[\frac{1}{2b} \int f(s) ds\right], \quad (2.6)$$

$$A_n = \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} [j(s) - W_{cm}(s)] (Y'_n(s) / p(s)) ds \Big/ \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} [Y'_n(s)]^2 / p(s) ds.$$

На рис. 2 приведены результаты некоторых расчетов и сравнения их с опытными данными. При этом относительная погрешность не превышает $15 \div 18 \%$.

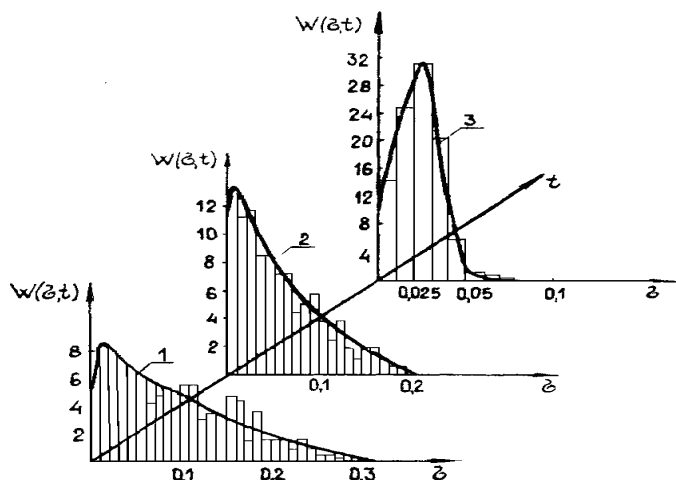


Рис. 2. Сравнение опытных и расчетных значений $W(s, t)$ при смешении кварцевого песка с 10 % водным раствором NaКМЦ в двухвальном лопастном смесителе при начальном распределении $j(s) = 0,7d(s - 0,3) + 0,3d(s - 0,7) : 1 - t = 17$ мин., $s_{cp} = 0,1$; $2 - t = 30$ мин., $s_{cp} = 0,061$; $3 - W_{cm}(s), s_{cp} = 0,025$

Следует отметить, что для описания кинетики процесса смешения можно пользоваться несколько упрощенным, более удобным в плане численных и практических реализаций подходом. В этом случае среднюю кинетику можно оценить, используя зависимости типа (2.1), без подробной ее оценки при помощи плотности вероятности $W(s, t)$. В результате определяются время достижения стационарного состояния (распределения) и минимальное время смешения t_{min} , необходимое для получения смеси с заданными свойствами. А конечное состояние смеси можно оценить через плотность вероятности $W_{cm}(s)$, т.е. описать продукт более детально. Данный подход применим и для описания кинетики других процессов обработки гетерогенных сред, таких как: измельчение, эмульгирование, классификация, массообмен и др.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ

Пусть измельчение осуществляется в некотором аппарате, в который загружен измельчаемый материал с объемом Q , начальной удельной поверхностью S_n и средним диаметром:

$$d_n = \int_{d_{min}}^{d_{max}} Y f(Y) dY,$$

$f(Y)$ – начальная дифференциальная функция распределения частиц по размерам.

Процессу измельчения можно поставить в соответствие марковский процесс рождения и гибели, который описывается системой дифференциально-разностных уравнений Колмогорова (1.3). В данном случае $X(t)$ означает число частиц в аппарате в момент времени t , а интенсивности рождения I_x и гибели m_x означают, соответственно, интенсивности дробления и агломерации, которые можно принять в виде:

$$I_x = I_1(t)(x_k - x), \quad m_x = m_1(t)(x_k - x). \tag{3.1}$$

После перехода к системе уравнений (1.3) с учетом зависимости (3.1) и математическому ожиданию случайной величины $X(t)$ можно получить следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{dm_x(t)}{dt} = I(t)[m_k - m_x(t)] = f_1(m_x(t)), \quad (3.2)$$

где $m_x(t)$ и m_k – среднее число частиц в аппарате в момент времени t и в конце процесса измельчения, $I(t)$ – параметр процесса. Число частиц $m_x(t)$ и средний их диаметр частиц связаны соотношением:

$$m_x(t) = \frac{6Q}{\rho d^3(t)}. \quad (3.3)$$

Тогда уравнение (3.2) может быть записано в виде:

$$\frac{dd(t)}{dt} = f_2(d(t)). \quad (3.2.1)$$

Решение уравнения (3.2) с учетом (3.3) и начального условия $d(0) = d_n$ в терминах $d(t)$ и $S(t)$ имеет вид:

$$\left(\frac{d_k}{d(t)}\right)^3 = 1 - \left[1 - \left(\frac{d_k}{d_n}\right)^3\right] \exp\left[-I\left(t + \frac{b}{2}t^2\right)\right] \quad (3.4.1)$$

$$\left(\frac{S(t)}{S_k}\right)^3 = 1 - \left[1 - \left(\frac{S_n}{S_k}\right)^3\right] \exp\left[-I\left(t + \frac{b}{2}t^2\right)\right] \quad (3.5.1)$$

при $I(t) = I(1 + bt)$ и

$$\left(\frac{d_k}{d(t)}\right)^3 = 1 - \left[1 - \left(\frac{d_k}{d_n}\right)^3\right] \exp\left[-\frac{I}{a}(e^{at} - 1)\right] \quad (3.4.2)$$

$$\left(\frac{S(t)}{S_k}\right)^3 = 1 - \left[1 - \left(\frac{S_n}{S_k}\right)^3\right] \exp\left[-\frac{I}{a}(e^{at} - 1)\right] \quad (3.5.2)$$

при $I(t) = I \exp(at)$, где I, a, b параметры моделей.

Здесь степень измельчения характеризуется через средний диаметр частиц $d(t)$ или удельную поверхность $S(t)$. Если ввести плотность вероятности $w(d, t)$, то с учетом уравнения (3.2.1) уравнение (К.-Ф.-П.) (1.2) для определения этой величины может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial W(d, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial d}[f_2(d)W(d, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial d^2}[bW(d, t)]. \quad (3.6)$$

Решение этого уравнения при соответствующих начальном и граничном условиях определяет функцию распределения частиц по размерам. Например, стационарное решение уравнения (3.6) имеет вид:

$$W_{cm}(d) = \frac{P_1(d)}{\int_{d_{\min}}^{d_{\max}} P_1(d) dd}, \quad P_1(d) = \exp\left[\frac{1}{2b} \int f_2(d) dd\right], \quad (3.7)$$

которое является дифференциальной функцией распределения частиц по размерам конечного измельчаемого продукта.

3. ПРОЦЕССЫ КЛАССИФИКАЦИИ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО РАЗМЕРАМ

Для разделения зернистых материалов по размерам часто используются ситовые одно- или многоярусные классификаторы. Поступающий на классификатор материал характеризуется некоторой функцией распределения по размерам (диаметр, длина, ширина и т.д.), описываемой плотностью вероятности $W(\bar{d})$, где $\bar{d}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ – вектор размеров материала. Требуется разделить исходный материал на m фракций размерами $(\bar{d}_j, \bar{d}_{j+1})$. При этом доля (число) частиц i -ой фракции определяется соотношением:

$$n_{\bar{d}_j} = \int_{\bar{d}_j}^{\bar{d}_{j+1}} W(\bar{d}) d\bar{d}. \quad (4.1.1)$$

Во многих практически важных случаях необходимо выделить одну фракцию размерами $\bar{d} \leq \bar{d}_{кр}$, где $\bar{d}_{кр}$ определяется технологическими требованиями, размером и формой отверстия сита. Тогда доля (концентрация) этой фракции равна:

$$n_{\bar{d}} = \int_{\bar{d}_{min}}^{\bar{d}_{кр}} W(\bar{d}) d\bar{d}. \quad (4.1.2)$$

Концентрация $n_{\bar{d}_j}$ или $n_{\bar{d}}$ за счет влияния случайных возмущающих факторов во время классификации является случайной величиной и на каждом i -ом ярусе классификатора ее можно характеризовать некоторой плотностью вероятности $W_i(n_{\bar{d}_j}, \bar{r}, t)$. В этом случае система кинетических уравнений (1.1) может быть представлена в виде:

$$\frac{dn_{\bar{d}_j}}{dt} = F_i(n_{\bar{d}_j}, \bar{r}, \bar{z}, t) + F'_i(\bar{z}, t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.2.1)$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}_j^i + V_j'^i, \quad r_j \frac{d\bar{V}_j^i}{dt} = \sum_k \bar{f}_k + \bar{f}'(t), \quad (4.2.2)$$

где \bar{f}_k – действующие на частицы фракции \bar{d}_j детерминированные силы, \bar{f}' силы случайного воздействия, F_i – кинетическая функция, характеризующая скорость просеивания зернистого материала на i -ом ярусе, F'_i – случайные кинетические функции, \bar{z} – вектор свойств материала, \bar{V}_j^i – скорость движения частиц \bar{d}_j -ой фракции на i -ом ярусе.

Уравнение (К.-Ф.-П.) (1.2) с учетом кинетических уравнений (4.2.1)-(4.2.2) имеет вид:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (V_{x_k}^i W_i) - \frac{\partial}{\partial n_{\bar{d}_j}} (F_i W_i) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sum_{s=1}^4 \frac{\partial^2 (B_{ks}^i W_i)}{\partial x_k \partial x_s}, \quad (4.3)$$

где $V_{x_k}^i$ – компоненты средней скорости движения частиц на i -ом ярусе, B_{ks}^i – вторые инфинитезимальные моменты (коэффициенты диффузии), $x_4 = n_{\bar{d}_j}$. Уравнения (4.3) описывают процесс классификации на многоярусных классификаторах, которые решаются при соответствующих начальных и граничных условиях.

Для определения кинетических функций F_i необходимо найти среднюю вероятность просеивания частицы P в элементарную ячейку просеивающей поверхности. Вычислению данной вероятности посвящены, например, работы [16-17]. Тогда кинетические уравнения (4.2.1), описывающие тонкослойный процесс классификации на i -ом ярусе для выбранной фракции могут быть представлены в виде:

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{\partial N_i}{\partial t} + V_{icp} \frac{\partial N_i}{\partial x} = F_i(n_{\bar{d}_j}, \bar{r}, \bar{z}, t) + F_i'(\bar{z}, t) = a_{i-1}N_{i-1} - a_i N_i + b_i h_i(t), \quad a_0 \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.4)$$

где $h_i(t)$ – дельта-коррелированные во времени случайные функции со средними значениями, равными нулю, характеризующие отклонение числа частиц данной фракции от средних величин на поверхности i -го сита.

При работе аппарата разделяемый материал в основном перемещается вдоль сита и в случае независимой работы каждого яруса уравнения (К.-Ф.-П.) (4.3) запишутся в виде:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = - \frac{\partial(V_{icp} W_i)}{\partial x} - \frac{\partial(F_i W_i)}{\partial n_{\bar{d}_j}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(D_i W_i)}{\partial n_{\bar{d}_j}^2}. \quad (4.5)$$

Начальное распределение $W_i(n_{\bar{d}_j}, x, 0)$ определяется составом разделяемого материала и организацией подачи его на классификатор.

Распределение на входе задается исходным фракционным составом продукта:

$$W_i(n_{\bar{d}_j}, 0, t) = W_i(n_{\bar{d}_j}). \quad (4.6)$$

Концентрация рассматриваемой фракции может меняться от нуля до единицы. Тогда граничные условия могут быть записаны в виде:

$$W_i(0, x, t) = 0, \quad W_i(1, x, t) = 0. \quad (4.7)$$

По полученным решениям были проведены численные расчеты (вычислительный эксперимент) для конкретных условий работы классификаторов. На рис. 3 приведены результаты расчетов линейных плотностей N_1 и N_2 для различных фракций вдоль первого и второго сита. Эти решения позволяют поставить и решить задачи оптимизации работы классификаторов.

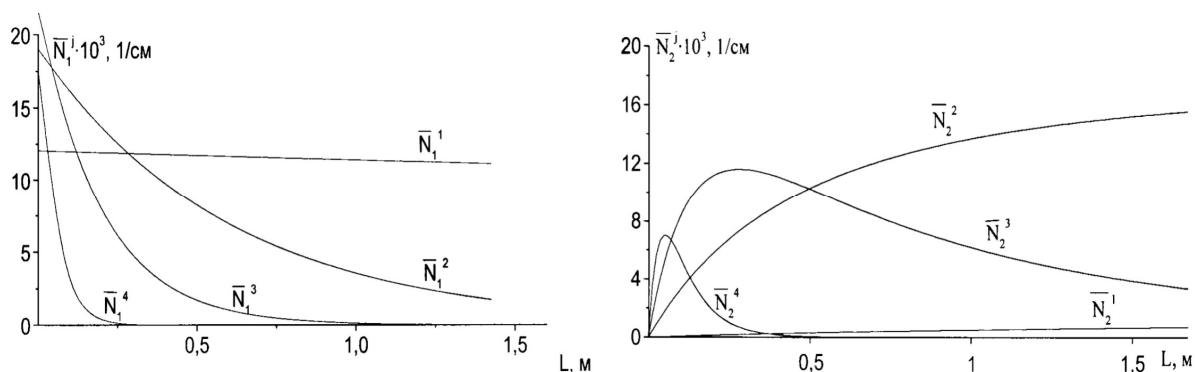


Рис. 3. Распределение линейной плотности выбранных фракций вдоль первого и второго сита: $a_1^1 = 5,78 \cdot 10^{-3}$; $a_1^2 = 8,42 \cdot 10^{-2}$; $a_1^3 = 2,57 \cdot 10^{-1}$;

$$a_1^4 = 9,08 \cdot 10^{-1}; \quad a_2^1 = 3,66 \cdot 10^{-4}; \quad a_2^2 = 2,77 \cdot 10^{-3}; \quad a_2^3 = 7,18 \cdot 10^{-2};$$

$$a_2^4 = 6,93 \cdot 10^{-1}, \quad (c^{-1}); \quad V_{cp} = 0,05 \text{ м/с.}$$

Размеры фракций: 1 – (0,8±0,9); 2 – (0,7±0,8); 3 – (0,6±0,7); 4 – (0,5±0,6), (мм).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория марковских процессов совместно с методами механики гетерогенных сред, дополненная экспериментальными исследованиями для определения параметров модели, позволяет построить математические модели кинетики целого класса технологических процессов с гетерогенными рабочими средами, которые являются основой для оптимизации и управления соответствующими процессами. Построенные математические модели были использованы для описания ряда процессов переработки дисперсных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кафаров В.В., Дорохов И.Н. Системный анализ процессов химической технологии. – М.: Наука, 1976.– 499 с.
2. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981.– 487 с.
3. Протодьяконов И.О., Богданов С.Р. Статистическая теория явлений переноса в процессах химической технологии. – Л.: Химия, 1983.– 397 с.
4. Непомнящий Е.А. Кинетика некоторых процессов переработки дисперсных материалов // Теорет. основы хим. технологии, 1973, т. 7, № 5. – С. 754-763.
5. Александровский А.А., Ахмадиев Ф.Г., Чураков В.С. Математическое моделирование процессов переработки дисперсных систем на основании теории марковских процессов. / В кн.: Теоретические основы химической технологии: Рефераты докладов и сообщений XII Менделеевского съезда по общей и прикладной химии. – М.: Наука, 1981. – 22 с.
6. Ахмадиев Ф.Г., Александровский А.А., Дорохов И.Н. О моделировании процессов массообмена с учетом флуктуаций физико-химических параметров. // Инж.-физ. журнал, 1982, т. 43, № 2. – С. 274-280.
7. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: Сов. радио, 1973. – 231 с.
8. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 365 с.
9. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука, 1969. – 511 с.
10. Холпанов Л.П. Самоорганизация и динамический хаос // Теоретические основы химической технологии, 1998, т. 32, № 4. – С. 355-368.
11. Холпанов Л.П. Математическое моделирование нелинейных процессов // Теоретические основы химической технологии, 1999, т. 33, № 5. – С. 466-484.
12. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. – М.: Мир, 1973. – 957 с.
13. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
14. Мальцев Н.Е. Об одной модификации метода ВКБ. Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 5. – С. 1108-1111.
15. Александровский А.А., Ахмадиев Ф.Г., Островская Э.Н. Исследование кинетики процесса эмульгирования. // Журн. прикладной химии, 1984, т. 57, № 1. – С. 187-190.
16. Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях. – М.: Колос, 1973. – 304 с.
17. Beeckmans J., Hu E., Germain R., McInture A. Performance characteristics of a probability screening machine. – Powder Technol, 1985, v. 43, № 3. – P. 249-256.

REFERENCES

1. Kafarov V.V., Dorohov I.N. The system analysis of processes of chemical technology. – M.: Science, 1976. – 499 p.
2. Moiseev N.N. Mathematical problems of the system analysis. – M.: Science, 1981. – 487 p.
3. Protodyakonov I.O., Bogdanov S.R. The statistical theory of the phenomena of carrying over in processes of chemical technology. – L.: Chemistry, 1983. – 397 p.

4. Nepomnyashy Y.A., Kinetics of the some processes of processing of disperse materials. // Theoretical bases of chemical technologies, 1973, v. 7, № 5. – P. 754-763.
5. Aleksandrovsky A.A., Akhmadiev F.G., Churakov V.C. Mathematical modeling of processes of processing of disperse systems on the basis of the theory of the Markov-processes. / Theoretical bases of chemical technologies: Abstracts of reports and messages XII of Mendeleevsky congress in the general and applied chemistry. – M.: Science, 1981. – 22 p.
6. Akhmadiev F.G., Aleksandrovsky A.A., Dorohov I.N. About modeling of processes of mass exchange taking into account fluctuations of physical and chemical parameters. // Engineering-physical magazine, 1982, v. 43, № 2. – P. 274-280.
7. Kazakov V.A. Introduction in the theory of the Markov-processes and some radio engineering problems. – M.: Sov. Radio, 1973. – 231 p.
8. Klyatskin V.I. The stochastic equations and waves in is casual-non-uniform environments. – M.: Science, 1980. – 365 p.
9. Barucha-Rid A.T. Elements of theory of the Markov-processes and their appendix. – M.: Science, 1969. – 511 p.
10. Kholpanov L.P. Self-organizing and dynamic chaos. // Theoretical bases of chemical technologies, 1998, v. 32, № 4. – P. 355-368.
11. Kholpanov L.P. Mathematical modeling of nonlinear processes. // Theoretical bases of chemical technologies, 1999, v. 33, № 5. – P. 466-484.
12. Himelblau D. The analysis of processes by statistical methods. – M.: World, 1973. – 957 p.
13. Nayfe A. Methods of indignations. – M.: World, 1976. – 455 p.
14. Maltsev N.Y. About one updating of method VKB. / Report. AS USSR, 1983, v. 271, № 5. – P. 1108-1111.
15. Aleksandrovsky A.A., Akhmadiev F.G., Ostrovskaya Y.N. Research of kinetics of the emulsify processes. // Magazine of applied chemistry, 1984, v. 57, № 1. – P. 187-190.
16. Gortinsky V.V., Demsky A.B., Boriskin M.A. Separation processes on the grainprocessing enterprises. – M.: Ear, 1973. – 304 p.
17. Beeckmans J., Hu E., Germain R., Mc. Inture A. Performance characteristics of a probability screening machine. – Powder Technol, 1985, v. 43, № 3. – P. 249-256.