



УДК 539.3

**Серазутдинов М.Н.** – доктор физико-математических наук, профессорE-mail: [serazmn@mail.ru](mailto:serazmn@mail.ru)**Абрагим Х.А.** – аспирантE-mail: [jussainaziz@yahoo.com](mailto:jussainaziz@yahoo.com)

Казанский государственный технологический университет

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ СБЛИЖЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ  
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УСИЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ****АННОТАЦИЯ**

Представлены результаты решения задачи, которая возникает при моделировании усиления стержневой конструкции. Описана методика определения сил, которые нужно приложить для сближения стержней, находящихся друг от друга на некотором расстоянии. Приведены и обсуждаются результаты расчетов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** стержневые конструкции, усиление, моделирование сближения стержней.

**Serazutdinov M.N.** – doctor of physical and mathematical sciences, professor**Abraham H.A.** – post-graduate student**Kazan State Technological University****DETERMINATION OF THE NECESSARY FORCES  
FOR CONVERGENT BEAMS AT MODELING OF STRENGTHENING STRUCTURES****ABSTRACT**

The results of solving the problem, which arise at modeling of strengthening beams structures are presented. The technique of forces determination which need to be put for rapprochement of the beams, which are lagging behind from each other on some distance is described. The results of calculations are resulted and discussed.

**KEYWORDS:** beams structures, strengthening, modeling of convergent beams.

При усилении конструкций, находящихся в напряженно-деформированном состоянии, используется способ повышения несущей способности сооружения за счет увеличения размеров поперечного сечения стержневых элементов [1, 2]. При этом, в частности, к имеющемуся элементу конструкции может быть присоединен подкрепляющий стержень. Так как усиливаемая конструкция находится в напряженном состоянии, то усиливаемый стержневой элемент будет деформирован, его продольная ось искривлена. Следовательно, между деформированным и прямолинейным усиливаемым стержнем имеется зазор, который ликвидируется при проведении монтажных работ, воздействием некоторых сил  $q_M$  (рис. 1 а). Возникает задача определения сил  $q_M$ , а также дополнительных монтажных напряжений, которые возникают в конструкции при сближении указанных стержневых элементов.

Для решения указанной задачи использовались следующие предположения. Полагалось, что имеющиеся и возникающие при монтаже перемещения в конструкции являются малыми, деформации – линейно упругие. Усиливаемый стержень искривлен, поэтому между усиливаемым и усиливающим элементами имеется некоторый зазор. Для устранения этого зазора к стержням прикладываются пары сосредоточенных сил  $F_j^M$  ( $j = 1, 2, \dots, N_F$ ), действующих перпендикулярно к линии  $AB$  (рис. 1 б).

Выделим на сближаемых поверхностях стержней  $N_T$  пар точек коллокаций ( $N_T \geq N_F$ ). Часть этих пар точек находится на линиях действия сил  $F_j^M$ , другая часть – выбирается некоторым образом так, чтобы каждая пара находилась на прямой, перпендикулярной к  $AB$ . При  $N_T = N_F$  все точки располагаются на линиях действия сил.

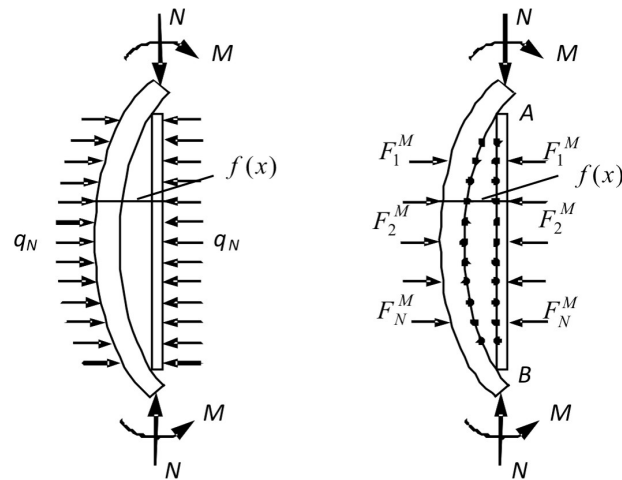


Рис. 1

Пусть  $f_i$  – расстояние между точками в паре с номером  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N_T$ ),  $\Delta w_{ij}^1$  – изменение расстояния между точками в паре с номером  $i$  при действии единичных сил  $F_j^M = 1$  ( $j = 1, 2, \dots, N_F$ ). В случае действия системы сил  $F_j^M$ , изменения расстояния между стержнями в выбранных точках:

$$w_i = \sum_{j=1}^{N_F} \Delta w_{ij}^1 F_j^M, \quad i = \overline{1, N_T}. \quad (1)$$

Нужно найти такие значения  $F_j^M$ , чтобы выполнялось условие:

$$w_i = f_i, \quad i = \overline{1, N_T}. \quad (2)$$

Если число выбранных точек коллокаций и число сил  $F_j^M$  одинаково ( $N_T = N_F$ ), то условие (2) выполняется точно. В этом случае, для нахождения  $F_j^M$ , после подставки выражения  $w_i$  в виде (1) в равенство (2), получатся система алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N_F} \Delta w_{ij}^1 F_j^M = f_i, \quad i = \overline{1, N_T}. \quad (3)$$

В случае, когда число точек сближения больше числа сил ( $N_T > N_F$ ), для определения величин  $F_j^M$  используется метод наименьших квадратов. Минимизируется функционал суммы квадратов невязок перемещений:

$$\Phi(w) = \sum_{i=1}^{N_T} (w_i - f_i)^2. \quad (4)$$

Из условия:

$$\frac{\partial \Phi(w)}{\partial F_k^M} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_F,$$

с учетом формул (1), (2), получается система алгебраических уравнений для вычисления неизвестных сил  $F_j^M$ :

$$\sum_{j=1}^{N_F} \left[ \sum_{i=1}^{N_T} \Delta w_{ij}^1 \cdot \Delta w_{ik}^1 \right] F_j^M = \sum_{i=1}^{N_T} f_i \cdot \Delta w_{ik}^1, \quad k = 1, 2, \dots, N_T. \quad (5)$$

Очевидно, что при действии сил  $F_j^M$  указанные стержни сблизятся и в деформируемой конструкции возникнут дополнительные (монтажные) напряжения, связанные с монтажом усиливаемых элементов.

Отметим, что при анализе напряженно-деформированного состояния усиливаемой конструкции следует учитывать ее исходное напряженно-деформированное состояние, а также дополнительные напряжения, возникающие при монтаже и при дополнительном нагружении [1, 2]. Часть из этих

факторов учитываются, например, при расчетах с использованием методики, описанной в работах [3, 4]. В данной статье основное внимание уделяется вопросам, возникающим при определении монтажных сил и напряжений. Представлены результаты решения задачи по определению сил, приводящих к возникновению заданных перемещений в деформируемой стержневой системе.

Обратим внимание на некоторые особенности изложенного алгоритма вычисления сил  $F_j^M$ . Сформулированная в статье задача нахождения сил  $F_j^M$  относится к обратным задачам механики деформируемого твердого тела, а методика определения  $F_j^M$  основана на использовании основных положений метода сил. В частности, система алгебраических уравнений (3) получена с использованием классической методики метода сил.

Обратные задачи в ряде случаев могут быть некорректными и малые изменения в исходных данных, приводят к значительным изменениям в решении [5, 6]. Поэтому при решении обратной задачи часто используют регуляризацию, что позволяет находить устойчивое приближенное решение. Один из способов регуляризации – применение метода минимальных невязок, использование которого в ряде случаев эффективно. В частности, это относится к задачам аппроксимации поверхностей [7].

По указанным причинам, при анализе данных расчетов следует обратить внимание на точность полученного решения сформулированной задачи, оценить влияние на результаты возникающих или вносимых погрешностей, оценить, с какой точностью в результате определяется напряженно-деформированное состояние усиливаемой стержневой системы.

С целью анализа влияния отмеченных факторов на результаты расчетов был решен ряд модельных задач. Определялись силы  $F_j^M$ , необходимые для того, чтобы сблизить две шарнирные балки, расстояние между которыми определялось функцией  $f(x)$  (рис. 2). Такая достаточно простая стержневая система была выбрана для того, чтобы устранить влияние на решение таких факторов, как сложность системы, наличие имеющихся в деформируемых элементах напряжений, особенностей граничных условий.

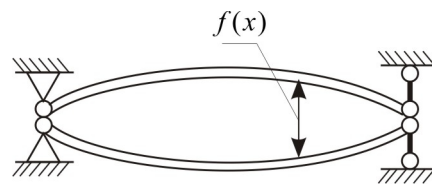


Рис. 2

Для определения  $F_j^M$  использовалась система уравнений (3), полученная методом сил, а также (или) система уравнений (5), при выводе которой применялись методы сил и минимальных невязок. Метод минимальных невязок использовался с целью регуляризации задачи.

Полагалось, что величина  $f(x)$  сравнима с прогибами, возникающими при линейно-упругом деформировании стержней. Поэтому балки (рис. 2) можно считать прямолинейными, а возникающие при их сближении деформации и перемещения малыми.

Приведем результаты расчетов для следующих исходных данных. Длины балок  $l = 3$  м, жесткости на изгиб  $EJ = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ . Расстояние между силами  $F_j^M$  выбиралось равным  $\Delta x_F = l / (N_F + 1)$ , расстояние между точками коллокаций, в которых задавались условия (2),  $\Delta x_w = \Delta x_F / k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Получено решение ряда задач, в которых расстояние между балками  $f(x)$  описывалось различными функциями. В том числе получено и решение обратной задачи, когда функция  $f(x)$  полагалась равной сумме прогибов балок при действии сил  $F_j^M$ , взятых со знаком минус.

Во всех случаях, когда  $f(x)$  задавалось достаточно точно, получалось решение, которое должно было получиться тестового примера.

Однако оказалось, что в случаях, когда в значения  $f(x)$  вносилась погрешность, найденные в результате решения силы  $F_j^M$  могут существенно отличаться от известных тестовых данных. Это приводит к тому, что возникающие в балках при их сближении расчетные величины изгибающих моментов  $M$  также, в определенной степени, отличаются от тестовых.

Приведем результаты расчетов для случаев, когда расстояние между балками  $f(x)$  задается в виде:

$$f(x) = f^*(x) \left[ 1 + a \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]. \tag{6}$$

Здесь  $f^*(x)$  – некоторая заданная функция,  $a$  – величина погрешности, которая вносится в значения  $f^*(x)$  и распределяется по длине балки по синусоидальному закону,  $n$  – целое задаваемое число.

Используем следующие обозначения:  $\varepsilon = \frac{a}{100} \cdot 100\%$  – погрешность задания в процентах максимального значения  $f^*(x)$ ;  $\Delta F_j = \left| \frac{F_j^M - F_j}{F_{\max}} \right| \cdot 100\%$ ,  $\Delta w_i = \left| \frac{w_i - f^*(x_i)}{f_{\max}^*} \right| \cdot 100\%$ ,  $\Delta M_i = \left| \frac{M_i - M^*(x_i)}{M_{\max}} \right| \cdot 100\%$ , ( $j = \overline{1, N_F}, i = \overline{1, N_T}$ ). Здесь  $F_j^M$ ,  $w_i$ ,  $M_i$  – значения сил, изгибающих моментов и суммы прогибов балок, найденные в результате расчетов;  $F_j$  – величины сил, полученные при решении задачи без внесения погрешностей в функцию  $f^*(x)$ ;  $M^*(x_i)$  – величины изгибающих моментов, которые должны возникать в точках коллокаций, при точном решении сформулированной задачи о сближении стержней;  $F_{\max}$ ,  $f_{\max}^*$ ,  $M_{\max}$  – максимальные значения  $F_j$ ,  $f^*(x_i)$ ,  $M^*(x_i)$ .

В таблицах 1, 2 представлены максимальные значения  $\Delta F_j$ ,  $\Delta w_i$ ,  $\Delta M_i$ , обозначенные как  $\Delta F_{\max}$ ,  $\Delta w_{\max}$ ,  $\Delta M_{\max}$ .

Таблица 1

**Влияние погрешностей на величины определяемых сил, прогибов и изгибающих моментов**

Расстояние между стержнями  $f^*(x) = 0,1 \sin(\pi x/l)$  м.

$n$	$\varepsilon, \%$	$N_F$	$N_T$	$\Delta F_{\max}, \%$	$\Delta w_{\max}, \%$	$\Delta M_{\max}, \%$
2	0	3	3	-	0	2,6
			15	0,06	0,06	5,3
		9	9	-	0	0,83
			39	0,01	0,001	0,83
	3	3	3	33,5	2,1	14
			15	32,6	2,1	13,8
		9	9	282	2,3	15,1
			39	319	2,3	14,3
	6	3	3	67	4,2	24,3
			15	65,3	4,2	24
		9	3	564	4,6	29,6
			39	638	4,58	27,9
5	3	9	9	2247	2,9	98,6
			59	2209	3	98,8
		3	3	182	2,9	38,6
			15	68,2	0,92	17,6
7	3	9	9	6961	3,1	208

В таблице 1 приведены результаты расчетов для случая, когда расстояние между стержнями определялось функцией  $f^*(x) = 0,1 \sin(\pi x/l)$  м. В таблице 2 – данные решения

обратной задачи, функция  $f^*(x)$  полагалась равной сумме прогибов балок при действии сил  $F_j^M = -1$  кН ( $j = \overline{1, N_F}$ ).

Таблица 2

**Влияние погрешностей на величины определяемых сил, прогибов и изгибающих моментов**

Расстояние между стержнями – прогиб балок при действии сил  $F_j^M = -1$  кН.

$n$	$\varepsilon, \%$	$N_F$	$N_T$	$\Delta F, \%$	$\Delta w, \%$	$\Delta M, \%$
2	0	3	3	0	0	0
			15	0	0	0
		9	9	0	0	0
			39	0	0	0
	3	3	3	40,5	2,1	10,1
			15	39,4	2,08	9,86
		9	9	359	2,3	14,8
			39	407	2,3	13,9
	6	3	3	81	4,3	20,2
			15	79	4,1	19,7
		9	9	717	4,6	29,5
			39	813	4,6	27,8
4	3	9	9	1296	2,8	58
6	3	9	9	4547	2,7	131

Как видно из приведенных данных, если расстояние между балками  $f(x)$  задается без внесения погрешностей ( $\varepsilon = 0$ ), то решение поставленной задачи получается практически точным. Некоторое отклонение в величинах изгибающего момента, равное 2,3 % и 5,3 % при  $N_T = 3$  (табл. 1), объясняется тем, что расчетные данные для  $M_i$  сравниваются со значением точного решения  $M^*(x_i) = -0,1 \cdot EI \cdot (p/l)^2 \sin(px/l)$ , а при действии только трех сил  $F_j^M$  ( $j = 1, 2, 3$ ), получить значение для изгибающих моментов, очень близкое к точному, невозможно.

Назовем в этой статье расчетные данные, полученные при  $\varepsilon = 0$ , «условно точными».

Если внести в функцию  $f(x)$  погрешность порядка 3-6 %, распределенную по длине балки по синусоидальному закону (6), то решение может существенно отличаться от «условно точного».

Значения прогибов балок определяются с приемлемой точностью, величины погрешностей  $\Delta w_{\max}, \%$  невелики. Это является естественным, так как решается задача нахождения минимума суммы квадратов невязок для прогибов. Если функция  $f(x)$  задается с погрешностью, распределенной по длине балки, в виде двух полуолн ( $n = 2$ ), изгибающие моменты находятся с ошибкой, достигающей 30 %. Ошибка в определении значений сил  $F_j^M$  получается при этом достаточно большой, в пределах от 40 % до 800 %.

В тех случаях, когда при задании  $f(x)$  число полуолн распределения погрешности больше двух ( $n = 4, 5, 6, 7$ ), данные расчетов сильно отличаются от «условно точных» (табл. 1, 2). Их нельзя использовать даже для оценки порядка величин искомых параметров.

Отметим, что использованный при определении решения способ регуляризации, основанный на введении дополнительных точек коллокаций, существенно не влиял на результаты.

На основе представленных данных и других полученных решений, сформулированной здесь задачи, можно сделать следующие выводы. В случаях, когда моделируется усиление деформируемой стержневой системы за счет присоединения дополнительного стержня, можно использовать описанный алгоритм определения монтажных сил  $F_j^M$ . Это следует из того, что  $f(x)$  будет определяться с достаточной точностью из решения задачи о деформировании и рассматриваемой стержневой системы. Результаты расчетов будут достоверны. В случаях же, когда величины  $f(x)$  в точках определяются в результате замера прогибов некоторого элемента реальной конструкции, нужно обращать особое внимание на точность проводимых измерений и на оценку погрешности расчетных данных.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Ребров И.С. Усиление стержневых металлических конструкций. – Л.: Стройиздат, 1988. – 288 с.
2. Будин А.Я., Чекренева М.В. Усиление портовых сооружений. – М.: Транспорт, 1983. – 178 с.
3. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н., Абрагим Х.А. Расчет усиливаемых конструкций вариационным методом // Известия вузов. Строительство, 2010, № 7. – С. 118-124.
4. Серазутдинов М.Н., Абрагим Х.А. Несущая способность стержневых элементов конструкций, усиливаемых в напряженном состоянии // Вестник КГТУ, 2010, № 9. – С. 512-518.
5. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 533 с.
7. Серазутдинов М.Н., Недорезов О.А. Об аппроксимации срединной поверхности оболочки // Исследования по теории оболочек. Тр. семинара. Вып. 25. – Казань: Казанск. физ.-техн. ин-т КНЦ АН СССР, 1990. – С. 47-53.

**REFERENCES**

1. Rebrov I.C. Strengthening of metal construction . – L.: Stroyizdat, 1988. – 288 p.
2. Boudin A.Y., Chekreneva M.V. Enhancing Port building. – M.: Transport, 1983. – 178 p.
3. Serazutdinov M.N., Ubaidulloev M.N., Abraham H.A. Calculation of the strengthening structures by variation method // Proceedings of the universities. Construction, 2010, № 7. – P. 118-124.
4. Serazutdinov M.N., Abraham H.A. Load-capacity of beam structural elements, strengthening under stress state. // Vestnik KGTU, 2010, № 9. – P. 512-518.
5. Marchuk, G.I. Methods of Computational Mathematics. – M.: Science, 1977. – 456 p.
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Methods for Solving inconsistent problem. – M.: Science, 1974. – 533 p.
7. Serazutdinov M.N., Nedorezov O.A. On the approximation of the shell middle surface: Studies on shell theory. Tr. workshop. Vol. 25. – Kazan: Kazan. Phys.-Tech. Inst KNTS AN USSR, 1990. – P. 47-53.