УДК 624.04
Серазутдинов М.Н. – доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: serazmn@mail.ru
Убайдуллоев М.Н. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: madgidpwn@rambler.ru
Казанский национальный исследовательский технологический университет
Адрес организации: 420015, Россия, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 68

Расчет стержневых конструкций из упрочняющихся и идеально упругопластических материалов

Аннотация

Постановка задачи. Цель работы – разработка вариационного метода расчета стержневой конструкции с учетом пластических деформаций. Предполагается, что при деформировании стержней связь между нормальными напряжениями и продольной деформацией стержня описывается диаграммой линейно-упрочняющего тела.

Результаты. Разработан вариационный метод расчета стержневых конструкций из упрочняющегося и идеально упругопластического материала. Представленная методика расчета основана на разделении продольной деформации стержня на две части: упругую и пластическую. Достоинства такого подхода заключаются в том, что можно по единой схеме проводить расчеты для стержневых конструкций из упрочняющегося и идеально упругопластического материала. В частности, эти достоинства проявляются при определении предельной нагрузки для системы из идеально упругопластического материала.

Выводы. С использованием предлагаемой методики решены различные задачи изгиба и растяжения-сжатия стержней при упругопластических деформациях. В данной статье представлены результаты расчетов статически неопределимой стержневой системы. Полученные расчетные данные по данному методу согласуются с аналитическими решениями рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: стержневые конструкции, вариационный метод, упругопластические деформации, предельная нагрузка.

Излагается вариационный метод расчета стержневой конструкции с учетом пластических деформаций. Предполагается, что при деформировании стержней связь между нормальными напряжениями и продольной деформацией стержня описывается диаграммой линейно-упрочняющего тела. В отличие от исследований [1-9] представленная методика расчета основана на разделении продольной деформации стержня на две части: упругую и пластическую. Достоинства такого подхода заключаются в том, что можно по единой схеме проводить расчеты для стержневых конструкций из упрочняющегося и идеально упругопластического материала. В частности, эти достоинства проявляются при определении предельной нагрузки для системы из идеально упругопластического материала. В случае использования традиционных методик расчета, информацию о величине предельной нагрузки получают только на основе аварийного останова компьютерного счета. При использовании представленной методики, можно определять предельную нагрузку на основе графической информации, получающейся в результате расчетов.

Предполагается, что при упругопластическом деформировании элементов стержневой системы превалирующими являются возникающие в поперечных сечениях нормальные напряжения σ_x. Следовательно, представленные результаты применимы в случаях, когда элементы системы в виде стержней испытывают деформацию растяжения-сжатия и изгиба. В этих случаях, как известно, нормальные напряжения σ_x в поперечных сечениях значительно больше касательных τ.

Диаграмма линейно-упрочняющего тела показана на рис. 1. Модуль упругости материала при упругих деформациях (участок OA на рис. 1) обозначим через E, а при упругопластических деформациях (участок AB) – E_k.

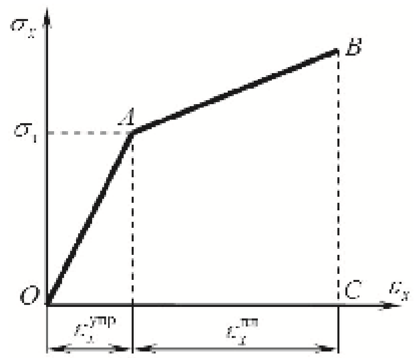

Рис. 1. Диаграмма $s_x = f(e)$

Представим продольную деформацию стержня ε_x в виде суммы:

$$e_x = e_x^{упр} + e_x^{пл}, \tag{1}$$

где $e_x^{упр}$, $e_x^{пл}$ – соответственно, упругая и пластическая деформаций.

Введем коэффициент α, определяющий части этих деформаций:

$$e_x^{упр} = a e_x, \quad e_x^{пл} = (1 - a) e_x. \tag{2}$$

Как видно из рис. 1:

$$s_Т = E e_x^{упр} = E a e_x, \tag{3}$$

следовательно:

$$\alpha = \sigma_Т / (E\varepsilon_x), \tag{4}$$

Очевидно, что при $\varepsilon_x < 0$, $\alpha = \sigma_Т / (E|\varepsilon_x|)$.

Если деформации являются упругими, то $\alpha = 1$ и зависимость между нормальными напряжениями и деформациями выражается законом Гука $s_x^{упр} = E\, e_x^{упр}$. При упругопластических деформациях ($\alpha < 1$), как видно из рис. 1:

$$s_x = s_T + E_к \, (e_x - e_x^{упр}).$$

Подставляя в эту формулу соотношения (1), (2), получим:

$$\sigma_x = E^* \varepsilon_x, \tag{5}$$

где

$$E^* = E\,\alpha + E_k\,(1 - \alpha). \tag{6}$$

Значение приведенного модуля упругости материала E^* зависит от величины деформации ε_x. При упругих деформациях $\alpha = 1$, а при упругопластических деформациях $\alpha < 1$ и определяется по формуле (4). В тех случаях, когда величина ε_x заранее не известна, для нахождения α следует использовать итерационный метод, последовательно определяя ε_x и α.

В случае $E_k = 0$, деформирование материала описывается диаграммой идеально упругопластического тела. Формула (5) для этого случая имеет вид:

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x\,\alpha\,. \tag{7}$$

При упругих деформациях касательные напряжения связаны с угловой деформацией законом Гука при сдвиге: $\tau^{упр} = G_\gamma^{упр}$, где G – модуль сдвига. Как известно при растяжении прямолинейного стержня зависимость между углом сдвига γ и относительной линейной деформацией ε_x имеет следующий вид:

$$\gamma = (1 + \nu)\,\varepsilon_x. \tag{8}$$

Касательное напряжение на площадке, составляющей угол $\alpha = 45^0$ с продольной осью стержня O_x, связаны с нормальными напряжениями σ_x формулой:

$$\tau = \sigma_x/2. \tag{9}$$

С учетом (8)-(9), как известно, получается $G = E/2(1+\nu)$.

Соотношения (8) и (9) являются геометрическими и не зависят от того, что деформации являются упругими или пластическими.

Исходя из этого, с учетом (5)-(6), полагаем, что при упругопластических деформациях:

$$\tau = G^*\gamma, \tag{10}$$

где $G^* = \frac{E}{2(1+n)}a + \frac{E_k}{2(1+n^*)}(1-a)$; ν^* – коэффициент поперечных деформаций материала при упругопластических деформациях.

В соответствии с диаграммой растяжения (рис. 1), удельная потенциальная энергия деформации стержня при растяжении и сжатии равна площади фигуры *OABC*:

$$u_0 = \frac{1}{2}s_x^{\text{упр}} e_x^{\text{упр}} + s_{\text{т}} e_x^{\text{пл}} + \frac{1}{2}s_x^{\text{пл}} e_x^{\text{пл}} = \frac{1}{2}E(e_x^{\text{упр}})^2 + s_{\text{т}} e_x^{\text{пл}} + \frac{1}{2}E_{к} (e_x^{\text{пл}})^2.$$

С учетом (2) получается:

$$u_0 = \frac{1}{2}E a^2 e_x^2 + s_{\text{т}}(1-a)e_x + \frac{1}{2}E_{\text{к}}(1-a)^2 e_x^2.$$

Учитывая, что при вычислении вариации потенциальной энергии деформации следует варьировать величинами ε_x и α, находим:

$$d\,u_0 = E(e_x^2 a da + a^2 e_x de_x) + s_{\text{т}}\left[(-e_x da + (1-a)d\,e_x\right] + E_{\text{к}}\left[-e_x^2(1-a)da + (1-a)^2 e_x de_x\right]. \quad (11)$$

Используя (2), вычисляем:

$$da = -\frac{s_{\text{т}}}{Ee_x^2}de_x = -\frac{a}{e_x}de_x. \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в (11), получаем:

$$d\,u_0 = s_{\text{т}} de_x + E_{\text{к}}(1-a)\, e_x\, de_x. \quad (13)$$

Используя равенство (3), соотношение (13) можно представить в виде:

$$d\,u_0 = E^* e_x de_x. \quad (14)$$

Аналогично, при возникновении деформации сдвига:

$$d\,u_0 = G^* g\, d\, g. \quad (15)$$

Напряженно-деформированное состояние стержневой конструкции определяется из вариационного уравнения Лагранжа:

$$dU - dW = 0. \quad (16)$$

В данном выражении δU – вариация потенциальной энергии деформации стержневой системы; δW – вариация работы внешних сил.

При определении перемещений стержневой системы из условия (16), используется методика, изложенная в [1].

Для конструкции из линейно-упрочняющего материала:

$$dU = \int_l \left[\iint_A \left(E^* e_x de_x + G^* g_{xy} dg_{xy} + G^* g_{xz} dg_{xz}\right)\right]dx, \quad (17)$$

где

$$e_x = \frac{du_1}{dx} - y\frac{df_3}{dx} + z\frac{df_2}{dx},\; g_{xy} = \frac{du_2}{dx} - f_3 - z\frac{df_1}{dx},\; g_{xz} = \frac{du_3}{dx} + f_2 + z\frac{df_1}{dx}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), после преобразований получим:

$$dU = \int_l \left[\iint_A \Phi_1(x,y,z)dA\right]dx. \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\Phi_1(x,y,z) = E^*\left(\frac{du_1}{dx} - y\frac{df_3}{dx} + z\frac{df_2}{dx}\right)d\frac{du_1}{dx} + G^*\left(\frac{du_2}{dx} - f_3 - z\frac{df_1}{dx}\right)d\frac{du_2}{dx} + \\
+G\left(\frac{du_3}{dx} + f_2 + y\frac{df_1}{dx}\right)d\frac{du_3}{dx} + G^*\left(-z\left(\frac{du_2}{dx} - f_3\right) + \left(z^2 + y^2\right)\frac{df_1}{dx} + y\left(\frac{du_3}{dx} + f_2\right)\right)d\frac{df_1}{dx} + \\
+E^*\left(z\frac{du_1}{dx} - yz\frac{df_3}{dx} + z^2\frac{df_2}{dx}\right)d\frac{df_2}{dx} + G^*\left(\frac{du_3}{dx} + f_2 + y\frac{df_1}{dx}\right)df_2 + \\
+E^*\left(-y\frac{du_1}{dx} + y^2\frac{df_3}{dx} - yz\frac{df_2}{dx}\right)d\frac{df_3}{dx} + G^*\left(-\frac{du_2}{dx} + f_3 + z\frac{df_1}{dx}\right)df_3.
\end{gathered} \quad (20)$$

После интегрирования по площади *A* поперечных сечений стержней условие (16), с учетом (20), принимает вид:

$$\int_l \tilde{\Phi}_1(x)\,dx = dW, \quad (21)$$

где

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(x)=E^*\left(A\frac{du_1}{dx}-S_z\frac{df_3}{dx}+S_y\frac{df_2}{dx}\right)d\frac{du_1}{dx}++G^*\left(A\frac{du_2}{dx}-Af_3-S_y\frac{df_1}{dx}\right)d\frac{du_2}{dx}+\\
+G^*\left(A\frac{du_3}{dx}+Af_2+S_z\frac{df_1}{dx}\right)d\frac{du_3}{dx}+G^*\left(-S_y\left(\frac{du_2}{dx}-f_3\right)+\left(J_y+J_z\right)\frac{df_1}{dx}+S_z\left(\frac{du_3}{dx}+f_2\right)\right)d\frac{df_1}{dx}+\\
+E^*\left(S_y\frac{du_1}{dx}-J_{yz}\frac{df_3}{dx}+J_y\frac{df_2}{dx}\right)d\frac{df_2}{dx}+G^*\left(A\left(\frac{du_3}{dx}+f_2\right)+S_z\frac{df_1}{dx}\right)df_2+ \qquad (22)\\
+E^*\left(-S_z\frac{du_1}{dx}+J_z\frac{df_3}{dx}-J_{yz}\frac{df_2}{dx}\right)d\frac{df_3}{dx}+G^*\left(-A\left(\frac{du_2}{dx}-f_3\right)+S_y\frac{df_1}{dx}\right)df_3;\\
dW=\int_{l_q}(\tilde{q}_1\,d\tilde{u}_1+\tilde{q}_2\,d\tilde{u}_2+\tilde{q}_3\,d\tilde{u}_3)\,dl+\sum_{i=1}^{I}(\tilde{F}_{1i}\,d\tilde{u}_1(x_i)+\tilde{F}_{2i}\,d\tilde{u}_2(x_i)+\tilde{F}_{3i}\,d\tilde{u}_3(x_i))+\\
+\sum_{j=1}^{J}(\tilde{M}_{1j}\,d\tilde{\varphi}_{1j}(x_j)+\tilde{M}_{2j}\,d\tilde{\varphi}_{2j}(x_j)+\tilde{M}_{3j}\,d\tilde{\varphi}_{3j}(x_j)).
\end{gathered}
$$

Здесь A, S_y, S_z, J_y, J_z, J_{yz} – геометрические характеристик сечений элементов стержневой системы; $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, $\tilde{q}_3$, $\tilde{F}_{1i}$, $\tilde{F}_{2i}$, $\tilde{F}_{3i}$, $\tilde{M}_{1j}$, $\tilde{M}_{2j}$, $\tilde{M}_{3j}$, – проекции распределенных и сосредоточенных нагрузок на координатные оси $\tilde{O}\tilde{x}$, $\tilde{O}\tilde{y}$, $\tilde{O}\tilde{z}$; $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$, $\tilde{\varphi}_{1j}$, $\tilde{\varphi}_{2j}$, $\tilde{\varphi}_{3j}$ – компоненты вектора перемещения и углов поворота поперечных сечений, определяемых в глобальной системе координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$.

Для нахождения геометрических характеристик поперечных сечений элементов стержневой конструкции A, S_y, S_z, J_y, J_z, J_{yz} используется численное интегрирование [1, 4].

При определении напряженно-деформированного состояния конструкции с учетом упругопластических деформаций, расчеты необходимо выполнять итерационным методом. На первом шаге итерации в выражении (19) полагается α = 1 и размер зоны пластических деформаций $A_{пл}$ = 0. Далее, на последующих итерациях, в точках поперечного сечения проверяется выполнение условия $\sigma_x < \sigma_T$. Если это условие выполняется, то α = 1 и в данной точке сечения деформации являются упругими. В случае, когда $\sigma_x \geq \sigma_T$, данная точка относится к области пластических деформаций, следовательно $\alpha < 1$. Величина коэффициента α находится по формуле (4).

Итерационный процесс завершается в том случае, если будет выполнено условие:

$$\left(\left|e_{\max}^{(n)}-e_{\max}^{(n-1)}\right|\Big/e_{\max}^{(n)}\right)\cdot 100\%\leq\Delta,$$

где Δ – заданная величина погрешности, $e_{\max}^{(n)}$, $e_{\max}^{(n-1)}$ – максимальные относительные деформации в сечениях элементов стержневой системы на двух последующих итерациях.

С использованием описанной методики были решены различные задачи изгиба и растяжения-сжатия стержней при упругопластических деформациях. Полученные расчетные данные хорошо согласуются с известными аналитическими решениями.

Рис. 2. Стержневая система

Представим результаты расчетов статически неопределимой стержневой системы (рис. 2), полученные по описанной методике. Система нагруженной силой F, и состоит из четырех стержней с одинаковой площадью поперечного сечения A = 1 $см^2$, выполненные из одного материала, для которого σ_T = 240$МПа$, E = 2·10^5 $МПа$, E_k = 0. Так как E_k = 0, то деформирование каждого из стержней описывается диаграммой идеально упругопластического материала (рис. 3). В результате расчетов находилась величина предельной нагрузки $F_{пр}$, при действии которой стержневая система теряет несущую способность. Полагалось Δ = 0,001.

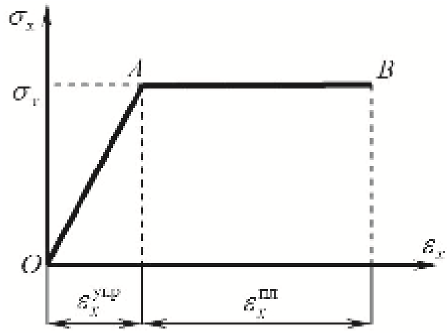

Рис. 3. Диаграмма идеально упругопластического материала

В соответствии с точным решением [10], при F = $F_{упр}$ деформации в стержнях являются упругими, а усилия в стержнях получаются следующими: N_1 = 0,134$F_{упр}$, N_2 = 0,261$F_{упр}$, N_3 = 0,454$F_{упр}$, N_4 = 0,319$F_{упр}$.

Наиболее загруженным является третий стержень. При $F_{упр}$ = 52,863 $кН$ усилие в наиболее загруженном стержне достигает своего предельного значения N_3 = $\sigma_T A$. Предельное состояние стержневой системы наступает при N_2 = N_3 = N_4 = $\sigma_T A$. В этом случае усилие в первом стержне N_1 = 0,293$\sigma_T A$, а предельная нагрузка, согласно [10], $F_{пр}$ = 66,725 $кН$.

При проведении расчетов по представленной здесь методике для определения предельной нагрузки использовалось пошаговое нагружение системы. На первом шаге полагалось, конструкция нагружался наибольшей силой $F_{упр}$ = 52,863 $кН$ при которой деформации в стержнях остаются упругими. Далее, до достижения предельного состояния, шаг нагрузки принимался равным ΔF = 1,4725 кН. По результатам расчетов получен график изменения вертикального перемещения узла C стержневой системы в зависимости от величины нагрузки F (рис. 4). С использованием этих данных можно определить предельную нагрузку, которая будет соответствовать горизонтальному (почти горизонтальному) участку графика AB (рис. 4). На этом горизонтальном участке нет однозначного соответствия межу w_C и F. Эта особенность отражает тот факт, что для идеально упругопластического материала при достижении предела текучести нет однозначного соответствия межу σ и ε (линия AB на рис. 3). Поэтому при наступлении в стержневой системе предельного состояния также не будет однозначного соответствия между предельной нагрузкой и перемещениями в системе.

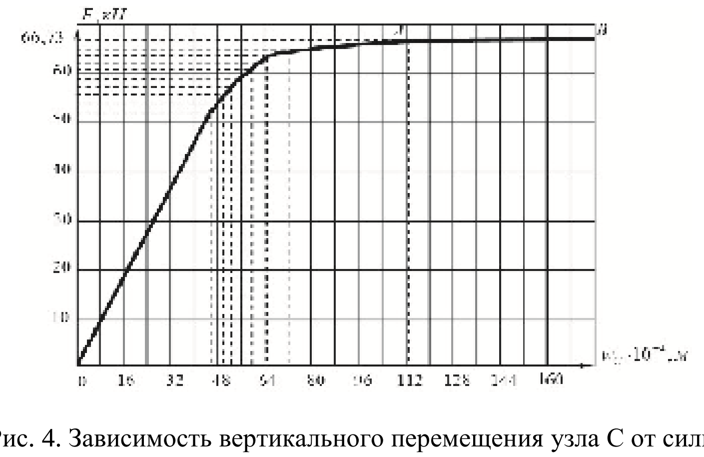

Рис. 4. Зависимость вертикального перемещения узла С от силы

При расчетах в качестве предельной нагрузки принимается такое значение силы F, для которого на очередном шаге нагружения для малого приращения нагрузки ΔF получается достаточно значительное возрастание величины перемещения (по сравнению с приращением, полученным на предыдущем шаге).

В рассматриваемом случае (рис. 4), нагрузке F = 65,26 $кН$ соответствует перемещение w_C = $73{\cdot}10^{-4} м$, а нагрузке F = 66,73 $кН$ соответствует w_C = $114{\cdot}10^{-4} м$. Следовательно, на этом шаге нагружения, увеличение силы на величину ΔF = 1,4725 кН (на 2,3 %) приводит к значительному возрастанию (более чем на 55 %) перемещения w_C. На предыдущих шагах нагружения такого не наблюдается. Поэтому в качестве значения предельной нагрузки принимается $F_{пр}$ = 66,73$кН$. Эта величина практически совпадает со значением $F_{пр}$, определенным аналитическим методом [10].

В таблице представлены результаты расчетов предложенным вариационным и аналитическим методом [10]. Как видно из числовых данных, результаты этих расчетов различаются очень незначительно.

Таблица

Результаты расчетов различными методами

Метод расчета	Усилия в стержнях в предельном состоянии, $кН$				Деформации стержней, $м$				Предельная нагрузка $F_{пр}$, $кН$
	N_1	N_2	N_3	N_4	Δl_1	Δl_2	Δl_3	Δl_4	
Аналитич. метод	7,029	24,0	24,0	24,0	0,0199	-0,0055	-0,0113	-0,014	66,725
Вариацион. метод	7,037	24,0	23,95	23,95	0,0199	-0,0055	-0,0113	-0,014	66,730

График на рис. 4 наглядно иллюстрирует одно из достоинств представленной методики расчета, которая предполагает разделение продольной деформации стержня на упругую и пластическую часть (1) и введение коэффициента α, определяющий части этих деформаций (2), (4). В результате, на основе расчетов получаются графики, позволяющие, в частности, определять для стержневых конструкций из идеально упругопластического материала предельную нагрузку. Как известно, в случае использования традиционных методик расчета, информацию о величине предельной нагрузки получают только на основе аварийного останова компьютерного счета. Информация о деформировании системы в виде графиков подобных графику на рис. 4, является более надежной, чем аварийный останов компьютерного счета.

Список библиографических ссылок

1. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н. Вариационный метод расчета прямолинейных и криволинейных тонкостенных стержней. Казань : Мин. обр. и науки России. Казан. нац. исслед. технол. ун-т, 2016. 144 с.
2. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Сагдатуллин М. К. Вариационный метод расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенного стержня открытого профиля // Вестник Казанского технол. ун-та. 2014. № 8. С. 255–260.
3. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Вариационный метод расчета стержневых систем при пластических деформациях : сб. трудов Международной научно-технической и образовательной конференции «Образование и наука – производству» / КГИЭА, Набережные Челны, 2010. С. 43–46.
4. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Повышение несущей способности усиливаемых нагруженных конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 3. С. 23–30.
5. Nagy-Györgya T., Sasb G., Dăescua A.C., Stoian V. Experimental and numerical assessment of the effectiveness of FRP-based strengthening configurations for dapped-end RC beams // Engineering Structures. 2012. Т. 33, Т. 44. P. 291–303.
6. Iskhakov I., Ribakov Y. Ultimate limit state of pre-stressed reinforced concrete elements // Materials & Design. 2015. Т. 75. P. 9–16.
7. Убайдуллоев М. Н. Повышение несущей способности эксплуатируемых сооружений // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. № 4 (9). С. 64–122.

8. Валиуллин А. Х. Упругопластический изгиб балки из материала с линейным упрочнением // Вестник Казанского технологического университета. 2010. № 9. С. 453–458.
9. Валиуллин А. Х. Упругопластический изгиб балки // Вестник Казанского технологического университета. 2013. № 21. С. 221–224.

Serazutdinov M.N. – doctor of physical and mathematical sciences, professor
E-mail: serazmn@mail.ru
Ubaidulloyev M.N. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: madgidpwn@rambler.ru
Kazan National Research Technological University
The organization address: 420015, Russia, Kazan, K. Marks st., 68

Calculation of rod structures from reinforcing and ideally elastic-plastic materials

Problem statement. The purpose of this work is the development of a variational method for calculating a rod structure taking into account plastic deformations. It is assumed that when the rods are deformed, the relationship between the normal stresses and the longitudinal deformation of a rod is described by the diagram of a linearly strengthening body.

Results. A variational method has been developed for calculating the rod structures from a reinforcing and ideally elastic-plastic material. The presented calculation technique is based on the separation of longitudinal deformation of a rod into two parts: elastic and plastic. The advantages of this approach consist in the fact that it is possible to carry out calculations for rod structures from a reinforced and ideal elastic-plastic material according to a single scheme. In particular, these advantages are manifested when determining the ultimate load for a system of perfectly elasto-plastic material.

Conclusions. Using the described technique, various problems of bending and stretching-compression of rods for elasto-plastic deformations were solved. In this article presents the results of calculations of a statically indeterminate rod system. The obtained calculated data are in good agreement with known analytical solutions.

Keywords: rod structures, variational method, elasto-plastic deformations, ultimate load.

References

1. Sezrutdinov M. N., Ubaidulloev M. N. Variational method for calculating rectilinear and curvilinear thin-walled rods. Kazan : Ministry of Education and Science of Russia. Nat. Research Technol. Un-t., 2016. 144 p.
2. Sezrautdinov M. N., Ubaidulloev M. N., Sagdatullin M. K. Variational method for calculating the stress-strain state of a thin-walled rod of an open profile // Vestnik Kazanskogo tekhnol. un-ta. 2014. № 8. P. 255-260.
3. Sezrutdinov M. N., Ubaidulloev M. N., Abraham Kh. A. Variational method for calculating rod systems under plastic deformations : dig. of art. International Scientific, Technical and Educational Conference «Education and Science to Production» / KGIEA, Naberezhnye Chelny, 2010. P. 43–46.
4. Seprasdinov M. N., Ubaidulloev M. N., Abraham Kh. A. Increase of load-bearing capacity of reinforced loaded structures // Construction mechanics of engineering structures and structures. 2011. № 3. P. 23–30.
5. Nagy-Györgya T., Sasb G., Dăescua A.C., Stoian V. Experimental and numerical assessment of the effectiveness of FRP-based strengthening configurations for dapped-end RC beams // Engineering Structures. 2012. T. 33, T. 44. P. 291–303.
6. Iskhakov I., Ribakov Y. Ultimate limit state of pre-stressed reinforced concrete elements // Materials & Design. 2015. T. 75. P. 9–16.
7. Ubaidulloev M. N. Increase of bearing capacity of operated structures // Construction of unique buildings and structures. 2013. № 4 (9). P. 64–122.
8. Valiullin A. Kh. Elastic-plastic bending of the beam from a material with linear hardening // Vestnik Kazanskogo tekhnol. un-ta. 2010. № 9. P. 453–458.
9. Valiullin A. Kh. Elastic-plastic bending of the beam // Vestnik Kazanskogo tekhnol. un-ta.. 2013. № 21. P. 221–224.