



УДК 533.69.048

Гумерова Л.В. – инженер-конструктор

E-mail: leila_gumerova@list.ru

АО Ракетно-космический центр «Прогресс»

Адрес организации: 443009, Россия, г. Самара, ул. Земеца, д. 18

Гумеров А.В. – кандидат технических наук, старший преподаватель

E-mail: anvar_gumerov@list.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Сила, возникающая при движении вихревой нити около кругового цилиндра

Аннотация

Определяются зависимости суммарной силы, как интегрированием давления на поверхности цилиндра в неустановившемся потоке, так и импульсным способом. Исследуется необходимость введения в состав комплексного потенциала течения потенциала центрального вихря. Движение вихря рассчитывается методом дискретных источников, расположенных в точках внутренней окрестности контура цилиндра, а также с применением комплексного потенциала. Расчеты показывают, что реальное движение вихревой нити в идеальной жидкости происходит при введении в состав комплексного потенциала течения по теореме об окружности потенциала центрального вихря.

Ключевые слова: теорема об окружности, источник, непроницаемость поверхности, неустановившееся течение, поле скоростей, вихрь в неподвижной точке.

Введение

Согласно теореме об окружности движение вихревой нити около кругового цилиндра определяется комплексным потенциалом [1], содержащим потенциал центрального вихря интенсивности, совпадающей с интенсивностью внешнего вихря. Милн-Томсон в примерах 11, 12 к главе 13 [2] скорость внешнего вихря и давление на поверхности кругового цилиндра определяет с учетом центрального вихря. Например, Джеррард методом дискретных вихрей показывает, что внешний вихрь на поверхности тела образует циркуляцию, обратную собственной [3]. Это противоречит утверждению Милн-Томсона [2], согласно которому циркуляция по любому контуру, охватывающему цилиндр, но не охватывающему вихрь равна нулю. Сарпкая до статьи Джеррарда потенциал центрального вихря учитывает [4], а после [4] во всех последующих работах [5] этот потенциал отбрасывает. Таким образом, одни исследователи в своих расчетах потенциал центрального вихря учитывают [2], [6], [7], а другие нет [8], [9]. Можно ли исключение центрального вихря обосновать теоремой Кельвина о том, что при баротропном движении идеальной жидкости под действием потенциальных сил циркуляция скорости по замкнутому контуру не изменяется. По другому, применив теорему Кельвина для внезапно стартовавшего из состояния покоя кругового цилиндра можно ли утверждать, что во все моменты времени циркуляция по контуру, охватывающему цилиндр и пелену, равна нулю и центрального вихря не следует вводить. Здесь применение теоремы Кельвина не уместно, так как пелена образуется в результате действия сил трения, т.е. жидкость не является идеальной. Поэтому возникает вопрос о необходимости учета или исключения этого потенциала для получения реального движения вихревой нити. Также представляет практический интерес вопрос о влиянии интенсивности центрального вихря на величину силы, действующей на цилиндр.

В настоящей работе движение вихревой нити рассчитывается методом дискретных источников-стоков, а также с применением комплексного потенциала течения. На основе сравнения результатов расчета делается вывод о необходимости введения в состав комплексного потенциала течения потенциала центрального вихря для получения реального движения вихревой нити в идеальной жидкости. Получены зависимости силы действующей на цилиндр при трех различных интенсивностях центрального вихря g

Постановка задачи

Пусть в точке $z_1 = r$ несжимаемой невязкой жидкости вне кругового цилиндра радиуса R внезапно образуется вихревая нить, интенсивности Γ . Определим перемещение этого вихря около цилиндра. Комплексный потенциал такого течения вызванного вихрем выражается формулой:

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - r) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R} - \frac{R^2}{r} \frac{\ddot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} - \frac{i\mathfrak{g}}{2\pi} \ln z,$$

где i – мнимая единица, \mathfrak{g} – интенсивность центрального вихря. Требуется установить влияние интенсивности \mathfrak{g} на движение вихря и на величину силы, действующей на цилиндр. Поэтому силу будем определять при трех значениях \mathfrak{g} $\mathfrak{g} = 0$, т.е. центральный вихрь отсутствует; $\mathfrak{g} = \Gamma$ – интенсивность, соответствующая теореме об окружности; $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ – случай, при котором вихрь будет оставаться в неподвижной точке.

Расчет интенсивности центрального вихря

Наличие в составе комплексного потенциала течения потенциала инверсионного вихря обеспечивает непроницаемость поверхности цилиндра. При этом вихревая нить движется около цилиндра по круговой траектории. Введение центрального вихря интенсивности Γ замедляет скорость движения вихревой нити, но на ее траекторию не влияет. Является ли такое движение действительным. Может она двигаться по другой траектории или находится в неподвижной точке. Это можно было бы проверить экспериментально. Однако опытная проверка реального характера движения вихревой нити в идеальной жидкости довольно затруднительно. Поэтому движение вихря определим методом дискретных источников-стоков, расположенных в точках внутренней окрестности контура цилиндра (рис. 1). Этот способ обеспечивает практическую непроницаемость поверхности, и в то же время, в отличие от метода дискретных вихрей, не вносит дополнительной циркуляции по контуру цилиндра [10].

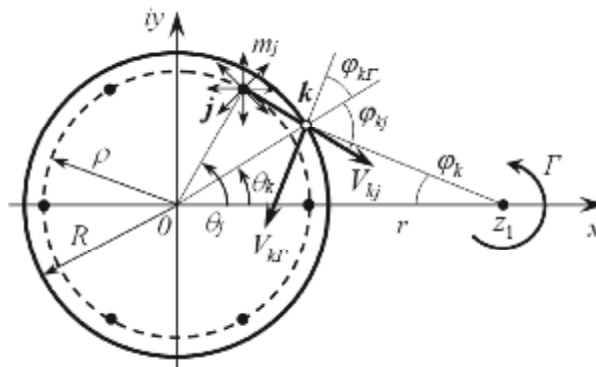


Рис. 1. Расчетная схема

Расположим на окружности радиуса r ($r < R$) n источников с равными интервалами между ними. Тогда комплексный потенциал течения будет описываться функцией:

$$\Phi(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - r) + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{m_j}{2\pi} \ln(z - z_j),$$

где m_j – мощность источника в точке $z_j = r \exp(i\theta_j)$. Значения m_j найдем из условия равенства нулю в n точках контура цилиндра нормальной скорости от источников и вихревой нити, т.е. из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n m_j \alpha_{kj} = b_{k\Gamma}, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Коэффициенты скоростей от источников a_{kj} и от вихревой нити $b_{k\Gamma}$ определяются как:

$$a_{kj} = \frac{\cos \theta_j}{2\pi |R \exp(-i\theta_k) - r \exp(-i\theta_j)|} = \frac{R - r \cos(\theta_j - \theta_k)}{2\pi (R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta_j - \theta_k))},$$

$$b_{k\Gamma} = \left| \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{1}{R \exp(-iq_k) - r} \right| \times \sin(q_k + j_k) = \frac{\Gamma}{2\rho} \times \frac{\sin(q_k + j_k)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos q_k}},$$

где $h_k = R \sin \theta_k$, $l_k = R \cos \theta_k$, $z_{jk} = z_k - z_j = R \exp(i\theta_k) - \rho \exp(i\theta_j)$, $tg \varphi_k = h_k / (r - l_k)$, $\cos \varphi_{kj} = (z_k \cdot z_{jk}) / (|z_k| \cdot |z_{jk}|) = (R - \rho \cos(\theta_j - \theta_k)) / \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\theta_j - \theta_k)}$.

Эту систему линейных уравнений решаем методом Гаусса и определяем значения n источников-стоков m_k . Расчеты показывают, что на верхней полуокружности радиуса r располагаются источники, а на нижней – стоки. Абсолютные значения мощностей $|m_k|$ сверху и снизу при одинаковых значениях координаты x равны между собой.

С найденными значениями мощностей определим скорость вихревой нити и скорость жидкости на противоположной стороне цилиндра:

$$V_r^m = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2\rho} \times \frac{1}{r - r \exp(-iq_k)}, \quad V_{-R}^m = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2\rho} \times \frac{1}{-R - r \exp(-iq_k)} - \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{1}{R+r}.$$

Приведем результаты расчетов при $R=1$, $r=1,2R$, $2\Gamma/2\pi=1$ и $n=350$:

- если $\rho=0,97R$, то $V_r^m = -i1,89384$ и $V_{-R}^m = -i0,90907$;
- если $\rho=0,95R$, то $V_r^m = -i1,89394$ и $V_{-R}^m = -i0,90909$.

Сравнение скоростей при $r = 0,95R$ и $r = 0,97R$ показывает на незначительное влияние значений r в малой окрестности круга на величину скорости.

Вычислим скорости в этих же точках через комплексный потенциал течения без потенциала центрального вихря:

$$V_r^\Gamma = -\frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{1}{r - R^2/r} = -i2,72727; \quad V_{-R}^\Gamma = \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{1}{R + R^2/r} - \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{1}{R+r} = i0,0909.$$

Если ввести по теореме об окружности центральный вихрь, то:

$$V_r^\Gamma = \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{\dot{\epsilon}}{\hat{\epsilon}} \times \frac{1}{r - R^2/r} + \frac{1}{r} \frac{\dot{\upsilon}}{\hat{\upsilon}} = -i1,8939; \quad V_{-R}^\Gamma = \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{\dot{\epsilon}}{\hat{\epsilon}} \times \frac{1}{R + R^2/r} - \frac{1}{R+r} - \frac{1}{R} \frac{\dot{\upsilon}}{\hat{\upsilon}} = -i0,9091.$$

Как видим, скорости жидкости, определенные методом дискретных источников при $r = 0,95R$ и по комплексному потенциалу с центральным вихрем практически совпадают.

На рис. 2 представлены поля скоростей вне цилиндра. Скорости в узловых точках координатной сетки $Z_{i_1 i_2}$ на рис. 2, а определялись без потенциала центрального вихря, т.е. по формуле:

$$V_{i_1 i_2}^a = \text{conj} \frac{\dot{\epsilon}}{\hat{\epsilon}} \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{1}{z_{i_1 i_2} - r} + \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{1}{z_{i_1 i_2} - R^2/r} \frac{\dot{\upsilon}}{\hat{\upsilon}},$$

а на рис. 2, б с учетом потенциала центрального вихря $V_{i_1 i_2}^b = V_{i_1 i_2}^a + \text{conj}(-i\Gamma/2\rho \times 1/z_{i_1 i_2})$. Поле скоростей, построенное по потенциалам источников и внешнего вихря:

$$V_{i_1 i_2} = \text{conj} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\epsilon}_k}{\hat{\epsilon}_k} \frac{m_k}{2\rho} \times \frac{1}{z_{i_1 i_2} - r \exp(iq_k)} - \frac{i\Gamma}{2\rho} \times \frac{1}{z_{i_1 i_2} - r} \frac{\dot{\upsilon}}{\hat{\upsilon}}$$

совпадает с полем рис. 2, б.

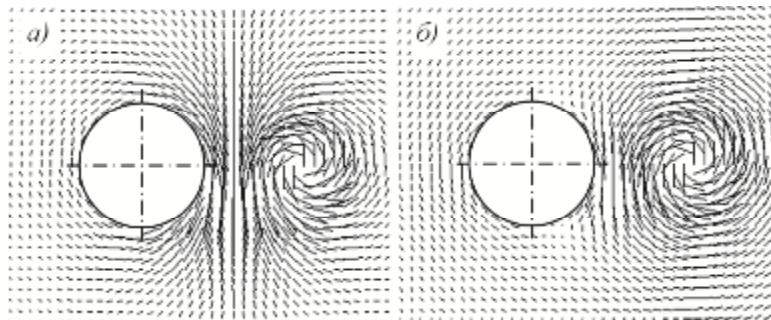


Рис. 2. Поле скоростей около цилиндра в присутствии вихря:
а – поле скоростей без потенциала центрального вихря,
б – с учетом потенциала центрального вихря

Анализ результатов расчетов показывает, что реальное движение вихревой нити в идеальной жидкости происходит при нахождении скорости вихря по комплексному потенциалу, содержащему по теореме об окружности потенциал центрального вихря. Такой комплексный потенциал, интенсивность центрального вихря которого равна интенсивности внешнего вихря, назовем основным. В результате введения дополнительной циркуляции в циркуляцию центрального вихря можно получить другой комплексный потенциал, интенсивность центрального вихря которого обозначим через g

Расчет силы, действующей на круговой цилиндр

Расчет скорости движения вихрей методом дискретных источников показывает, что вихревая нить в действительности перемещается по круговой траектории, а ее скорость определяется потенциалами инверсионного и центрального вихрей. При известном положении и скорости вихревой нити можно найти зависимость действующей на цилиндр силы интегрированием давления на поверхности. Эту зависимость можно определить и импульсным способом. Однако в этом случае необходимо знать скорость жидкости в центре круга и в точке инверсии. При отсутствии плоскопараллельного потока будем полагать, что скорости жидкости внутри и вне круга определяется одним и тем же комплексным потенциалом. Если зависимости силы, полученные интегрированием давления и импульсным способом, будут иметь одинаковый вид, то предположение будем считать верным. Поэтому зависимости суммарной силы будем выводить импульсным способом и интегрированием давления на поверхности в неустановившемся течении. Для нахождения влияния величины интенсивности центрального вихря на силу определим зависимости силы при трех значениях g

1. $g = 0$ – случай, когда центральный вихрь отсутствует. Тогда комплексным потенциалом скорости является:

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2p} \ln(z - r) + \frac{i\Gamma}{2p} \ln \frac{z}{z} - \frac{R^2}{r} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}}$$

Отсюда скорость движения вихревой нити равна $V_1 = -i\Gamma/2\pi \cdot r/(r^2 - R^2)$. Скорость вихревой нити совпадает с местной скоростью жидкости. Поэтому вихревая нить силы не создает, т. к. сила образуется только при движении вихря относительно жидкости [11].

Определим скорость жидкости V_u и скорость вихря V_u^g в точке инверсии $z_u = R^2/\bar{z}_1$. Скорость жидкости находим по формуле:

$$V_u = \text{conj} [d(-i\Gamma/2p \times \ln(z - r))] / dz |_{z=z_u} = -i\Gamma/2p \times r/(r^2 - R^2),$$

а скорость вихря выражается производной от z_u по времени:

$$V_u^g = d(R^2/\bar{z})/dt = -R^2/r^2 \times \dot{\bar{z}}_1 = -i\Gamma/2p \times R^2/(r(r^2 - R^2)).$$

Можно заметить, что скорости жидкости в точках внешнего и инверсионного вихрей равны между собой, т.е. $V_u = V_1$. Суммарная сила, определяемая импульсным способом, создается только инверсионным вихрем и равна:

$$Q_u = ir \Gamma (V_u - V_u^g) = r \Gamma^2 / (2pr).$$

Она направлена от центра цилиндра к вихревой нити.

Приведем получение этой зависимости силы интегрированием давления на поверхности цилиндра $p_\theta = p_\infty - \rho V_\theta^2/2 - \rho \delta \phi_\theta / \delta t$. Скорость на контуре цилиндра в зависимости от полярного угла q изменяется по формуле:

$$V_q = \text{conj} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{1}{(R \exp(iq) - r)} + \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{1}{(R \exp(iq) - R^2/r)} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \text{conj} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{\exp(-iq)(r^2 - R^2)}{R \times p(q)} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}}$$

где $p(\theta) = R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta$ – расстояние от точки контура цилиндра до вихревой нити. Тогда $V_\theta^2 = \Gamma^2 (r^2 - R^2)^2 / (2\pi R p(\theta))^2$. Определим изменение $\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} \frac{q}{t}$ от q :

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} \frac{q}{t} = \text{conj} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{-V_1}{R \exp(iq) - (r + V_1 r)} + \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{R^2 \bar{V}_1 / r^2}{R \exp(iq) - R^2 / (r + \bar{V}_1 r)} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \frac{-\Gamma^2}{4p^2 p(q)}$$

Суммарная сила давления на цилиндр определяется интегралом:

$$I = -R \int_0^{2p} \rho V_\theta^2 \exp(iq) dq = r R \int_0^{2p} \frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}} \frac{q}{t} \frac{1}{2} (\cos q + i \sin q) dq.$$

Подставляя значения интегралов:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos q}{p^2(q)} dq = \frac{4pRr}{(r^2 - R^2)^3}; \int_0^{2\pi} \frac{\cos q}{p(q)} dq = \frac{2pR}{r(r^2 - R^2)}; \int_0^{2\pi} \frac{\sin q}{p^2(q)} dq = 0 \text{ и } \int_0^{2\pi} \frac{\sin q}{p(q)} dq = 0,$$

получим такую же зависимость суммарной силы:

$$I = \rho r \Gamma^2 / 2\pi(r^2 - R^2) - \rho \Gamma^2 R^2 / (2\pi r(r^2 - R^2)) = \rho \Gamma^2 / (2\pi r).$$

2. $g = \Gamma$ – случай реального движения вихревой нити, когда скорость жидкости определяется основным комплексным потенциалом. Скорость движения вихревой нити совпадет с местной скоростью жидкости и будет равна:

$$V_1 = -\frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{r}{r^2 - R^2} + \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{1}{r} = -\frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{R^2}{r(r^2 - R^2)}.$$

Скорости жидкости в центре круга $z_0=0$ и в точке инверсии $z_u=R^2/r$ принимают значения:

$$V_0 = i\Gamma / 2p \times 1 / (0 - r) - i\Gamma / 2p \times 1 / (0 - R^2 / r) = i\Gamma / 2p \times (r^2 - R^2) / rR^2$$

и

$$V_u = i\Gamma / 2p \times 1 / (R^2 / r - r) - i\Gamma / 2p \times 1 / (R^2 / r) = -i\Gamma / 2p \times (2R^2 - r^2) / R^2(r^2 - R^2).$$

Скорость перемещения центрального вихря V_0^e равна нулю, а инверсионного вихря равна:

$$V_u^e = R^2 / r^2 \times V_1 = -i\Gamma / 2p \times R^4 / (r^3(r^2 - R^2)).$$

Зависимость суммарной силы, выводимая импульсным способом, равна сумме составляющих от центрального и инверсионного вихрей и принимает вид:

$$Q = -ir\Gamma(V_0 - V_0^e) + ir\Gamma(V_u - V_u^e) = \Gamma^2 R^2 / (2pr^3).$$

Перейдем к выводу зависимости силы I интегрированием давления p_θ . Скорость жидкости на контуре круга равна:

$$V_q = i\Gamma / 2p \times (1 / (R \exp(-iq) - r) - 1 / (R \exp(-iq) - R^2 / r) + 1 / (R \exp(-iq) - 0)) = \\ = i\Gamma \exp(iq) \times (R - r \cos q) / (pp(q)).$$

Тогда $V_q^2 / 2 = \Gamma^2 (R - r \cos q)^2 / (2p^2 p^2(q))$. Выразим производную $\frac{\partial V_q}{\partial t}$ через угол q :

$$\frac{\partial V_q}{\partial t} = \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R \exp(iq) - (r + V_1 t)} - \frac{1}{R \exp(iq) - (R^2 / r + V_u^e t)} \right) \Big|_{q=0} = \frac{-\Gamma^2 R^2}{4p^2 r^2 p(q)}.$$

$$I = -R \int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{r V_0^2}{2} - r \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\cos q + i \sin q) dq.$$

Выделим в произведении $V_q^2 \cos q / 2$ целые неотрицательные степени по $\cos \theta$.

$$(R - r \cos q)^2 \cos q / p^2(q) = m_1 \cos q + m_2 + m_3 \cos q / p^2(q) + m_4 / p^2(q),$$

$$\text{где } m_1 = \frac{1}{4R^2}, m_2 = \frac{r^2 - R^2}{4R^3 r}, m_3 = \frac{3r^4 - 2R^2 r^2 - R^4}{4R^2}, m_4 = \frac{(r^2 + R^2)^2 (r^2 - R^2)}{4R^3 r}.$$

Учитывая выражения ранее приведенных интегралов, а также интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dq}{p^2(q)} = \frac{2p(r^2 + R^2)}{(r^2 - R^2)^3}$ получим, что $I_1 = \Gamma R \int_0^{2\pi} \frac{V_q^2}{2} \cos q dq = \frac{r \Gamma^2 R^2}{2pr(r^2 - R^2)}$. Составляющей силы от

функции $\frac{\partial V_q}{\partial t}$ будет $I_2 = \Gamma R \int_0^{2\pi} \frac{\partial V_q}{\partial t} \cos q dq = \frac{-r \Gamma^2 R^4}{2pr^3(r^2 - R^2)}$. Поскольку интеграл $\int_0^{2\pi} R \frac{\partial p}{\partial t} \sin q dq = 0$, суммарной силой по давлению будет:

$$I = I_1 + I_2 = \Gamma^2 R^2 / (2pr^3).$$

Отношение сил случая 1 к случаю 2 определяется как:

$$r \Gamma^2 / (2pr) : \Gamma^2 R^2 / (2pr^3) = r^2 / R^2.$$

3. $g = g^*$ – случай вихревой нити, находящейся в неподвижной точке. Определим интенсивность центрального вихря, при которой перемещения вихревой нити не происходит, т.е.:

$$V_1 = -\frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{1}{(r - R^2 / r)} + \frac{ig^*}{2pr} = 0.$$

Откуда следует, что $\gamma^* = r^2 \Gamma / (r^2 - R^2)$. В этом случае течение вокруг цилиндра является установившимся. Скорости жидкости в центре круга V_0 и в точке инверсии V_u выражаются формулами:

$$V_0 = \text{conj} \oint_{\xi} \frac{i\Gamma}{2pR^2} + \frac{i\Gamma}{2pr} \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{r^2 - R^2}{rR^2}$$

и

$$V_u = \text{conj} \oint_{\xi} \frac{i\gamma^*}{2p} \times \frac{r}{R^2} - \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{r}{R^2 - r^2} \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{i\Gamma}{2pR^2}.$$

Определим силу импульсным способом, учитывая, что скорости центрального и инверсионного вихрей равны нулю:

$$Q = -ir \Gamma V_u + ir \gamma^* (V_0 - 0) = -ir \Gamma \times \frac{i\Gamma}{2pR^2} + ir r^2 \frac{\Gamma}{r^2 - R^2} \times \frac{i\Gamma(r^2 - R^2)}{2pR^2} = 0.$$

Таким образом, если вихревая нить не перемещается, то на цилиндр сила не действует.

Перейдем к нахождению зависимости силы интегрированием давления $p_0 = p_\infty - \rho V_0^2 / 2$, здесь:

$$V_q = \text{conj} \oint_{\xi} \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{1}{R \exp(iq) - r} + \frac{i\Gamma}{2p} \times \frac{1}{R \exp(iq) - R^2 / r} - \frac{i\gamma^*}{2p} \times \frac{1}{R \exp(iq)} \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{i\Gamma \exp(iq) p_1(q)}{2p(r^2 - R^2)p(q)},$$

где $p_1(\theta) = 3r^2 R - 2r^3 \cos \theta - R^3$.

Тогда:

$$\frac{V_q^2}{2} = \frac{\Gamma^2}{8p^2(r^2 - R^2)} \times \frac{p_1^2(q)}{p^2(q)}.$$

Интеграл I , выражающий силу, также находится выделением в подынтегральной функции целых неотрицательных степеней по $\cos q$:

$$p_1^2(q) \cos q / p^2(q) = m_1 \cos q + m_2 + m_3 \cos q / p^2(q) + m_4 / p^2(q),$$

где $m_1 = \frac{r^4}{R^2}$, $m_2 = \frac{r(r^2 - R^2)^2}{R^3}$, $m_3 = (r^2 - R^2)^2 \times \frac{(3r^4 + R^4)}{R^2}$ и $m_4 = \frac{r(r^4 - R^4)^2}{R^3}$.

Представив интеграл $I = -R \oint_0^{2\pi} p_q \times \exp(iq) dq$ как сумму интегралов, получим:

$$I = \frac{r \Gamma^2}{8p^2(r^2 - R^2)} \oint_{\xi} m_1 \times 0 + m_2 \times 2p + m_3 \times \frac{4pRr}{(r^2 - R^2)^3} - m_4 \times \frac{2p(r^2 + R^2)}{(r^2 - R^2)^3} \frac{\ddot{\theta}}{\theta},$$

который также равен нулю.

В завершение нахождения зависимостей силы заметим, что определение зависимости суммарной силы импульсным способом значительно проще. Однако интегрированием давления можно найти не только зависимость суммарной силы, но и силы на отдельные участки поверхности.

Заключение

1. На основе расчетов, проведенных методом дискретных источников и с применением комплексного потенциала скорости, показано, что вихревая нить около круглого цилиндра движется по круговой траектории или находится в неподвижной точке в зависимости от величины интенсивности центрального вихря. Если к цилиндру никакие циркуляции не приложены, то интенсивность центрального вихря согласно теореме об окружности должна быть равна интенсивности внешнего вихря.

2. Одинаковые зависимости силы, полученные импульсным способом и интегрированием давления, показывают, что в случае отсутствия равномерного потока скорости жидкости вне и внутри кругового цилиндра определяются одним и тем же комплексным потенциалом скорости.

3. Если интенсивность центрального вихря γ равна нулю, то суммарная сила, действующая на цилиндр, выражается формулой $Q = \rho \Gamma^2 / (2\pi r)$, а если γ равна интенсивности внешнего вихря Γ , то $Q = \rho \Gamma^2 R^2 / (2\pi r^3)$. Она в r^2 / R^2 раз меньше силы, получаемой без центрального вихря. Эта сила направлена от центра цилиндра к внешнему

вихрю. Если же интенсивность центрального вихря такова, что вихревая нить находится в неподвижной точке, то на цилиндр сила не действует.

Список библиографических ссылок

1. Карафоли Е. Аэродинамика крыла самолета. – М.: АН СССР, 1956. – 480 с.
2. Милл-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 670 с.
3. Gerrard J.H., Numerical Computation of the Magnitude and Frequency of the Lift on a Circular Cylinder // *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 1967, Vol. 261, № 1118. – P. 137-162.
4. Sarpkaya T. Lift, Drag and Added-Mass Coefficients for a Circular Cylinder Immersed in a Time-Dependent Flow // *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1963, Vol. 85. – P. 13-15.
5. Sarpkaya T. An Analytical Study of Separated Flow About Circular Cylinders // *ASME Journal of Basic Engineering*, 1968, Vol. 90, – P. 511-520.
6. Gebert G.A. Determination of Slender Body Aerodynamics Using Discrete Vortex Methods // *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1994, Vol. 31, № 2, March-April. – P. 200-207.
7. David H. Bridges, Hans G. Hornung. Elliptic Tip Effects on the Vortex Wake of an Axisymmetric Body of Incidence // *AIAA Journal*, 1994, Vol. 32, № 7. – P. 1437-1445.
8. Sarpkaya, T., Schoaff, R. Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding by a Circular Cylinder // *AIAA Journal*, 1979, Vol. 17, № 11. – P. 1193-1200.
9. Wardlow A. B. Jr. Multivortex Model of Asymmetric Shedding Slender Bodies at High Angle of Attack // *AIAA Paper*, № 75-123, 1975.
10. Гумеров А.В. Расчет движения вихревой нити вокруг кругового цилиндра методом дискретных вихрей // *Известия КГАСУ*, 2015, № 4 (33), – С. 433-439.
11. Сэффмэн Ф.Дж. Динамика вихрей. – М.: Научный мир, 2000. – 375 с.

Gumerova L.V. – design-engineer

E-mail: leila_gumerova@list.ru

JSC Space Rocket Centre «Progress»

The organization address: 443009, Russia, Samara, Zemetsa st., 18

Gumerov A.V. – candidate of technical sciences, senior lecturer

E-mail: anvar_gumerov@list.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

The strength that occurs when driving vortex filament around a circular cylinder

Resume

In this paper we investigate the motion of free vortex filaments around a stationary circular cylinder. Tightness of the cylinder surface is provided by the placement of sources in the neighborhood of the points of the inner cylinder circuit. The power sources are determined by the condition of zero normal velocity in the circuit test points. This calculation model, in contrast to the method of discrete vortices does not introduce distortion tangential speed of the cylinder surface.

The rate of flow out of the cylinder calculated as by the complex potential of the potentials of the external and the inversion of the vortices. Thus in one case of the integrated capacity potential entered the central vortex, and no other. We construct the velocity field for these three cases. Based on a comparison of fields it is deemed to be the introduction of the complex potential flow capacity of the central vortex for real motion of the vortex filament in an ideal fluid.

Determined according to the total power per cylinder of the vortex filament, as the integration of surface pressure and pulse method at three different intensities of the central vortex. Calculations indicate the presence of a significant impact on the value of the central vortex of force.

Keywords: the theorem of a circle, source, impermeability surface, unsteady flow, velocity field, a vortex in a fixed point.

Reference list

1. Karafoli E. The aerodynamics of an airplane wing. – M.: AN SSSR, 1956. – 480 p.
2. Milne-Thomson L.M. Theoretical Hydrodynamics. – M.: Mir, 1964. – 670 p.
3. Gerrard J.H., Numerical Computation of the Magnitude and Frequency of the Lift on a Circular Cylinder // Phil. Trans. Roy. Soc., 1967, Vol. 261, № 1118. – P. 137-162.
4. Sarpkaya T. Lift, Drag and Added-Mass Coefficients for a Circular Cylinder Immersed in a Time-Dependent Flow // ASME Journal of Applied Mechanics, 1963, Vol. 85. – P. 13-15.
5. Sarpkaya T. An Analytical Study of Separated Flow About Circular Cylinders // ASME Journal of Basic Engineering, 1968, Vol. 90, – P. 511-520.
6. Gebert G.A. Determination of Slender Body Aerodynamics Using Discrete Vortex Methods // Journal of Spacecraft and Rockets, 1994, Vol. 31, № 2, March-April. – P. 200-207.
7. David H. Bridges, Hans G. Hornung. Elliptic Tip Effects on the Vortex Wake of an Axisymmetric Body of Incidence // AIAA Journal, 1994, Vol. 32, № 7. – P. 1437- 1445.
8. Sarpkaya, T., Schoaff, R. Inviscid Model of Two-Dimensional Vortex Shedding by a Circular Cylinder // AIAA Journal, 1979, Vol. 17, № 11. – P. 1193-1200.
9. Wardlow A. B. Jr. Multivortex Model of Asymmetric Shedding Slender Bodies at High Angle of Attack // AIAA Paper, № 75-123, 1975.
10. Gumerov A.V. Calculation of the movement of vortex filament around the circular cylinder using the method of discrete vortices // Izvestiya KGASU, 2015, № 4 (33). – P. 433-439.
11. Saffman P.G. Vortex dynamics. – M.: Nauchniy mir, 2000. – 375 p.