



УДК 539.3

Каюмов Р.А. – доктор физико-математических наук, профессор

E-mail: kayumov@gambler.ru

Шакирзянов Р.А. – кандидат технических наук, профессор

E-mail: rashitagl@mail.ru

Шакирзянов Ф.Р. – кандидат физико-математических наук, ассистент

E-mail: faritbox@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, Зеленая, д. 1

Богачев М.И. – кандидат технических наук, научный сотрудник

E-mail: rogex@yandex.com

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)

Адрес организации: 197376, С.-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5

Адаптация методов строительной механики к моделированию поведения челюсти с имплантатом¹

Аннотация

Предлагается методика определения предельной нагрузки, приложенной через имплантаты на нижнюю челюсть человека. Двусторонняя ее оценка проводится на основе статической и кинематической теорем теории предельного равновесия. В качестве критерия прочности материала челюсти принимается критерий Мизеса. Задача решается методом конечных элементов с использованием восьмиузлового изопараметрического трехмерного конечного элемента. Проводятся исследования предложенного метода с точки зрения сходимости по количеству элементов, шагов по времени и числа итераций при вычислении коэффициента предельной нагрузки.

Ключевые слова: механика, предельная нагрузка, метод конечных элементов.

Введение

Полное отсутствие зубов приводит к значительным морфофункциональным изменениям в челюстно-лицевой системе, а также к социальной дезадаптации человека. Среди людей, нуждающихся в зубном протезировании, доля пациентов с полным отсутствием зубов составляет 18 %, а в возрастной группе старше 60 лет достигает 25 %.

Для протезирования пациентов с полным отсутствием зубов в настоящее время предложено множество вариантов расположения дентальных имплантатов. Но в повседневной практике врачам-стоматологам и зубным техникам, занимающимся конструированием зубных протезов на имплантатах, приходится эмпирически решать инженерные задачи, не обладая четкими представлениями об особенностях деформирования протезов под нагрузкой, не имея результатов их расчетов на прочность и жесткость, без точного знания механических свойств и поведения опорных тканей зубочелюстной системы.

За последние десятилетия наметился поистине инженерный подход к созданию ортопедических конструкций, который предусматривает применение современных технических знаний: сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости и пластичности [1, 7, 9].

Анализ работ [11], посвященных изучению биомеханики различных протезных конструкций с опорой на дентальные внутрикостные имплантаты методом трехмерного математического моделирования, показал, что часто в данных работах моделировался лишь фрагмент какого-либо из отделов нижней челюсти, а результаты их исследований ограничивались лишь численным расчетом напряженно-деформированного состояния (НДС) в опорных тканях.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (Соглашение № 14.В37.21.2080).

Однако анализ источников [12] свидетельствует о существенном влиянии различных ортопедических конструкций с опорой на имплантаты на картину НДС всей нижней челюсти. Оклюзионная нагрузка на внутрикостный имплантат зависит от многих факторов: от количества и локализации имплантатов и естественных зубов, способа фиксации протезов с опорой на имплантаты, длины промежуточной части, характера окклюзионных контактов при жевании, состояния антагонистов и т.д. [8].

При планировании съемных протезов с опорой на имплантаты обоснование выбора расположения имплантатов в нижней челюсти почти не проводилось [6]. Кроме того, отсутствуют работы по определению предельной нагрузки, которую может выдержать нижняя челюсть, нагруженная через имплантаты. Научно обоснованный выбор конструкции и материалов несъемного протеза с опорой на дентальные имплантаты возможен на основе анализа НДС и предельной нагрузки системы имплантат-челюсть, что позволит создавать индивидуализированные ортопедические конструкции, которые обеспечат минимальный уровень интенсивности атрофических процессов в опорных тканях, наиболее адекватное биомеханическое взаимодействие на границе кость-имплантат.

1. Постановка задачи

Целью настоящего исследования является разработка методики оценки предельной нагрузки нижней челюсти с имплантатами на основе кинематической и статической теорем теории предельного равновесия.

Максимальная нагрузка q_* , которую может выдержать система «имплантат – нижняя челюсть», в данной работе определяется методом вариации упругих характеристик [3, 4, 5], который позволяет получать нижнюю и верхнюю оценки предельной нагрузки без привлечения обычно применяемого сложного математического аппарата, представляющего собой задачу минимизации некоторой функции цели при нелинейных ограничениях.

Пусть уравнение поверхности текучести имеет вид:

$$f(\{\sigma\}) = 1, \quad (1)$$

где $\{\sigma\}$ – вектор напряжений.

Из принципа максимума Мизеса (см. например [2, 13]) вытекает закон пластического течения:

$$d\{\varepsilon^p\} = d\mu \frac{\partial f(\{\sigma\})}{\partial \{\sigma\}}. \quad (2)$$

Здесь $d\mu$ – вектор, коллинеарный нормали к поверхности текучести (1).

В качестве критерия прочности (1) для челюсти и имплантата принимается обобщенный критерий Мизеса, который в матричной форме записывается в виде:

$$(\{\sigma\} - \{s\})^T [A] (\{\sigma\} - \{s\}) = 1, \quad (3)$$

где

$$s = \{s_1 \ s_1 \ s_1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$$

– вектор, определяемый координатами центра эллипсоида в пространстве напряжений, $s_1 = \frac{a_{11}(-\sigma_c + \sigma_p)}{2(a_{11} + 2a_{12})}$, $a_{11} = 1$, $a_{12} = -0,5$, $a_{44} = 3$, σ_p и σ_c – пределы прочности на растяжение и сжатие.

$$[A] = \frac{1}{k_f} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{12} & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix},$$

$$k_f = \frac{a_{11}(8a_{12}\sigma_c\sigma_p + a_{11}(3\sigma_c^2 - 2\sigma_c\sigma_p + 3\sigma_p^2))}{4(a_{11} + 2a_{12})}$$

Если матрица $[A]$ является неособенной, из соотношений (1) и (2) можно получить выражение для напряжений, удовлетворяющих соотношению (1):

$$\{\sigma_+\} = \frac{[A]^{-1}}{\sqrt{\{\xi\}^T [A]^{-1} \{\xi\}}} \{\xi\} + \{s\}, \tag{4}$$

где $\{\xi\} = \{\varepsilon\}/\Theta$ – вектор скорости пластических деформаций, Θ – константа размерности «времени», описывающего процесс деформирования.

Согласно статической теореме, напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия и не выходить за пределы поверхности текучести. В теории предельного равновесия статическая теорема может быть записана в виде:

$$\int_{\Omega} \{\sigma_-\}^T \{\xi^+\} d\Omega \leq \int_{\Omega} \{q_*\}^T \{u_*^+\} d\Omega + \int_S \{P_*\}^T \{u^+\} dS, \tag{5}$$

где $\{q_*\}, \{P_*\}$ – компоненты объемных и поверхностных предельных нагрузок, $\{u^+\}, \{\xi^+\}$ – кинематически возможные поля скоростей перемещений и скоростей пластических деформаций.

Запишем уравнение равновесия в операторной форме:

$$L(\{\sigma\}) = \{Q^*\}, \tag{6}$$

где нагрузка $\{Q^*\}$ имеет вид:

$$\{Q^*\} = \{Q_c\} + \{Q_o\}\theta.$$

Здесь $\{Q_c\}$ – постоянная нагрузка (например, удельный вес), $\{Q_o\}$ – внешняя нормированная нагрузка, θ – параметр нагрузки.

Чтобы свести задачу к случаю равнопрочного материала, введем обозначение [4, 5]:

$$\{\tau_0\} = \frac{\{\sigma\} - \{s\}}{\theta} \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$L(\{\tau_0\}) = \frac{\{q_c\}}{\theta} + \{q_0\} - \frac{L(\{s\})}{\theta}. \tag{8}$$

Напряжения не должны выходить за пределы поверхности текучести, но можно допустить, что в некоторой точке они могут выйти на поверхность текучести. В этом случае нижняя граница коэффициента предельной нагрузки будет определяться соотношением [3-5]:

$$\theta_- \cdot \max_x \sqrt{f(\{\tau_0\})} = 1. \tag{9}$$

Таким образом, задача отыскания коэффициента предельной нагрузки снизу θ_- сводится к системе нелинейных уравнений (8), (9) относительно перемещений. Решать эти уравнения удобно методом простых итераций.

Однако матрица $[A]$ в традиционном критерии Мизеса, применимом в случае равнопрочных материалов, является особенной. Поэтому при вычислении $[A]^{-1}$ в уравнении (4) воспользуемся тем, что при оценке предельной нагрузки снизу можно выбирать любые поверхности, вложенные в исходную. Поэтому в численном эксперименте было принято чуть измененное значение $a_{12} = -0,45$.

Согласно [3-5], результаты, полученные при определении нижней границы, можно использовать для отыскания верхней границы θ_+ . В соответствии с кинематической теоремой, верхняя граница коэффициента предельной нагрузки θ_+ может быть вычислена как отношение работы пластических деформаций к работе внешних сил:

$$\theta_+ = \frac{W}{U} = \frac{\int_{\Omega} \{\sigma_+\}^T \{\varepsilon^+\} d\Omega - \int_{\Omega} \{q_c\}^T \{u^+\} d\Omega}{\int_{\Omega} \{q_0\}^T \{u^+\} dS}, \tag{10}$$

где $\{\sigma_+\}$ определяется соотношениями (4).

2. Решение модельной задачи

Рассматривается задача оценки предельного состояния несущей способности нижней челюсти с четырьмя имплантатами (рис. 1).

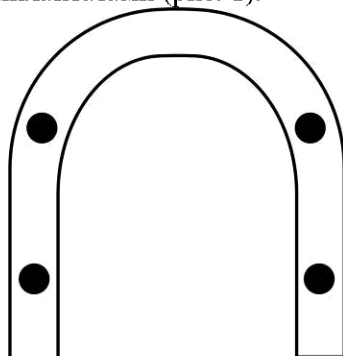


Рис. 1. Модельная задача

Костная ткань и имплантат из никель-титанового сплава рассматриваются как однородные изотропные материалы с известными свойствами. Так как имплантат вкручивается в кость нижней челюсти по резьбе, принимается, что кость и имплантат связаны жестко. Граничные условия закрепления нижней челюсти по концам принимаются в виде заделок. Считается, что нагрузка на челюсть передается через имплантаты. Физико-механические свойства материалов приведены в таблице.

Таблица

Физико-механические свойства материалов [8]

Материал	Модуль упругости E , [МПа]	Коэффициент Пуассона ν	Предел прочности $[\sigma]$, [МПа]
Никель-титановый сплав	$1,12 \times 10^5$	0,33	280
Кортикальный слой кости	$2,0 \times 10^4$	0,3	45

Задача определения предельной нагрузки для нижней челюсти с имплантатами решалась методом конечных элементов (МКЭ), в котором разрешающее уравнение получается путем дискретизации объекта расчета и его разбиения на конечные элементы (КЭ). Так как геометрия нижней челюсти в плане имеет подковообразную форму, а в поперечном сечении – местами форму гантели, местами эллиптическое очертание, была разработана методика разбиения объекта исследования на КЭ по заданным размерам челюсти и имплантатов при разных вариантах расположения имплантатов.

Для решения задачи была разработана компьютерная программа расчета, написанная на языке C++. В рамках этой программы реализованы восьмиузловой КЭ, процедуры описания геометрии челюсти с имплантатами, ее разбиения на конечные элементы и алгоритм расчета МКЭ. Кроме того, реализована постпроцессорная процедура аппроксимации напряжений методом сопряженных функций [10].

Из-за большой разницы модулей упругости кости и имплантата, напряжения, получаемые на их границе, сильно различаются. Поэтому аппроксимация проводилась для каждой подобласти отдельно.

Процедура визуализации позволяет просматривать поля напряжений и деформаций, устанавливать наиболее напряженные участки объекта исследования.

На рис. 2 представлен график сходимости коэффициента предельной нагрузки снизу и сверху в зависимости от числа итераций.

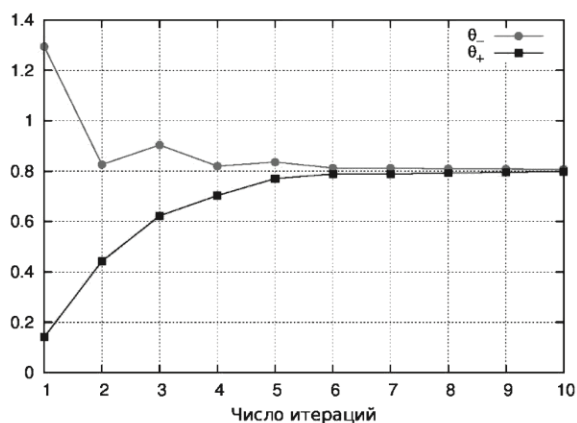


Рис. 2.

При численном анализе были проведены исследования предложенного метода с точки зрения сходимости по количеству элементов, числу итераций при вычислении коэффициента предельной нагрузки θ . Оптимальными считались такие их значения, при которых дальнейшее удвоение приводило к изменению НДС и значений θ_- , θ_+ не более чем на 1%. Некоторые рекомендации по выбору параметров итерационного процесса вычисления предельной нагрузки можно найти в работах [3-5].

На рис. 3 представлена диаграмма распределения скоростей перемещений в предельном состоянии, полученная численным методом.

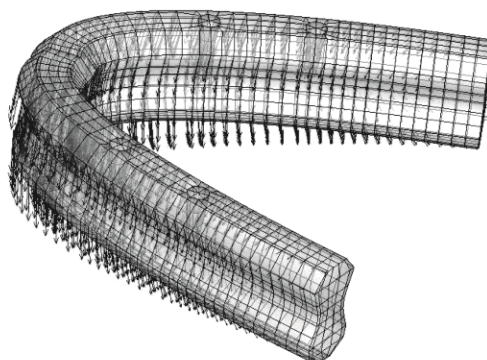


Рис. 3.

На рис. 4 дана картина распределения функции (1), определяющей уровень напряженного состояния при установке двух имплантатов в каждой (левой и правой) половине челюсти.

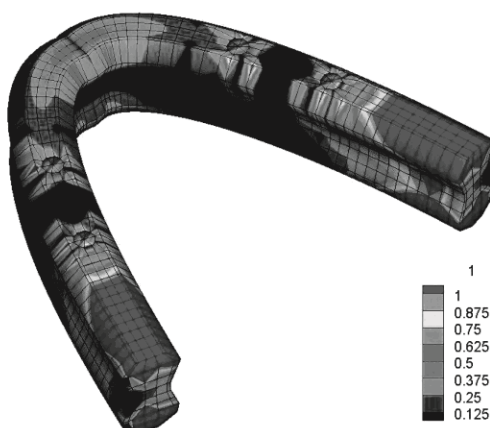


Рис. 4.

Выводы

Ввиду сложности геометрии объекта, программа расчета позволяет автоматизировать процесс построения конечноэлементной упрощенной модели челюсти по нескольким геометрическим характеристикам. Изменение расположения имплантатов, геометрии имплантатов и разбивка на КЭ также осуществляются достаточно просто. Поэтому построенная трехмерная математическая модель позволяет учитывать основные геометрические особенности внутреннего строения нижней челюсти пациента.

Созданная методика открывает возможности изучения НДС и предельной нагрузки костной ткани нижней челюсти человека в зависимости от количества, местоположения и способа нагружения зубных имплантатов. Поэтому она может быть с успехом применена для решения конкретных задач по определению оптимального количества и мест установки дентальных имплантатов нижней челюсти человека.

Список литературы

1. Воробьев В.А., Ратинер Т.М. Атлас напряженных состояний дентальных имплантатных систем. – Ангарск, 1997. – 40 с.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969.
3. Каюмов Р.А. Метод вариации упругих характеристик в задаче о предельной нагрузке // Журнал ПМТФ, 1990, № 3. – С. 134-139.
4. Каюмов Р.А. Об одном методе двусторонней оценки предельной нагрузки // Проблемы прочности, 1992, № 1. – С. 51-55.
5. Каюмов Р.А. Об оценке несущей способности конструкции при произвольных условиях текучести // Журнал ПМТФ, 1993, № 1. – С. 115-120.
6. Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Хафизов Р.Г., Хайдаров И.Р., Миргазизов Р.М. Расчет напряженно-деформированного состояния челюсти с имплантатом // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: Труды Второй международной конференции. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – С. 201-203.
7. Лазарев С.А. Изучение распределения внутренних напряжений в зубах и имплантате в конструкциях мостовидного протеза // Росс. Вестн. Дент. Имплантол, 2005, № 1/2 (9/10). – С. 34-36.
8. Матвеева А.И., Борисов А.Г., Гаврюшин С.С. Планирование ортопедического лечения больных с дефектами зубных рядов верхней челюсти с использованием математических методов // Стоматология, 2002, Т. 81, № 5. – С. 53-57.
9. Миргазизов Р.М., Изаксон М.В. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния дентальных имплантатов и окружающей их костной ткани при неточной посадке литых каркасов. // Росс. Вестн. Дент. Имплантол, 2003, № 3/4.
10. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
11. Олесова В.Н., Балгурина О.С., Мушугев И.У., Перевезенцев А.П., Кравченко В.В., Разумный В.А., Маркин В.А. Характеристика напряженно-деформированного состояния в кортикальной костной ткани вокруг опорных зубов и под базисом малого седловидного протеза // Стоматология, 2003, № 1. – С. 55-60.
12. Ревякин А.В., Лебедеко И.Ю., Кирюшин М.А. Анализ напряженно-деформированного состояния системы беззубая нижняя челюсть – полный съемный протез с частичной опорой и фиксацией на имплантатах // Маэстро стоматологии, 2005, № 18. – С. 35-42.
13. Терегулов И.Г., Каюмов Р.А., Сибгатуллин Э.С. Расчет конструкции по теории предельного равновесия. – Казань: Фэн, 2003. – 180 с.

Kaiumov R.A. – doctor of physical and mathematical sciences, professor

E-mail: kayumov@rambler.ru

Shakirzyanov R.A. – candidate of technical sciences, professor

E-mail: rashitagl@mail.ru

Shakirzyanov F.R. – candidate of physical and mathematical sciences, assistant

E-mail: faritbox@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Bogachev M.I. – candidate of technical sciences, scientist

E-mail: rogex@yandex.com

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

The organization address: 197376, Russia, St. Petersburg, Professora Popova st., 5

Adopting the methods of structural mechanics to the model behavior of the jaw with implants

Resume

A method of definition the limit load applied through the implants to the lower jaw is developed. Double-sided estimate is based on the static and cinematic theorems of limit equilibrium. Maximum load the system can be withstand in this paper is defined by the method of variation of the elastic characteristics, which allows to obtain upper and lower bounds of the limit load without using commonly used complex mathematical apparatus, which is a minimization problem some objective function with nonlinear constraints. The criterion of the material strength of jaw accepted the criterion of Mizes. The problem is solved by finite element method using isoparametric three dimensional finite elements with eight nodes. Developed the technique of splitting the object of research into finite elements given the dimensions of the jaw and implants at various options for the location of implants. The proposed method is studied from the point of view of convergence in the number of elements, of time steps and the number of iterations in the calculation of the limit load factor.

Keywords: mechanics, limit load, finite element method.

References

1. Vorobiev V.A., Ratiner T.M. Atlas stressed states of systems of dental implants. – Angarsk, 1997. – 40 p.
2. Kachanov L.M. The basis of plasticity theory. – M.: Nauka, 1969. – 420 p.
3. Kayumov R.A. The method of variation of the elastic characteristics of the problem of limit load // Journal of applied mechanics and technical physics, 1990, № 3. – P. 134-139.
4. Kayumov R.A. A method of two-sided estimate of the limit load // Problems of strength, 1992, № 1. – P. 51-55.
5. Kayumov R.A. An estimate of the carrying capacity of construction under the arbitrary strength conditions // Journal of applied mechanics and technical physics, 1993, № 1. – P. 115-120.
6. Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Hafizov R.G., Haydarov I.R., Mirgazizov R.M. The calculation of the stress-strain state of the jaw with implants // Problems of nonlinear solid mechanics: Proceedings of the second international common conference. – Kazan: Kazan. State. University Press, 2009. – P. 201-203.
7. Lazarev S.A. Study of the distribution of internal stresses in the teeth and implant in the construction of bridges // Ross. Vestn. Dent. Implantol, 2005, № 1/2 (9/10). – P. 34-36.
8. Matveeva A.I., Borisov A.G., Gavryushin S.S. Planning for orthopedic treatment of patients with defects of dentition in the upper jaw using the mathematical methods // Dentistry, 2002, V. 81, № 5. – P. 53-57.

9. Mirgazizov R.M., Isaacson M.V. Finite element analysis of the stress-strain state of dental implants and the surrounding bone tissue inaccurate landing cast frames // *Ross. Vestn. Dent. Implantol*, 2003, № 3/4.
10. Obrazcov I.F., Savelyev L.M., Khazanov H.S. The finite element method in problems of structural mechanics of aircraft. – M.: High school, 1985. – 392 p.
11. Olesova V.N., Balgurina O.S., Mushuev I.U., Perevezentsev A.P., Kravchenko V.V., Razumnii V.A., Markin V.A. Characteristics of stress-strain state in the cortical bone around abutment teeth and under the basis of small saddle prosthesis // *Dentistry*, 2003, № 1. – P. 55-60.
12. Revyakin A.V., Lebedenko I.J., Kiryushin M.A. Analysis of the stress-strain state of a toothless lower jaw – complete denture with partial support and fixation in implants // *Maestro dentistry*, 2005, № 18. – P. 35-42.
13. Teregulov I.G., Kayumov R.A., Sibgatullin E.S. Structural analysis on the theory of limiting equilibrium. – Kazan: Fen, 2003. – 180 p.