УДК 532.5:621.694:519.6
Горская Т.Ю. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: tatyana_gorskaya@mail.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1
Ожегова А.В. – кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: Alla.Ozhegova@ksu.ru
Казанский (Поволжский) федеральный университет
Адрес организации: 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

О сходимости проекционного метода для уравнения задачи движения

Аннотация

В работе проведен анализ существующих подходов к решению задачи движения в осесимметричных каналах. Представлены результаты по теоретическому обоснованию численного решения уравнения для задачи движения и получена оценка сходимости приближенного решения к обобщенному решению исходной задачи по метрике энергетического пространства в терминах наилучшего среднеквадратического приближения.

Ключевые слова: краевые задачи, численные методы, обобщенное решение, скорость сходимости приближенного метода.

Введение

Создание высокоэффективного производства требует больших научно-исследовательских и инженерно-технических вложений, которые, в свою очередь, связаны с большими капиталовложениями. Важной задачей при этом является сокращение стоимости и сроков исследований. Математическое моделирование с последующим теоретическим обоснованием в научных исследованиях является одним из перспективных направлений решения поставленной задачи. Главным требованием, предъявляемым к созданию математической модели того или иного процесса, является то, чтобы она не была громоздкой, но максимально отражала реальный объект. Выбор подхода к созданию модели будет определяться квалификацией исследователя и наличием технического оборудования.

Следует отметить, что краевую задачу течения вязкой жидкости решают, используя два подхода:

- традиционный – в терминах скорость-давление;
- с применением так называемых функций вихря и тока.

В традиционном подходе неизвестные компоненты скоростей и давления находятся непосредственно из решения краевой задачи, состоящей из системы уравнений Навье-Стокса, уравнения неразрывности и физически обоснованных граничных условий. В этой постановке при нахождении поля скоростей исключают компоненты давления, это приводит к увеличению порядка старших частных производных в дифференциальных уравнениях, что представляет сложность при интегрировании.

Во втором подходе вводятся новые переменные – функций вихря в виде $\vec{w} = rot\vec{v}$, где $\vec{w}$ – вектор-функция вихря, $\vec{v}$ – вектор скорости и тока, который определяется из уравнения неразрывности: $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, при этом последнее будет исключено из системы уравнений. Кроме того, введением новой переменной понижается порядок дифференциальных уравнений. Однако, отмечая несомненные преимущества этого подхода, его применение может иметь некоторую сложность, связанную с определением граничных условий, поскольку поведение функции вихря на границе часто бывает неизвестно.

При рассмотрении конкретных задач гидродинамики в той или иной постановке всегда актуальны вопросы преодоления нелинейности системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса. В настоящее время известны различные методы их линеаризации [1-4]. Известен [2] способ линеаризации, основанный на использовании процесса итерации, где нелинейный член заменяется значением, полученным из предыдущей итерации. В некоторых случаях линеаризация уравнения осуществляется путем замены нелинейного члена неким средним значением функции на интервале интегрирования. При постановке математических моделей гидродинамики широко используют линеаризации Буссинеска, Стокса [3], Озеена [4]. Так, в приближениях Стокса полностью пренебрегают конвективной частью, а в приближении Озеена конвективная часть учитывается лишь частично. Но по сравнению с линеаризацией Стокса она все же имеет несомненное преимущество, т.к. учитывает влияние конвективных сил инерции [4]. В приближениях Буссинеска пользуются приемом осреднения, заменяя истинное, беспорядочное движение частиц прямолинейным фиктивным движением, что упрощает конвективную часть, делая ее линейной.

Постановка задачи с последующей ее линеаризацией влечет за собой вопрос о корректности исходной задачи, т.е. о существовании, единственности и устойчивости решения.

Теоретическому обоснованию существования и единственности решения краевых задач посвящено много работ, например, [5-7]. Этим вопросом занимались О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Е. Хопф, И.Ж. Хейвурд, Р. Темам.

В конце пятидесятых годов было доказано, что для стационарных краевых задач имеется по крайней мере одно «хорошее» решение для чисел Рейнольдса, соответствующих ламинарному течению [5], если выполнено условие:

$$\int_S \vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{n}}dS = 0, \tag{1}$$

где v – вектор скорости, n – нормаль к S, S – граница области Ω. Если область Ω содержит бесконечно удаленную точку, то ставится дополнительное условие: $\mathrm{v} \to \mathrm{v}^{\infty}$.

Е. Хопф доказал, что в силу выполнения условия $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, искомый вектор скорости v должен удовлетворять (1), так как справедливо равенство $\int_S \vec{\mathrm{v}}\vec{\mathrm{n}}dS = \int_\Omega \mathrm{div}\vec{\mathrm{v}}dV$, следовательно, интеграл (1) будет равен нулю.

Позднее для решения краевых задач математической физики был предложен функциональный метод [6], опирающийся на простую аналитическую основу – оценку интеграла Дирихле для искомого решения *v*. Важным элементом этого метода было своеобразное исключение давления p и редукция всей задачи к нахождению только поля скоростей *v* (давление p определялось непосредственно из системы Навье – Стокса после того, как найдено $\vec{v}$). Для этого было введено гильбертово пространство H(Ω), являющееся замыканием всех гладких соленоидальных векторных полей, имеющих компактные носители, лежащие в Ω, и с нормой, соответствующей скалярному произведению:

$$\left(\vec{u}, \vec{v}\right)_H = \int_\Omega \vec{u}_x \vec{v}_x\, dx \equiv \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} \vec{u}_{ix_k} \vec{v}_{ix_k}\, dx,$$

где n – размерность евклидова пространства R^n.

Метод, рассмотренный в [6], позволил исследовать и ряд задач для произвольных неограниченных областей.

Для случая трехмерного пространства И.Ж. Хейвурдом [7] было обоснованно существование обобщенного решения для нестационарных систем Навье-Стокса. В качестве функционального пространства рассматривалось пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$. Для плоских или осесимметричных задач [4] установлено существование и единственность решения в функциональном классе «обобщенных решений».

В данной статье для решения представленной задачи в традиционной постановке применяется аппроксимативный метод. Для доказательства существования и единственности приближенного решения, полученного по методу Галеркина, используется общая теория приближенных методов анализа, метод монотонных операторов и методика доказательства, предложенная в [10].

Постановка задачи

Известно [3], что задача движения вязкой жидкости в заданном канале описывается уравнениями Навье-Стокса, которые для их теоретического исследования удобно представлять ее в векторном виде:

$$-\Delta V + (V\cdot\nabla)V = F - \nabla p,$$
$$divV = 0,\ \text{для}\ V\in\Omega,\ V = 0,\ \text{для}\ V\in\partial\Omega. \qquad (2)$$

Здесь V – вектор скорости, p-вектор давления, F – вектор массовых сил, область Ω – осесимметричный канал, конечной длины, образованный вращением дуги плоской кривой.

Запишем уравнение (2) в операторном виде:

$$Lv \equiv Av + Bv = f,\ f\in L_2(\Omega),\ v\in W_2^2(\Omega),\ L: W_2^2\to L_2, \qquad (3)$$

где $L_2(\Omega)$ – пространство квадратично-суммируемых функций, со скалярным произведением и нормой соответственно:

$$(\varphi,\psi)=\int_\Omega \varphi(x)\psi(x)dx,\quad \|\varphi\|_2=\left\{\int_\Omega |\varphi(x)|^2\,dx\right\}^{1/2},\quad \varphi,\psi\in L_2(\Omega),$$

$W_2^2(\Omega)$ – пространство Соболева, т.е. пространство функций, имеющих вторую обобщенную производную из пространства $L_2(\Omega)$. Норма в пространстве $W_2^2(\Omega)$ определяется равенством $\sqrt{(u,u)_{W_2^2}}=\left\{\int_\Omega \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} D_x^k u D_x^j u dx\right\}^{1/2}$, где D_x^k – дифференциальный оператор k-го порядка. Здесь A – оператор Лапласа, симметричный, положительно определенный оператор, т.е. для которого выполняется неравенство $(Av,v)\ge\gamma^2\|v\|_{W_2^2}^2$, $\gamma\ne 0$, оператор B – дифференциальный оператор первого порядка вида $(\circ, D_x^1\circ)$.

Введем энергетическое пространство H_A, порождаемое оператором A. В области определения $D(A)=\left\{u: u\in W_2^2(\Omega), divu=0, u|_{\partial\Omega}=0\right\}$ введем скалярное произведение и норму соответственно, $[u,u]=(Au,u)$, $[u]=[u,u]^{1/2}$. Пополняя $D(A)$ по норме, приходим к полному гильбертову пространству H_A, называемому энергетическим пространством.

Назовем, согласно [8], обобщенным решением уравнения (3) функцию $v\in H_A$, удовлетворяющую соотношению $(Av,u)+(Bv,u)=(f,u)$ для любых функций $u\in H_A$.

Метод Галеркина и его сходимость

Рассмотрим задачу гидродинамики для системы уравнений (2) в области $\Omega=\{(\bar r,\bar z): 0<\bar r<R(\bar z), 0<\bar z<m\}$. Параметры вектора скорости и давление находятся согласно [9] в виде: $v_r=u_0\psi(z,r)$, $v_\varphi=\omega r\varphi(z,r)$, $v_z=u_0H(z,r)$, $p-p_0=\rho u_0^2F(z,r)/\mathrm{Re}$, где $\mathrm{Re}=d_э u_0/\nu$ – число Рейнольдса; $d_э=4\cos\gamma(r_0^3-R_0^3)/(3(r^2{}_0-R^2{}_0))$ – эквивалентный диаметр трубы; $\bar r=r/r_0$, $\bar z=z/L$, $\widetilde R(\bar z)=R(\bar z)/d_э$ – безразмерные переменные; $\bar R_0=r_0/L$, $\widetilde R_0=r_0/d_э$ – безразмерные константы. $N=\omega r/u_0$ – число закрутки, $R(\bar z)=1+(-1)^n\bar z tg\gamma/\bar R_0$, где n=0 в случае диффузора и n=1 в случае конфузора [9].

Граничные условия определяются в виде:

$$\bar z=0,\ \psi=0,\ \phi=0,\ H=1,\ F=0,\ \frac{\partial F}{\partial\bar z}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\bar z}=0,\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar z}=0,$$
$$\bar r=0,\ \psi=0,\ \phi=0,\ \frac{\partial H}{\partial\bar r}=0,\ \frac{\partial F}{\partial\bar r}=0;$$
$$\bar r=R(\bar z),\ \psi=0,\ \phi=1,\ H=0.$$

Введем систему алгебраических функций:

$$g_{jk}(\bar{r},\bar{z})=\begin{cases}\bar{z}^{j}\bar{r}^{k},(\bar{r},\bar{z})\in\Omega;\\0,(\bar{r},\bar{z})\notin\Omega.\end{cases}\tag{4}$$

Неизвестные функции ψ,ϕ,H,F будем искать в виде:

$$\begin{aligned}\psi_N(\bar{r},\bar{z})&=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{kj}\bar{z}^{j}\bar{r}^{k}, & \phi_N(\bar{r},\bar{z})&=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{kj}\bar{z}^{j}\bar{r}^{k},\\ H_N(\bar{r},\bar{z})&=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\gamma_{kj}\bar{z}^{j}\bar{r}^{k}, & F_N(\bar{r},\bar{z})&=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\theta_{kj}\bar{z}^{j}\bar{r}^{k},\end{aligned}\tag{5}$$

где $\alpha_{kj},\beta_{kj},\gamma_{kj},\theta_{kj}$ – неизвестные коэффициенты, которые найдем из условия равенства нулю момента невязки по системе функций (4).

Это условие эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую, в свою очередь, можно представить в операторном виде:

$$P_N L v_N = P_N f,\;\; v_N\in X_N\subset W_2^2(\Omega),\;\; P_N: L_2(\Omega)\to X_N,\tag{6}$$

где P_N – линейный проекционный оператор, X_N – подпространство элементов вида (5).

Установлена следующая теорема.

Теорема. Пусть уравнение (2) имеет единственное обобщенное решение. Тогда при достаточно больших натуральных N аппроксимирующее уравнение (6) однозначно разрешимо и приближенные решения v_N, сходятся по норме H_A к обобщенному решению v со скоростью $[v_N - v]=O\{E_N(L^{-1}f)\}$, где $E_N(\varphi)$ – наилучшее среднеквадратическое приближение функций φ элементами вида (5).

Список литературы

1. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. – М.: Мир, 1988. – 544 с.
2. Никитенко Н.И., Кольчик Ю.Н., Сороковая Н.Н. Метод конечных элементов для моделирования течения и теплообмена несжимаемой жидкости в областях произвольной формы. // Пром. Теплоэнергетика, 2002, № 1. – С. 16-23.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973, Т. 2. – 584 с.
4. Белоносов С.М., Черноус К.А., Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
5. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
6. Ладыженская О.А. Исследование уравнений Навье-Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости. // УМН, 1958, (13), – С. 219-220.
7. Heywood I.G. On uniqueness in the theory of viscous flow. // Asta math. (Uppsala), 1976, V. 136, № 1, 2. – P. 61-102.
8. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
9. Горская Т.Ю. Гидродинамика ламинарного течения вязкой жидкости в теплообменных устройствах с вращающейся поверхностью типа «конфузор-диффузор». Дис…канд. техн. наук. – Казань, 2004. – 110 с.
10. Габдулхаев Б.Г. Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений. // Известия вузов. Математика, 2004, № 7. – С. 12-24.

Gorskaya T.Iu. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: tatyana_gorskaya@mail.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1
Ozhegova A.V. – candidate of physical-mathematical sciences, associate professor
E-mail: Alla.Ozhegova@ksu.ru
Kazan (Volga) Federal University
The organization address: 420008, Russia, Kazan, Kremlevskaya st., 18

On the convergence of the projection method for an equation of the goals of the movement

Resume

Work is devoted to theoretical justification with the subsequent numerical solution of a problem of movement. This research is conducted within hydrodynamics studying in axisymmetric channels for the purpose of creation of channels for the highly effective heat exchange equipment. The mathematical apparatus allows to find out the hydrodynamic picture arising in flowing channels of various configurations for optimization of a profile of channels, for the purpose of improvement of a hydrodynamic picture. In work the approximate solution of the equation of Navier-Stokes is investigated. As functional space the space of the functions possessing the second generalized derivative from a class of square and summable functions is taken. The analysis of existing approaches to justifications and solutions of the initial equation is submitted. Using a method of monotonous operators, the general theory of approximate methods, existence and uniqueness of the approximate decision received by a projective method is established. The power space in which scalar work and norm were set was entered for this purpose. Convergence of the approximate decision to the exact decision on norm of power space in terms of the best mean square approach is proved.

Keywords: regional tasks, numerical methods, generalized solution, speed of convergence of an approximate method.

References

1. Shi D. Numerical methods in problems of heat exchange. – M.: World, 1988. – 544 p.
2. Nikitenko N.I., Kolchik Yu.N. The fortieth H.H. Method of final elements for modeling of a current and heat exchange of incompressible liquid in areas any form. // Prom. Power system, 2002, № 1. – P. 16-23.
3. Sedov L.I. Mekhanika's sets of the continuous environment. – M.: Science, 1973. T. 2. – 584 p.
4. Belonosov S.M., Chernous K.A. Regional tasks for Navier's Equations-Stokes. – M: Science, 1985. – 312 p.
5. Ladyzhensky Lake. And. Mathematical questions of dynamics of viscous liquid. – M: Science, 1970. – 288 p.
6. Ladyzhensky O.A. Issledovaniye of Navier's equations-Stokes in case of stationary movement incompressible fluid. // UMN, 1958, (13). – P. 219-220.
7. Heywood I.G. On uniqueness in the theory of viscous flow. – Asta math. (Uppsala). 1976, V. 136, № 1, 2. – P. 61-102.
8. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction in proyektsionno-net methods. – M.: Science, 1981. – 416 p.
9. Gorskaya T.Ur. Hydrodynamics of laminar flow of viscid liquid in heat-exchange devices with the revolved surface of type «contractor-diffuser». Diss. Kand. tech. sciences. – Kazan, 2004. – 110 p.
10. Gabdulkhaev B.G. Projection methods for solving singular integral equations. // Izvestiya universities. Mathematics, 2004, № 7 – P. 12-24.