

УДК 532.5:621.694

Багоутдинова А.Г. – кандидат технических наук, доцент

E-mail: bagoutdinova@rambler.ru

Золотосов Я.Д. – доктор технических наук, профессор

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

Математическая модель сопряженной задачи теплообмена при турбулентном течении в каналах сложной геометрии

Аннотация

Работа посвящена разработке математической модели гидродинамики и теплообмена при турбулентном течении жидкости в каналах сложной конфигурации. Предложенная математическая модель основана на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, энергии и уравнения теплопроводности стенок канала. Для замыкания системы уравнений Рейнольдса выбрана двухпараметрическая модель турбулентности Ментера с учетом геометрии рассматриваемого канала. Предложены подстановки, позволившие записать исходную систему уравнений в безразмерном виде и преобразовать физическую область течения с криволинейными границами в область с прямолинейными границами.

Ключевые слова: математическая модель, граничные условия, турбулентное течение.

1. Основные уравнения

В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 (с осью x_3 вдоль канала) уравнения Рейнольдса несжимаемой жидкости с замыканием по гипотезе Буссинеска записываются в виде [1]:

$$\begin{aligned} \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \\ v_j \frac{\partial t_{sc}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left((a + a_t) \frac{\partial t_{sc}}{\partial x_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial t_c}{\partial x_j} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где v_i ($i=1,2,3$) – осредненные компоненты вектора скорости в декартовой системе координат; k – кинетическая энергия турбулентности; μ – динамическая вязкость; μ_t – турбулентная вязкость; p – осредненное давление; t_{sc} – осредненная температура жидкости; t_c – температура стенки; a – коэффициент теплопроводности.

Здесь $a_t = \frac{\mu_t}{\rho Pr_t}$, где Pr_t – турбулентный аналог числа Прандтля, обычно полагаемый равным константе ($Pr_t = 0,9$).

В системе уравнений (1) и далее подразумевается суммирование по дважды повторяемому в одночленах индексу.

Система уравнений (1) является незамкнутой. Для замыкания системы уравнений (1) необходимо привлечь соотношения, позволяющие находить μ_t и k . При этом модель, их описывающая, должна быть относительно простой, что важно при расчете сложных пространственных течений. В то же время она должна быть справедлива как для полностью развитых турбулентных течений, так и для течений в пристеночных областях. Наиболее подходящей с точки зрения данных требований является хорошо зарекомендовавшая себя в последнее время модель Ментера [2]. Эта модель была предложена Ментером в 1993 году и на сегодняшний день, по совокупности своих качеств, является одной из лучших среди существующих моделей турбулентности, базирующихся на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса [1].

Модель Ментера представляет собой комбинацию $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей, обеспечивающих сочетание лучших качеств этих давно известных моделей. Так, $k-\varepsilon$

модель хорошо зарекомендовала себя при расчете свободных и струйных сдвиговых течений, а $k-\omega$ модель обеспечивает существенно более точное описание пристеночных пограничных слоев. С учетом этих обстоятельств, Ментером было предложено объединить модели с использованием специально сконструированной для этого эмпирической функции F_1 , обеспечивающей плавный переход от $k-\omega$ модели в пристеночной области к $k-\varepsilon$ модели вдали от стенки. Таким образом, модель Ментера записывается путем суперпозиции моделей $k-\varepsilon$ и $k-\omega$, помноженных соответственно на весовую функцию F_1 и $(1-F_1)$. Функция F_1 конструируется таким образом, чтобы быть равной единице на верхней границе пограничного слоя и стремиться к нулю при приближении к стенке.

Модель, записанная в терминах k (кинетическая энергия турбулентности) и ω (удельная скорость диссипации), записывается в виде:

$$\rho v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \quad (2)$$

$$\rho v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \gamma \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1-F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad (3)$$

где

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Эмпирические константы модели определяются через соответствующие константы $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей с помощью весовой функции F_1 :

$$\sigma_k = F_1 \sigma_{k1} + (1-F_1) \sigma_{k2}, \quad \sigma_\omega = F_1 \sigma_{\omega 1} + (1-F_1) \sigma_{\omega 2}, \quad \beta = F_1 \beta_1 + (1-F_1) \beta_2, \quad \gamma = F_1 \gamma_1 + (1-F_1) \gamma_2.$$

Индексы «1» и «2» в (8) относятся соответственно к константам $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей:

$$\sigma_{k1} = 0,5, \quad \sigma_{\omega 1} = 0,5, \quad \beta_1 = 0,075, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}},$$

$$\sigma_{k2} = 1, \quad \sigma_{\omega 2} = 0,856, \quad \beta_2 = 0,0828, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}},$$

а остальные константы равны: $\beta^* = 0,09$, $\kappa = 0,41$.

Весовая функция определяется следующим образом:

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right], \quad CD_{k\omega} = \max \left(2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20} \right).$$

Здесь y – расстояние от рассматриваемой точки до ближайшей точки твердой поверхности (стенки).

Член \arg_1 , очевидно, стремится к нулю по мере удаления от твердой стенки, поскольку выражения типа y^{-1} и y^{-2} присутствуют во всех его составляющих.

Для определения турбулентной вязкости по известным значениям k и ω в модели Ментера используется не стандартное соотношение $\mu_t = \rho k / \omega$, а выражение, базирующееся на известной гипотезе Брэдшоу [3] о пропорциональности напряжения сдвига в пристеночной части пограничного слоя энергии турбулентных пульсаций:

$$\mu_t = \frac{\rho a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)} = \rho \frac{k}{\max(\omega, S F_2 / a_1)},$$

где $a_1 = 0,31$, $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ – инвариант тензора скоростей деформации S ,

$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ – компоненты тензора скоростей деформации, $\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$,

$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ – компоненты тензора завихренности. Эмпирическая функция F_2

рассчитывается по формуле: $F_2 = \tanh(\arg_2^2)$, где $\arg_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right)$.

Для однозначной разрешимости системы уравнений (1)-(3) запишем граничные условия:
– на входе в канал:

для скорости: $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = u_0$ (Здесь $u_0 = Q/S$, где Q – расход жидкости, S – площадь входного сечения в канале);

для температуры жидкости $t_{жс} = t_0$; для температуры стенки $t_c = t_0$;

для кинетической энергии турбулентности и ее удельной диссипации $\omega = C \frac{u_0}{r_0}$,

$\nu_t = 10^{-3} \nu$ (ν – кинематическая вязкость), $k = \nu_t \omega$, где рекомендованные в [2] значения константы C лежат в диапазоне $1 \div 10$; для давления $p = p_0$;

– на выходе:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial t_{жс}}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial k}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial \omega}{\partial x_3} = 0; \quad (4)$$

– на внутренней стенке:

для скорости – условия прилипания $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$;

для удельной диссипации $\omega = 10 \frac{6\nu}{\beta_1 \Delta y^2}$; для кинетической энергии турбулентности

$k = 0$; для температуры $t_{жс} = t_c$, $\lambda_{жс} \frac{\partial t_{жс}}{\partial n} = \lambda_c \frac{\partial t_c}{\partial n}$, где n – нормаль к стенке,

$\beta_1 = 0,075$, а Δy – величина первого пристеночного шага сетки [2];

– на внешней стенке:

для пара $\lambda_c \frac{\partial t_c}{\partial n} = \alpha_{нар} (t_{нар} - t_c)$, где $t_{нар}$ – температура пара.

Решение системы уравнений (1)-(3) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} v_i &= u_0 V_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \quad i = 1, 2, 3, \\ p - p_0 &= u_0^2 \rho P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \quad t_{жс} = t_0 T_{жс}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \quad t_c = t_0 T_c(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \\ k &= u_0^2 K(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \quad \omega = \frac{u_0}{r_0} W(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3). \end{aligned} \quad (5)$$

где $\bar{x}_1 = \frac{x_1}{r_0}$, $\bar{x}_2 = \frac{x_2}{r_0}$, $\bar{x}_3 = \frac{x_3}{r_0}$ – безразмерные переменные, V_i , P , K , W , $T_{жс}$, T_c – безразмерные функции, u_0 – начальная скорость, p_0 – начальное давление, r_0 – геометрический размер канала.

Подставляя формулы (5) в уравнения (1)-(3), получим безразмерные уравнения.

Уравнения движения:

$$V_j \frac{\partial V_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial P}{\partial \bar{x}_i} = D \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_i} \right) \left(\frac{\partial V_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \right). \quad (6)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial V_j}{\partial \bar{x}_j} = 0. \quad (7)$$

Уравнение энергии:

$$F_j \frac{\partial T_{жс}}{\partial \bar{x}_j} = D \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left(\left(\frac{1}{Pe} + \frac{1}{Pe_i} \right) \frac{\partial T_{жс}}{\partial \bar{x}_j} \right). \quad (8)$$

Уравнение теплопроводности стенок канала:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left(\frac{\partial T_c}{\partial \bar{x}_j} \right) = 0. \quad (9)$$

Уравнение переноса для кинетической энергии турбулентности:

$$V_j \frac{\partial K}{\partial \bar{x}_j} = \frac{D}{Re_t} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial \bar{x}_j} - \beta^* KW + D \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{\sigma_k}{Re_t} \right) \frac{\partial K}{\partial \bar{x}_j} \right]. \quad (10)$$

Уравнение переноса для удельной скорости диссипации:

$$V_j \frac{\partial W}{\partial \bar{x}_j} = \gamma \frac{D}{Re_t} \frac{W}{K} \left(\frac{\partial V_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial V_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial \bar{x}_j} - \beta W^2 + D \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{\sigma_\omega}{Re_t} \right) \frac{\partial W}{\partial \bar{x}_j} \right] + 2(1-F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{W} \frac{\partial K}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial W}{\partial \bar{x}_j}. \quad (11)$$

Граничные условия:

– на входе в канал:

для скорости: $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 1$; для температуры жидкости $T_{\infty} = 1$;

для температуры стенки $T_c = 1$; для кинетической энергии турбулентности и ее удельной диссипации $W = w_0$, $K = k_0$; для давления $P = 0$;

– на выходе:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \bar{x}_3} = 0, \frac{\partial V_2}{\partial \bar{x}_3} = 0, \frac{\partial V_3}{\partial \bar{x}_3} = 0, \frac{\partial T_{\infty}}{\partial \bar{x}_3} = 0, \frac{\partial K}{\partial \bar{x}_3} = 0, \frac{\partial W}{\partial \bar{x}_3} = 0;$$

– на внутренней стенке:

для скорости – условия прилипания $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$; (12)

для удельной диссипации $W = \frac{60 d_s^2 Fr}{\beta_1 \Delta y^2 Re}$;

для кинетической энергии турбулентности $K = 0$;

для температуры $T_{\infty} = T_c$, $\lambda_{\infty} \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial n}$, где n – нормаль к стенке;

– на внешней стенке:

для пара $\frac{\partial T_c}{\partial n} = Bi (T_{нар} - T_c)$, где $t_{нар}$ – температура пара.

Здесь d_s – эквивалентный диаметр канала, $Re = \frac{u_0 d_s}{\nu}$ – число Рейнольдса, $Re_t = \frac{u_0 d_s}{\nu_t}$

– турбулентное число Рейнольдса, $Bi = \frac{\alpha_{нар} r_0}{\lambda_c}$ – число Био, $D = \frac{d_s}{r_0}$ – геометрический

симплекс, $Pe = \frac{u_0 d_s}{a}$ – число Пекле, $Pe_t = \frac{u_0 d_s}{a_t}$ – турбулентное число Пекле.

2. Построение математической модели с учетом геометрии канала

Рассмотрим систему уравнений (6)-(11) с граничными условиями (12) при турбулентном течении в каналах, стенки которого описываются параметрическими уравнениями:

$$x_1 = r_0 \xi(t, \theta), \quad x_2 = r_0 \zeta(t, \theta), \quad x_3 = r_0 \zeta(t, \theta), \quad t_{нач} \leq t \leq t_{кон}, \quad \theta_{нач} \leq \theta \leq \theta_{кон},$$

где r_0 – характерный размер канала.

Так, например, для пружинно-витого канала теплообменная поверхность (стенка) описывается параметрическими уравнениями [4, 5]:

$$x_1 = r_0 \xi(t, \theta), \quad x_2 = r_0 \zeta(t, \theta), \quad x_3 = r_0 \zeta(t, \theta), \quad (13)$$

где

$$\xi(t, \theta) = \cos t - \frac{c}{r_0} \cos \theta \cos t + \frac{cb \sin \theta \sin t}{r_0 \sqrt{r_0^2 + b^2}}; \zeta(t, \theta) = \sin t - \frac{c}{r_0} \cos \theta \sin t - \frac{cb \sin \theta \cos t}{r_0 \sqrt{r_0^2 + b^2}};$$

$$\zeta(t, \theta) = \frac{b}{r_0} t + \frac{c \sin \theta}{\sqrt{r_0^2 + b^2}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi n, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2},$$

причем при $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$ уравнения (13) описывают внутреннюю стенку канала, а при

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ – внешнюю. Здесь r_0 – радиус подложки канала, n – число витков проволоки.

Тогда проточную часть пружинно-витого канала (рис) можно описать уравнениями вида:

$$x_1 = rr_0\xi(t, \theta), \quad x_2 = rr_0\zeta(t, \theta), \quad x_3 = r_0\zeta(t, \theta), \quad (14)$$

где $0 \leq r \leq 1$. При $r = 1$ уравнения (14) описывают стенку канала, при $r = 0$ – ось канала.

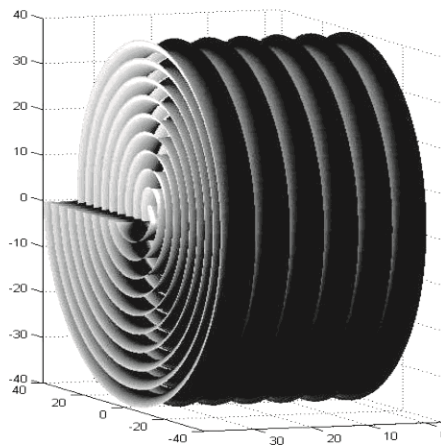


Рис. Проточная часть канала, построенная по уравнениям (14) при r , изменяющемся от 0 до 1 с шагом 0,1

Отобразим физическую область течения с криволинейными границами в область с прямолинейными границами, используя преобразование координат.

Для этого произведем замену переменных в уравнениях математической модели (6)-(11), с граничными условиями (12), приняв за новые независимые переменные $q_1 = r$, $q_2 = t$, $q_3 = \theta$:

$$\bar{x}_1 = q_1 \xi(q_2, q_3), \quad \bar{x}_2 = q_1 \zeta(q_2, q_3), \quad \bar{x}_3 = \zeta(q_2, q_3). \quad (15)$$

Запишем формулы для вычисления частных производных в новых переменных.

Рассмотрим функцию $v = v(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Продифференцируем её по q_1, q_2, q_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial q_1} &= \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_1} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_1} = \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial q_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial q_2} &= \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_2} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_2} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_2} = \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial q_2}, \\ \frac{\partial v}{\partial q_3} &= \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_3} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_3} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_3} = \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial q_3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решая систему (16) относительно $\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1}, \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_2}, \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3}$, получим:

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\Delta_1(q_1, q_2, q_3)}{\Delta(q_1, q_2, q_3)}, \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_2} = \frac{\Delta_2(q_1, q_2, q_3)}{\Delta(q_1, q_2, q_3)}, \quad \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3} = \frac{\Delta_3(q_1, q_2, q_3)}{\Delta(q_1, q_2, q_3)}, \quad (17)$$

где

$$\Delta(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_3} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_3} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi(q_2, \theta) & \varsigma(q_2, \theta) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & q_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & q_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix} =$$

$$= q_1 \xi(q_2, q_3) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varsigma}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \varsigma}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix} - q_1 \varsigma(q_2, q_3) \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial q_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial v}{\partial q_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial v}{\partial q_3} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_3} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial q_1} & \varsigma(q_2, q_3) & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial q_2} & q_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \\ \frac{\partial v}{\partial q_3} & q_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix} =$$

$$= q_1 \frac{\partial v}{\partial q_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varsigma}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \varsigma}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix} - \frac{\partial v}{\partial q_2} \begin{vmatrix} \varsigma(q_2, q_3) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \begin{vmatrix} \varsigma(q_2, q_3) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial v}{\partial q_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_2} & \frac{\partial v}{\partial q_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_3} & \frac{\partial v}{\partial q_3} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & \frac{\partial v}{\partial q_1} & 0 \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial v}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial v}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix} =$$

$$= -q_1 \frac{\partial v}{\partial q_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix} + \frac{\partial v}{\partial q_2} \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix} - \frac{\partial v}{\partial q_3} \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_1} & \frac{\partial v}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_2} & \frac{\partial v}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_3} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_3} & \frac{\partial v}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & \varsigma(q_2, q_3) & \frac{\partial v}{\partial q_1} \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & q_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial q_2} & \frac{\partial v}{\partial q_2} \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & q_1 \frac{\partial \varsigma}{\partial q_3} & \frac{\partial v}{\partial q_3} \end{vmatrix} =$$

$$= q_1^2 \frac{\partial v}{\partial q_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \varsigma}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial \varsigma}{\partial q_3} \end{vmatrix} - q_1 \frac{\partial v}{\partial q_2} \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & \varsigma(q_2, q_3) \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial \varsigma}{\partial q_3} \end{vmatrix} + q_1 \frac{\partial v}{\partial q_3} \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & \varsigma(q_2, q_3) \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \varsigma}{\partial q_2} \end{vmatrix};$$

Равенства (17) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} &= A_1 \frac{\partial v}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial v}{\partial q_2} + A_3 \frac{\partial v}{\partial q_3} = A_j \frac{\partial v}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_2} &= B_1 \frac{\partial v}{\partial q_1} + B_2 \frac{\partial v}{\partial q_2} + B_3 \frac{\partial v}{\partial q_3} = B_j \frac{\partial v}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{x}_3} &= C_1 \frac{\partial v}{\partial q_1} + C_2 \frac{\partial v}{\partial q_2} + C_3 \frac{\partial v}{\partial q_3} = C_j \frac{\partial v}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (18)$$

где важно отметить, что коэффициенты A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) зависят только от q_1, q_2, q_3 :

$$A_1 = \frac{q_1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \xi}{\partial q_3} \end{vmatrix}, A_2 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \zeta(q_2, q_3) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix}, A_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \zeta(q_2, q_3) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \end{vmatrix},$$

$$B_1 = -\frac{q_1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \xi}{\partial q_3} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix}, B_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial \xi}{\partial q_3} \end{vmatrix}, B_3 = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & 0 \\ q_1 \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \xi}{\partial q_2} \end{vmatrix},$$

$$C_1 = \frac{q_1^2}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix}, C_2 = -\frac{q_1}{\Delta} \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & \zeta(q_2, q_3) \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_3} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_3} \end{vmatrix}, C_3 = \frac{q_1}{\Delta} \begin{vmatrix} \xi(q_2, q_3) & \zeta(q_2, q_3) \\ \frac{\partial \xi}{\partial q_2} & \frac{\partial \zeta}{\partial q_2} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}_1^2} &= A_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} \right) + A_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} \right) + A_3 \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_1} \right) = A_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(A_1 \frac{\partial v}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial v}{\partial q_2} + A_3 \frac{\partial v}{\partial q_3} \right) + \\ &+ A_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(A_1 \frac{\partial v}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial v}{\partial q_2} + A_3 \frac{\partial v}{\partial q_3} \right) + A_3 \frac{\partial}{\partial q_3} \left(A_1 \frac{\partial v}{\partial q_1} + A_2 \frac{\partial v}{\partial q_2} + A_3 \frac{\partial v}{\partial q_3} \right) = \\ &= A_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial q_1^2} + A_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial q_2^2} + A_3^2 \frac{\partial^2 v}{\partial q_3^2} + 2A_1 A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial q_1 \partial q_2} + 2A_1 A_3 \frac{\partial^2 v}{\partial q_1 \partial q_3} + 2A_2 A_3 \frac{\partial^2 v}{\partial q_2 \partial q_3} + \\ &+ A_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial q_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3}{\partial q_1} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right) + A_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial q_2} \frac{\partial v}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2}{\partial q_2} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3}{\partial q_2} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right) + \\ &+ A_3 \left(\frac{\partial A_1}{\partial q_3} \frac{\partial v}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2}{\partial q_3} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3}{\partial q_3} \frac{\partial v}{\partial q_3} \right) = A_i A_j \frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_j} + A_i \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}_2^2} &= B_i B_j \frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_j} + B_i \frac{\partial B_j}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial q_j}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}_3^2} = C_i C_j \frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_j} + C_i \frac{\partial C_j}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial q_j}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2} &= A_i \frac{\partial B_j}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial q_j} + A_i B_j \frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_j}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_3} = A_i \frac{\partial C_j}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial q_j} + A_i C_j \frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_j}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}_2 \partial \bar{x}_3} &= B_i \frac{\partial C_j}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial q_j} + B_i C_j \frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_j}. \end{aligned}$$

Запишем уравнения математической модели в новых переменных:

$$0 \leq q_1 \leq 1, \quad 0 \leq q_2 \leq 2\pi n, \quad \frac{\pi}{2} \leq q_3 \leq \frac{5\pi}{2}.$$

Уравнения движения:

$$V_1 A_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} + V_2 B_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} + V_3 C_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} + A_j \frac{\partial P}{\partial q_j} = 2DA_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) A_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right) +$$

$$+ DB_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) \left(B_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} + A_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right) \right) + DC_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) \left(C_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} + A_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right) \right). \quad (19)$$

$$V_1 A_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} + V_2 B_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} + V_3 C_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} + B_j \frac{\partial P}{\partial q_j} = 2DB_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) B_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right) +$$

$$+ DA_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) \left(A_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} + B_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right) \right) + DC_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) \left(C_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} + B_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right) \right). \quad (20)$$

$$V_1 A_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} + V_2 B_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} + V_3 C_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} + C_j \frac{\partial P}{\partial q_j} = 2DC_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) C_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right) +$$

$$+ DA_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) \left(A_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} + C_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right) \right) + DB_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_t} \right) \left(B_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} + C_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right) \right). \quad (21)$$

Уравнение неразрывности:

$$A_j \frac{\partial V_j}{\partial q_j} + B_j \frac{\partial V_j}{\partial q_j} + C_j \frac{\partial V_j}{\partial q_j} = 0. \quad (22)$$

Уравнение энергии:

$$V_1 A_j \frac{\partial T_\infty}{\partial q_j} + V_2 B_j \frac{\partial T_\infty}{\partial q_j} + V_3 C_j \frac{\partial T_\infty}{\partial q_j} = DA_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Pe}} + \frac{1}{\text{Pe}_t} \right) A_j \frac{\partial T_\infty}{\partial q_j} \right) +$$

$$+ DB_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Pe}} + \frac{1}{\text{Pe}_t} \right) B_j \frac{\partial T_\infty}{\partial q_j} \right) + DC_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\left(\frac{1}{\text{Pe}} + \frac{1}{\text{Pe}_t} \right) C_j \frac{\partial T_\infty}{\partial q_j} \right). \quad (23)$$

Уравнение теплопроводности стенок канала:

$$A_i A_j \frac{\partial^2 T_c}{\partial q_i \partial q_j} + A_i \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \frac{\partial T_c}{\partial q_j} + B_i B_j \frac{\partial^2 T_c}{\partial q_i \partial q_j} + B_i \frac{\partial B_j}{\partial q_i} \frac{\partial T_c}{\partial q_j} + C_i C_j \frac{\partial^2 T_c}{\partial q_i \partial q_j} + C_i \frac{\partial C_j}{\partial q_i} \frac{\partial T_c}{\partial q_j} = 0 \quad (24)$$

Уравнение переноса для кинетической энергии турбулентности:

$$D^{-1} \left(V_1 A_j \frac{\partial K}{\partial q_j} + V_2 B_j \frac{\partial K}{\partial q_j} + V_3 C_j \frac{\partial K}{\partial q_j} \right) = \frac{2}{\text{Re}_t} \left(\left(A_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right)^2 + \left(B_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right)^2 + \left(C_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right)^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{\text{Re}_t} \left(\left(A_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right)^2 + \left(A_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right)^2 + \left(B_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right)^2 + \left(B_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right)^2 + \left(C_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right)^2 + \left(C_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right)^2 \right) +$$

$$+ \frac{2}{\text{Re}_t} \left(A_i B_j \frac{\partial V_2}{\partial q_i} \frac{\partial V_1}{\partial q_j} + B_i C_j \frac{\partial V_3}{\partial q_i} \frac{\partial V_2}{\partial q_j} + A_i C_j \frac{\partial V_3}{\partial q_i} \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right) - \frac{\beta^*}{D} KW +$$

$$+ A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_k}{\text{Re}_t} \right) A_j \frac{\partial K}{\partial q_j} \right] + B_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_k}{\text{Re}_t} \right) B_j \frac{\partial K}{\partial q_j} \right] +$$

$$+ C_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_k}{\text{Re}_t} \right) C_j \frac{\partial K}{\partial q_j} \right]. \quad (25)$$

Уравнение переноса для удельной скорости диссипации:

$$\begin{aligned}
 D^{-1} \left(V_1 A_j \frac{\partial W}{\partial q_j} + V_2 B_j \frac{\partial W}{\partial q_j} + V_3 C_j \frac{\partial W}{\partial q_j} \right) &= \frac{W}{K} \frac{2\gamma}{\text{Re}_t} \left(\left(A_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right)^2 + \left(B_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right)^2 + \left(C_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right)^2 \right) + \\
 + \frac{W}{K} \frac{\gamma}{\text{Re}_t} \left(\left(A_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right)^2 + \left(A_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right)^2 + \left(B_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right)^2 + \left(B_j \frac{\partial V_3}{\partial q_j} \right)^2 + \left(C_j \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right)^2 + \left(C_j \frac{\partial V_2}{\partial q_j} \right)^2 \right) + \\
 + \frac{W}{K} \frac{2\gamma}{\text{Re}_t} \left(A_i B_j \frac{\partial V_2}{\partial q_i} \frac{\partial V_1}{\partial q_j} + B_i C_j \frac{\partial V_3}{\partial q_i} \frac{\partial V_2}{\partial q_j} + A_i C_j \frac{\partial V_3}{\partial q_i} \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \right) - \frac{\beta}{D} W^2 + \\
 + A_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_\omega}{\text{Re}_t} \right) A_j \frac{\partial W}{\partial q_j} \right] + B_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_\omega}{\text{Re}_t} \right) B_j \frac{\partial W}{\partial q_j} \right] + \\
 + C_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\sigma_\omega}{\text{Re}_t} \right) C_j \frac{\partial W}{\partial q_j} \right] + \\
 + \frac{2}{D} (1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{W} \left(A_i A_j \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial q_j} + B_i B_j \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial q_j} + C_i C_j \frac{\partial K}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial q_j} \right).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Граничные условия:

– на входе в канал ($0 \leq t \leq 2\pi$):

для скорости: $V_1 = 0, V_2 = 0, V_3 = 1$; для температуры жидкости $T_{\infty} = 1$;

для температуры стенки $T_c = 1$; для кинетической энергии турбулентности

$K = k_0$; для удельной диссипации $W = w_0$; для давления $P = 0$;

– на выходе ($2\pi(n-1) \leq t \leq 2\pi n$):

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_3} = 0, \frac{\partial V_2}{\partial q_3} = 0, \frac{\partial V_3}{\partial q_3} = 0, \frac{\partial T_{\infty}}{\partial q_3} = 0, \frac{\partial K}{\partial q_3} = 0, \frac{\partial W}{\partial q_3} = 0;$$

– на внутренней стенке ($r = 1, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$):

(27)

для скорости – условия прилипания $V_1 = 0, V_2 = 0, V_3 = 0$; для удельной

диссипации $W = \frac{60 d_3^2 Fr}{\beta_1 \Delta y^2 \text{Re}}$; для кинетической энергии турбулентности $K = 0$;

для температуры $T_{\infty} = T_c$, $\lambda_{ж} \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial n}$, где n – нормаль к стенке;

– на внешней стенке ($r = 1, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$):

для пара $\frac{\partial T_c}{\partial n} = Bi(T_{пар} - T_c)$, где $t_{пар}$ – температура пара.

Эквивалентный диаметр пружинно-витого канала может быть вычислен по формуле:

$$d_3 = \frac{4V}{S},$$

где V – объем, S – площадь смоченной (внутренней) поверхности канала.

Площадь внутренней поверхности вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi n \sqrt{r_0^2 + b^2} \cdot \pi \cdot c.$$

Объем вычисляется по формуле:

$$V = \iiint_G dx dy dz = \left| \begin{matrix} x = q_1 \xi(q_2, q_3) \\ y = q_1 \zeta(q_2, q_3) \\ z = \zeta(q_2, q_3) \end{matrix} \right| = \int_0^1 dq_1 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} dq_2 \int_0^{2\pi n} \Delta(q_1, q_2, q_3) dq_3.$$

Численная реализация полученной модели (19)-(27) сопряженной задачи теплообмена при турбулентном течении вязкой несжимаемой жидкости в рассматриваемых каналах позволит определить поле скоростей, давления и температур в проточной части труб со сложной геометрией.

Заключение

Предложена математическая модель сопряженной задачи теплообмена при турбулентном течении вязкой несжимаемой жидкости на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений движения, неразрывности, энергии, теплопроводности стенки и модели Ментера. Для преобразования дифференциальных уравнений к безразмерному виду предложены оригинальные подстановки. Уравнения модели записаны с применением независимых переменных, что позволило преобразовать физическую область течения с криволинейными границами в область с прямолинейными границами. Это позволило существенно упростить процесс построения расчетной сетки и записи граничных условий.

Список литературы

1. Гарбарук А.В., Стрелец М.И., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 88 с.
2. Menter F.R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper № 93-2906, 1993. – 21 p.
3. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation, J. Fluid Mech., 1967, v. 28. – P. 593-616.
4. Багоутдинова А.Г., Золотонос Я.Д. Математическое описание и визуализация теплообменных поверхностей в форме пружинно-витых каналов и труб типа «конфузор-диффузор» // Известия вузов. Проблемы энергетики, 2012, № 7-8. – С. 80-86.
5. Багоутдинова А.Г., Золотонос Я.Д., Мустакимова С.А. Энергоэффективные теплообменные аппараты на базе теплообменных элементов в виде пружинно-витых каналов // Известия КГАСУ, 2012, № 3 (21). – С. 86-95.

Bagoutdinova A.G. – candidate of technical sciences, associate professor

E-mail: bagoutdinova@rambler.ru

Zolotonosov Ya.D. – doctor of technical sciences, professor

E-mail: zolotonosov@mail.ru

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

Mathematical model of the dual problem of heat transfer in turbulent flow in channels of complex geometry

Resume

In this paper the mathematical model of conjugate heat transfer problem in a turbulent flow of an incompressible viscous fluid in a channel complex configuration based on the Reynolds averaged equations of motion, continuity, energy, and thermal conductivity of the wall is shown. To close the system of equations of the Reynolds turbulence model based on Menter geometry of the channel is chosen. To convert the differential equations to a dimensionless the original proposed substitution are formed. The model equations are written with the use of independent variables, which has transformed the physical flow domain with

curved boundaries in the area with straight boundaries. It is possible to considerably simplify the process of building a computational grid and write the boundary conditions.

The numerical realization of the resulting model will identify the main heat-hydrodynamic parameters and clarify the methods of engineering calculation of heat exchangers with heat exchange elements in the form of spring-twisted channels.

Keywords: mathematical model, boundary conditions, turbulent flow.

References

1. Garbaruk A.V., Strelets M.H., Shur M.L. Modeling of turbulence in the calculation of complex flows: a manual / Spb: Polytechnic Univ. Press, 2012. – 88 p.
2. Menter F.R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper № 93-2906, 1993. – 21 p.
3. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation, J. Fluid Mech., 1967, v. 28. – P. 593-616.
4. Bagoutdinova A.G., Zolotonosov Ja.D. Mathematical description and visualization of heat-exchange surfaces in form the spring-curly channels and pipes of type «confusor-diffusor» // Proceedings of the universities. Energy problems, 2012, № 7-8. – P. 80-86.
5. Bagoutdinova A.G., Zolotonosov Ya.D., Mustakimova S.A. Energy efficient heat exchangers based on the heat exchange elements in the form of a spring-twisted channels // News of the KSUAE, 2012, № 3 (21). – P. 86-95.