УДК 532.5:621.694

А.Я. Золотоносов – аспирант
Я.Д. Золотоносов – доктор технических наук, профессор
Тел.: (843) 510-47-35, e-mail: zolotonosov@mail.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет (КазГАСУ)
Т.В. Белавина – старший научный сотрудник
Тел.: 89050383528, e-mail: belavina_tv@mail.ru
ООО «Прогресс»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДЛИННОМ РЕБРЕ ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТЫ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ УСЛОВИЙ ТЕПЛООБМЕНА

АННОТАЦИЯ
В работе приведены математическая модель и алгоритм численного решения уравнения теплопроводности для длинного продольного ребра переменной высоты.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: гидродинамика, сопряженный теплообмен, поле температур.

A.Ya. Zolotonosov – post-graduate student
Ya.D. Zolotonosov – doctor of technical sciences, professor
Tel.: (843) 510-47-35, e-mail: zolotonosov@mail.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE)
T.V. Belavina – senior staff scientist
Tel.: 89050383528, e-mail: belavina_tv@mail.ru
LLC «Progress»

MATHEMATICAL MODEL OF HEAT CONDUCTIVITY IN THE LONG EDGE OF VARIABLE HEIGHT TAKING INTO ACCOUNT CHANGE OF CONDITIONS OF HEAT EXCHANGE

ABSTRACT
In work the mathematical model and algorithm of the numerical decision of the equation of heat conductivity for a long longitudinal edge of variable height are resulted.

KEYWORDS: hydrodynamics, interfaced heat exchange, field of temperatures.

Введение

В современных теплообменных устройствах для интенсификации процессов теплопередачи и сокращения габаритов теплообменной аппаратуры широко используются оребренные (развитые) поверхности [1], оребрение которых обычно реализуется со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи [2].

Когда требуется уменьшить размеры теплообменника, а значения коэффициентов теплоотдачи с обеих сторон малы, оребрение производится с обеих сторон [3].

При оребрении стремятся к выполнению условия $\alpha_1 F_c \approx \alpha_2 F_{p.c}$, при этом отношение величин оребренной поверхности $F_{p.c}$ и гладкой F_c называют коэффициентом оребрения и выбирают обычно в пределах конструктивных возможностей от 4 до 10.

Следует отметить, что плоскость ребра всегда должна быть направлена по движению рабочей жидкости, а при свободном движении – вертикально.

В настоящее время в мировой практике применяются ребристые теплообменники с ребрами самой разнообразной конфигурации, изготовляемые по различной технологии [1, 4], в том числе: в виде прямых и кольцевых пластин, а также шипов различного профиля для оребрения круглых труб в воздухоохладительных установках кондиционирования воздуха и калориферах; проволочные в охладителях масла силовых трансформаторов; в виде непрерывной спирали на трубах радиаторно-вентиляторных установок для охлаждения компримируемого газа, масла и воды газомотокомпрессоров, радиаторов и калориферов; винтовой накатки моно- и биметаллических труб со сплошными или разрезными ребрами; плавниковые для труб паровых котлов и теплообменников типа «труба в трубе» для оребрения внутренних и наружных труб [5]; полизональные для теплообменников специального назначения; в виде пластин с зигзагами и волнами для труб радиаторов транспортных двигателей.

Подробная оценка целесообразности использования оребрения и методов определения их эффективности приведена в работах [6].

Уравнение теплопроводности для длинного продольного ребра переменной высоты

В инженерной практике наибольшее распространение получил метод теплового расчета оребренных поверхностей по одномерной модели, который исходит из системы уравнений баланса тепловых потоков, передаваемых через оребренную поверхность [6, 7]. Одним из основных допущений при анализе процессов по одномерной модели является одномерность поля температур, при этом температура изменяется лишь в направлении высоты ребра.

Точные решения с учетом двухмерности температурного поля, когда учитываются изменения температуры в ребре и несущей стенке (для случая прямоугольных [8], кольцевых ребер, а также шипов различного профиля [1]), позволяют выяснить ограничения, связанные с использованием одномерной модели [9], и строятся на базе дифференциального уравнения второго порядка в виде уравнения Лапласа [1].

Существенно возрастает сложность математического описания процесса переноса тепла в длинных ребрах переменной высоты в условиях высоких плотностей теплового потока и изменении температуры по длине ребра, что имеет место в оребренной внутренней проточной части каналов теплообменных устройств типа «труба в трубе» с вращающейся поверхностью «конфузор-диффузор» (рис. 1).

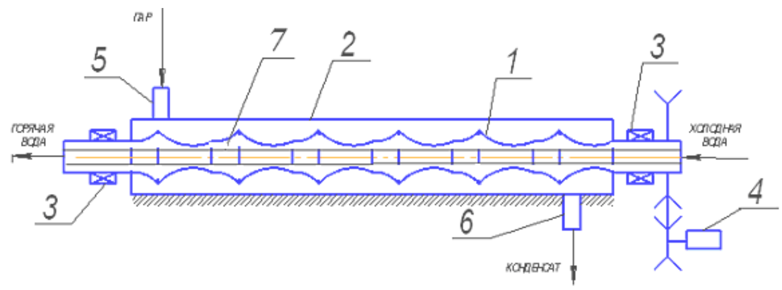

Рис. 1. Схема теплообменника с вращающейся волнистой трубой типа «конфузор-диффузор»: 1 – труба типа «конфузор-диффузор»; 2 – внешняя труба; 3 – подшипники; 4 – электродвигатель; 5 – патрубок для пара; 6 – патрубок для конденсата; 7 – ребра

Оребрение в таких каналах вызвано требованиями дальнейшей интенсификации процесса теплообмена (со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи), поскольку с водной стороны среднее значение $\overline{a}_{в}$ = 1300 Вт/м²К, а со стороны пара, вследствие срыва конденсатной пленки с поверхности вращающегося канала и перехода с пленочного режима конденсации в «пленочно-капельный» режим конденсации, $\overline{a}_{п}$ = 21000 Вт/м²К [10].

Тепловой расчет длинных ребер, когда необходимо учитывать изменение температуры ребра и потока жидкости в направлении ее течения, строится на нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка в виде уравнения Пуассона [11].

При выводе данного уравнения делаются следующие допущения: процесс стационарен, теплопроводность материала ребра постоянна, внутренние источники тепла отсутствуют, толщина ребра мала по сравнению с высотой и соответственно градиент температуры в направлении, перпендикулярном боковой поверхности пренебрежимо мал; теплоотдачей с торца можно пренебречь; средний коэффициент теплоотдачи от поверхности ребра к жидкости считается величиной постоянной. Принимается также, что физические свойства жидкости постоянны и перенос тепла в жидкости по средствам теплопроводности отсутствует.

Рассмотрим процесс распространения тепла в длинном ребре переменной высоты (рис. 2).

Уравнение теплопроводности для ребра и переноса тепла в трубе (общей длины $L_{тр}$) с потоком жидкости запишем в виде

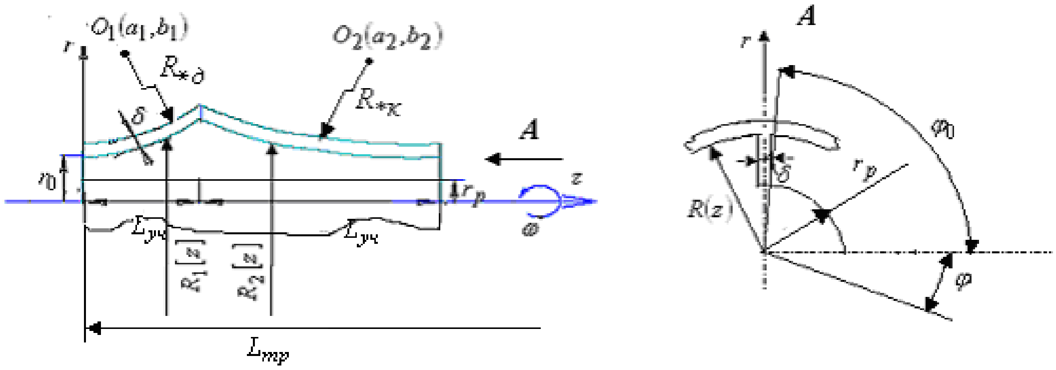

Рис. 2. Конфузорно-диффузорный элемент

$$\frac{\partial^2 T_p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_p}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_p}{\partial z^2}=\frac{2\overline{a}}{l\, d}\left(T_p-T_{ж}\right). \tag{1}$$

Здесь $\overline{a}$ - средний коэффициент теплоотдачи.

В качестве условий однозначности для уравнения (1) зададим граничные условия на ребре:

$$z=0: \quad T_p(0,r)=T_{cp}; \tag{2}$$

$$z=L_{уч}: \quad l_p\frac{\partial T_p}{\partial z}\left(L_{уч},r\right)=\overline{a}\left(T_p-T_{ж}\right); \tag{3}$$

$$z=L_{тр}: \quad \frac{\partial T_p}{\partial z}\left(L_{тр},r\right)=0; \tag{4}$$

$$j=j_0: \quad T_p\left(z,j_0,r\right)=T_{ж}; \; l_p\frac{\partial T_p}{\partial r}\left(z,j_0,r\right)=l\frac{\partial T_{ж}}{\partial r}\left(z,j_0,r\right); \tag{5}$$

$$r=r_p: \quad T_p\left(z,r_p\right)=T_{ж}; \tag{6}$$

$$r=R(z): \quad T_p\left(z,R(z)\right)=T_c. \tag{7}$$

Используя преобразования координат, отобразим физическую область течения с криволинейными границами. Для этого произведем в уравнении теплопроводности для ребра замену переменных:

$$\overline{r}=\frac{r}{R(z)}; \quad \overline{z}=\frac{z}{L_{уч}};$$

где функция $r=R(z)=-\sqrt{R_*^2-(z-a)^2}+b$ определяет конфигурацию твердых стенок канала; $L_{уч}$ – длина участка трубы (конфузор $l_к$ или диффузор l_∂).

Кроме того, введем в уравнение (1) безразмерные переменные и параметры:

$$\overline{a}=\frac{a}{R_*}; \; \overline{b}=\frac{b}{R_*}; \quad z_*=\frac{z}{R_*}; \overline{R}=\frac{R(z)}{L_{уч}}; \quad \breve{r}=\frac{r_p}{R(z)}.$$

Решение уравнения будем искать в виде:

$$T_p\left(\overline{z},\overline{r}\right)=T_c\, t_p\left(\overline{z},\overline{r}\right); T_{cp}\left(\overline{z},\overline{r}\right)=T_c\, t^*\left(\overline{z},\overline{r}\right); T_{ж}\left(\overline{z},\overline{r}\right)=T_c\, \overline{t}\left(\overline{z},\overline{r}\right).$$

Тогда краевая задача нахождения температуры ребра для области $\Omega=\left\{\left(\overline{r},j,\overline{z}\right)/\breve{r}\le\overline{r}\le 1{,}0\le\overline{z}\le 1\right\}$ с граничными условиями (2) – (7) примет вид:

$$\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}}+\bar{r}\,\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}\left((z_*-\bar{a})^2+1\right)-\bar{b}}{\left(1-(z_*-\bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}}+\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\right)^2\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}^2}-$$
$$-\frac{2\bar{r}\bar{R}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}\partial \bar{z}}+\bar{R}^2\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{z}^2}=\frac{2\bar{a}}{l d}\left(t_p-t_{ж}\right), \tag{8}$$

Граничные условия для уравнения (8) преобразуются к виду:

$$\bar{z}=0: \quad t_p(0,\bar{r})=t^*; \tag{9}$$

$$\bar{z}=1: \quad l_p\frac{\partial t_p}{\partial \bar{z}}(1,\bar{r})=\bar{a}\left(t_p-t_{ж}\right); \tag{10}$$

$$\bar{z}=1: \quad \frac{\partial t_p}{\partial \bar{z}}(1,\bar{r})=0; \tag{11}$$

$$j=j_0: \quad t_p(\bar{z},j_0,\bar{r})=t_{ж};\; l_p\frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}}(\bar{z},j_0,\bar{r})=l_{ж}\frac{\partial t_{ж}}{\partial r}(\bar{z},j_0,\bar{r}); \tag{12}$$

$$\bar{r}=\hat{r}: \quad t_p(\bar{z},\hat{r})=\bar{t}; \tag{13}$$

$$\bar{r}=1: \quad t_p(\bar{z},1)=1. \tag{14}$$

Уравнение (8) с граничными условиями (9) – (14) составляет полную математическую модель задачи переноса тепла в длинном продольном ребре переменной высоты.

Для получения алгебраического уравнения используется метод Галеркина [13]:

$$\int_V [\Phi]^T\left(\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}}+\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 t_p}{\partial j^2}+\bar{r}\,\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}\left((z_*-\bar{a})^2+1\right)-\bar{b}}{\left(1-(z_*-\bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}}+\right. \tag{15}$$
$$\left.+\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\right)^2\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}^2}-\frac{2\bar{r}\bar{R}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}\partial \bar{z}}+\bar{R}^2\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{z}^2}\right)dV=\frac{2\bar{a}}{l d}\int_V [\Phi]^T\left(t_p-t_{ж}\right)dV.$$

Для численного решения рассматриваемой задачи применяется метод конечных элементов (МКЭ) [13, 14], заключающийся в сведении исходных дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, решаемым обычными методами. Основным преимуществом данного метода является его индифферентность в отношении расчетных областей.

Для построения конечно-элементной модели рассматриваемую область разбивают на конечное число непересекающихся четырехугольных элементов $\Omega^{(e)}$ (индекс *e* означает номер элемента) таким образом, что пересечение различных элементов является либо пустым множеством, либо общей частью граничных поверхностей этих элементов.

Приближенные значения неизвестных компонентов внутри каждого элемента представляются следующими пробными аппроксимациями [14]:

$$t_p^{(e)}(\bar{z},\bar{r})=\sum_{i=1}^{4} t_{p_i}^{(e)}\Phi_i^{(e)}(\bar{z},\bar{r}) \tag{16}$$

или в матричной форме:

$$t_p^{(e)} = [\Phi]\{t_p\}$$

Здесь $[\Phi] = \left[\Phi_1^e(\bar{z},\bar{r}), \Phi_2^e(\bar{z},\bar{r}), \Phi_3^e(\bar{z},\bar{r}), \Phi_4^e(\bar{z},\bar{r})\right]$ – вектор-строка базисных функций, $\{t_p\}$ – вектор-столбец неизвестных узловых значений функций:

$$\{t_p\} = \left[t_{p_1}^{(e)}, t_{p_2}^{(e)}, t_{p_3}^{(e)} t, p_4^{(e)}\right]^T.$$

Нижние индексы означают локальную нумерацию узлов, верхний – номер элемента. В дальнейшем для упрощения записи верхний индекс будем опускать.

Каждая из базисных функций $\Phi_i^{(e)}(\bar{z},\bar{r})$ принимает значение, равное 1 в i-м узле, и значение, равное нулю в других узлах. Кроме того, функции $\Phi_i^e(\bar{z},\bar{r})$ отличны от нуля только в тех элементах, которые содержат i-й узел, а в остальной области они равны нулю.

Подставляя в уравнение (15) формулу преобразования (16) и учитывая преобразования интегралов, содержащих вторые производные, в интегралы, содержащие только первые производные, получим:

$$\int_V \left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j} \frac{\partial[\Phi]}{\partial j} + \left(\frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \right)^2 \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} - \frac{2\bar{r}\bar{R}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{z}} + \right.$$

$$\left. + \bar{R}^2 \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} \right) \{t_p\} dV - \int_V [\Phi]^T \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} + \bar{r} \frac{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}\left((z_* - \bar{a})^2 + 1\right) - \bar{b}}{\left(1-(z_* - \bar{a})^2\right)^{3/2}} \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \right) \{t_p\} dV +$$

$$+ \frac{2\bar{a}}{l\,d} \int_V [\Phi]^T [\Phi] \left(\{t_p\} - \{t_{ж}\}\right) dV = 0. \quad (17)$$

Уравнение (15) решаем в системе, содержащей уравнения движения, энергии и теплопроводности стенок канала. Линеаризация полученной системы выполняется методом Ньютона. Для решения системы линейных алгебраических уравнений применяется метод сопряженных градиентов.

В практических расчетах вместо точной формулы (8) с граничными условиями (9)-(14) можно использовать упрощенные выражения. Для этого количество теплоты, передаваемое через ребристую поверхность, можно представить в виде [12]:

$$Q = k_{р.с}\left(t_{ср1} - t_{ср2}\right) F_{р.с}.$$

Коэффициент теплопередачи через ребристую стенку равен:

$$k_{р.с} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{d_c}{l_c}\right)\frac{F_{р.с}}{F_c} + \frac{1}{a_{2пр}} + R_{заг}},$$

где a_1 – коэффициент теплоотдачи с гладкой стороны; $a_{2пр}$ – приведенный коэффициент теплоотдачи со стороны ребристой поверхности; $R_{заг}$ – термическое сопротивление загрязненной ребристой поверхности; $t_{ср1}$ и $t_{ср2}$ – средние температуры теплоносителей; d_c и l_c – толщина и коэффициент теплопроводности материала стенки; F_c – площадь гладкой поверхности стенки;

$F_{p.c} = F_p + F_n$ – площадь ребристой поверхности стенки, равная сумме площади ребер F_p и площади стенки в промежутках между ребрами F_n.

Приведенный коэффициент теплоотдачи со стороны ребристой поверхности $a_{2пр}$ определяется из уравнения:

$$a_{2пр} = a_2 \left(\frac{F'_p q_0}{F'_{p.c} q_1} + \frac{F'_n}{F'_{p.c}} \right),$$

в котором a_2 – коэффициент теплоотдачи от поверхности, свободной от ребер, определяемый по критериальному уравнению, соответствующему условиям теплообмена стенки со средой; F'_p – поверхность ребер на 1 м длины; F'_n – внешняя поверхность, не занятая ребрами на 1 м длины; $F'_{p.c}$ – полная внешняя поверхность 1 м длины теплообменного аппарата; q_1 – разность между температурами основной поверхности теплообменного аппарата и среды; q_0 – разность между температурами поверхности ребер и среды, меньшая, чем q_1, вследствие изменения температуры на поверхности ребер. Отношение q_0 / q_1 находится как функция конкретных условий обтекания ребристой поверхности a_2, материала ребер l_p и их геометрии (толщины, высоты и расположения на оребренной поверхности) [12].

Заключение

Продольное оребрение проточной части каналов конфузорно-диффузорного типа является целесообразным и позволит увеличить эффективность теплообмена со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи.

Разработана математическая модель теплопроводности для ребра, записанная в цилиндрической системе координат, с учетом переноса тепла с потоком жидкости и условий однозначности, что позволит расширить представление о процессе переноса тепла в продольном ребре с учетом изменения условий теплообмена по его длине.

Предложен алгоритм численной реализации математической модели, позволяющий определить поле температур в ребре и уточнить метод теплового расчета оребренных поверхностей по сравнению с двумерной моделью в виде уравнения Лапласа.

Литература

1. Ройзен Л.И., Гулькин И.Н. Тепловой расчет оребренных поверхностей. – М.: Энергия, 1977. – 256 с.
2. Щербаков В.К., Босый В.В. Условия выгодности оребрения и влияние ребер на температуру охлаждаемой стенки // Теплофизика и теплотехника, Вып. 23. – Киев: «Наукова думка». 1973. – С. 49-125.
3. Керн Д., Краус А. Развитые поверхности теплообмена. – М.: Энергия, 1947. – 461 с.
4. Бажан П.И., Каневец Г.Е., Селиверетов В.М. Справочник по теплообменным аппаратам. – М.: Машиностроение, 1989. – 365 с.
5. Щукин В.К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. – М.: Машиностроение, 1970. – 350 с.
6. Harper D.R., Brown W.B. Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air-Cooled Engines. – «Naca Rep», 1922, № 158. – 32 p.
7. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло- и массообмена. –М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 680 с.
8. Безродный М.К. Приближенное решение двумерной задачи теплопроводности для плоской стенки с прямоугольными ребрами // Теплофизика и теплотехника, Вып. 27, 1974. – С. 95-99.
9. Айри Р.К. Погрешности одномерных решений для ребра // Теплопередача, 1968, том 90, № 1. – С. 147-149.
10. Пантелеева Л.Р. Теплообмен при ламинарном течении вязкой жидкости в теплообменных устройствах

типа «труба в трубе» с вращающейся поверхностью «конфузор-диффузор» // Дис. канд. техн. наук. – Казань, 2009. – 116 с.
11. Цесарский И.Б., Мотин Э.А. Стационарное поле температур при теплоотводе от плоской оребренной поверхности с учетом изменения условий теплообмена по длине ребра // В кн.: Исследования по теплопроводности. – Минск: Наука и техника, 1967. – 569 с.
12. Теплотехническое оборудование и теплоснабжение промышленных предприятий/ Голубков Б.Н., Данилов О.Л., Зосимовский Л.В. – М.: Энергия, 1979. – 544 с.
13. Формалеев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
14. Сегерлинд Д. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392 с.