УДК 539.3
Ю.И. Бутенко – доктор физико-математических наук, профессор
Тел.: (843) 510-47-23
Казанский государственный архитектурно-строительный университет (КазГАСУ)

КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОСАХ

АННОТАЦИЯ
Использование в технике различных многослойных конструкций, обладающих рядом необходимых свойств, поставило на повестку дня вопрос о совершенствовании расчетной практики по определению глубины проникновения и напряженно-деформированного состояния (НДС) краевого эффекта (эффекта типа Сен-Венана). Для однослойных полос, пластин и оболочек эта задача решена в монографии Л.А. Агаловяна [1]. Для трехслойных конструкций задача решается в [2-4]. В данной работе для решения задачи по определению глубины проникновения краевого эффекта многослойной полосы и построения асимптотически точного определения НДС используется расчетный комплекс «Математика-5».

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: плоская задача теории упругости, многослойная полоса, краевой эффект, быстро убывающее решение.

Yu.I. Butenko – doctor of physical-mathematical sciences, professor
Tel.: (843) 510-47-23
Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE)

BOUNDARY EFFECTS IN A MULTILAYERED STRIP

ABSTRACT
The use of the various multilayered constructions, possessing of necessary properties in technique, raised the question of improvement of accounts on determination of the depth of penetration and tense-deformed conditions (VAT) of the boundary effect (effect of Sen-Venan type) For the single-layered strips, plates and shells this problem is solved in L.A. Agalovjan's monograph [1]. For three-layer designs the problem dares in [2-4]. In the given work for the decision of the problem of definition of penetration of boundary effect in a multilayered strip and asymptotical definition of the stress-strain condition the settlement complex «Mathematics-5» is used.

KEYWORDS: a flat problem of the theory of elasticity, a multilayered strip, the boundary effect, quickly decreasing decision.

В работах [1-4] авторы развивают точные аналитические методы решения плоских и пространственных задач теории упругости по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) быстроубывающих краевых эффектов (эффект Сен-Венана): в работе [1] – для однослойных, а в [2-4] – для двух- и трехслойных полос и пластин из различных изотропных и ортотропных материалов. Эти эффекты имеют место при самоуравновешенной краевой нагрузке (главные вектор и момент внешних сил, приложенных к рассматриваемому краю, равны нулю).

При этом основное внимание в работах [2-4] было направлено на получение точного векового уравнения для параметра λ, входящего в точное решение плоской задачи. Для трехслойных полос эти уравнения имеют сложную структуру, поэтому автору удалось получить обозримые уравнения лишь в некоторых частных случаях. Наличие точного уравнения бесценно тем, что позволяет оценить влияние различных факторов, входящих в решение задач. Но в перспективном плане предложенный подход к изучению краевых эффектов является тупиковым, так как даже для двухслойных и трехслойных полос эти уравнения имеют громоздкий вид.

В данной работе на основе системы “Математика-5” [5] предлагается численный метод решения указанных задач. Данный метод позволяет охватить значительно больший круг задач в зависимости от возможностей ЭВМ.

1. Постановка задачи краевого эффекта. Рассмотрим плоскую задачу для многослойных полос размерами $2H\ \ l$ в физически и геометрически линейной постановке. Будем считать, что среда состоит из n изотропных и ортотропных слоев, отсчет которых ведется от нижнего слоя.

Каждый k-слой имеет толщину $2h_k \quad (H=\sum_{k=1}^{n} h_k)$ и описывается индивидуальной системой координат x_k, y_k, в которой ось x_k связана со средней линией полосы, а ось y_k нормальна к ней. Оси ортотропии всех слоев совпадают между собой и с осями координат.

Для k-слоя задача погранслоя описывается однородными уравнениями равновесия

$$\frac{\partial s_x^{(k)}}{\partial x_k} + \frac{\partial t_{xy}^{(k)}}{\partial y_k} = 0, \quad \frac{\partial t_{xy}^{(k)}}{\partial x_k} + \frac{\partial s_y^{(k)}}{\partial y_k} = 0 \tag{1.1}$$

и физическими соотношениями ортотропного тела

$$s_x^{(k)} = B_{11}^{(k)} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_k} + B_{12}^{(k)} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial y_k}, \quad s_y^{(k)} = B_{21}^{(k)} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x_k} + B_{22}^{(k)} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial y_k}$$

$$t_{xy}^{(k)} = G_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial U^{(k)}}{\partial y_k} + \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x_k} \right) \tag{1.2}$$

Здесь $s_{ab}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений плоской задачи k-ого слоя, $\bar{u}^{(k)}(U^{(k)}, V^{(k)})$ – вектор перемещения, $G_{12}^{(k)}$ – модули сдвига, а $B_{ab}^{(k)}$ – некоторые постоянные, которые выражаются через модули упругости $E_a^{(k)}$ и коэффициенты Пуассона $n_{ab}^{(k)} (a, b = 1, 2)$ следующим образом

$$B_{11}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)}}{1 - n_{12}^{(k)} n_{21}^{(k)}}, B_{12}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} n_{12}^{(k)}}{1 - n_{12}^{(k)} n_{21}^{(k)}}, B_{21} = \frac{E_2^{(k)} n_{21}^{(k)}}{1 - n_{12}^{(k)} n_{21}^{(k)}}, \quad B_{22} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - n_{12}^{(k)} n_{21}^{(k)}} \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.1)-(1.2) переходим к безразмерным координатам и перемещениям

$$x_k = \frac{x_k}{l}, \; z_k = \frac{y_k}{H}, \; u^{(k)} = \frac{U^{(k)}}{l}, \; \text{v}^{(k)} = \frac{V^{(k)}}{l},$$

где l – длина полосы, $H = \sum_{k=1}^{3} h_k$ – полутолщина стержня. При этом появляются: $e = \frac{H}{l}$ – малый геометрический параметр и $a_k = \frac{h_k}{H}$ – безразмерная полутолщина слоя ($\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$). Рассмотрим краевой эффект у кромки $x_k = const$, для чего проводим растяжение координаты $x_k = te$.

Решение задачи (1.1)-(1.2) с учетом указанных преобразований ищем в виде асимптотического представления [3]

$$(s_x^{(k)}, s_y^{(k)}, t_{xy}^{(k)}) = \sum_{s=0} e^q (s_x^{(k)s}, s_y^{(k)s}, t_{xy}^{(k)s}),$$

$$(u^{(k)}, \text{v}^{(k)}) = \sum_{s=0} e^{q+1} (u^{(k)s}, \text{v}^{(k)s}). \tag{1.4}$$

Здесь $q = s + k_1$, где s – показатель порядка асимптотического разложения, а k_1 – параметр, который выбирается из условия согласования краевых условий внутренней задачи и задачи краевых эффектов.

Решение задачи проводим в перемещениях $u^{(k)s}, \text{v}^{(k)s}$, для определения которых имеем уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u^{(k)s}}{\partial t_k^2}+n_1^{(k)}\frac{\partial^2 u^{(k)s}}{\partial z_k^2}+n_2^{(k)}\frac{\partial^2 \mathrm{v}^{(k)s}}{\partial t_k \partial z_k}=0\\
&n_3^{(k)}\frac{\partial^2 \mathrm{v}^{(k)s}}{\partial t_k^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{v}^{(k)s}}{\partial z_k^2}+n_4^{(k)}\frac{\partial^2 u^{(k)s}}{\partial t_k \partial z_k}=0
\end{aligned} \qquad (1.5)$$

Здесь $n_1^{(k)}=\dfrac{G_{12}^{(k)}}{B_{11}^{(k)}}, n_2^{(k)}=\dfrac{(G_{12}^{(k)}+B_{12}^{(k)})}{B_{11}^{(k)}}, n_3^{(k)}=\dfrac{G_{12}^{(k)}}{B_{22}^{(k)}}, n_4^{(k)}=\dfrac{(G_{12}^{(k)}+B_{21}^{(k)})}{B_{22}^{(k)}}$

Решение однородной системы уравнений (1.5) ищем в виде затухающего решения

$$u^{(k)s}(t_k,z_k)=u_1^{(k)s}(z_k)e^{-l\,t_k},\ \mathrm{v}^{(k)s}(t_k,z_k)=u_2^{(k)s}(z_k)e^{-l\,t_k}, \qquad (1.6)$$

где λ > 0 – показатель скорости изменяемости (убывания) краевого эффекта. Решение $u_1^{k(s)}, u_2^{k(s)}$ ищем в виде:

$$u_1^{k(s)}=C_1^{(k)s}e^{gz_k},\ u_2^{k(s)}=C_2^{(k)s}e^{gz_k}, \qquad (1.7)$$

где $C_1^{(k)s}, C_2^{(k)s}$ – постоянные интегрирования k-го слоя, которые находятся из однородной алгебраической системы уравнений. Наличие ненулевого решения этой системы требует, чтобы определитель из коэффициентов системы был равен нулю. Из этого условия следует алгебраическое уравнение относительно параметра γ

$$n_1^{(k)}g^4+l^2(1+n_1^{(k)}n_3^{(k)}-n_2^{(k)}n_4^{(k)})g^2+n_3^{(k)}l^4=0 \qquad (1.8)$$

Это уравнение хорошо изучено [1] и его корни имеют вид

$$g_{1,2}^{(k)2}=-l^2\frac{1+n_1^{(k)}n_3^{(k)}-n_2^{(k)}n_4^{(k)}}{2n_1^{(k)}}\pm l^2\frac{1}{2n_1^{(k)}}\sqrt{D^{(k)}}, \qquad (1.9)$$

где $D^{(k)}=(1+n_1^{(k)}n_3^{(k)}-n_2^{(k)}n_4^{(k)})^2-4n_1^{(k)}n_3^{(k)}$.

В зависимости от значений упругих постоянных характеристическое уравнение имеет корни следующих вариантов:

Задача А (при $D^{(k)}=0$)

$$g_{1,2}^{(k)}=i\,l\,b^{(k)},\ g_{3,4}^{(k)}=-i\,l\,b^{(k)},\ b^{(k)}=\sqrt[4]{n_3^{(k)}/n_1^{(k)}}=\sqrt[4]{E_1^{(k)}/E_2^{(k)}} \qquad (1.10)$$

Задача В (при $D^{(k)}>0$)

$$\begin{aligned}
&g_{1,2}^{(k)}=\pm i\,l\,b_1^{(k)},\ g_{3,4}^{(k)}=\pm i\,l\,b_2^{(k)}\\
&b_1^{(k)}=\sqrt{\frac{1}{2n_1^{(k)}}\left[1+n_1^{(k)}n_3^{(k)}-n_2^{(k)}n_4^{(k)}-\sqrt{D^{(k)}}\right]}\\
&b_2^{(k)}=\sqrt{\frac{1}{2n_1^{(k)}}\left[1+n_1^{(k)}n_3^{(k)}-n_2^{(k)}n_4^{(k)}+\sqrt{D^{(k)}}\right]}
\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Задача С (при $D^{(k)}<0$)

$$g_{1-4}^{(k)}=\pm a^{(k)}\pm ib^{(k)},\ a^{(k)}=\sqrt{\frac{1}{2n_1^{(k)}}\left[\sqrt{n_1^{(k)}n_3^{(k)}}-\frac{1}{2}(1+n_1^{(k)}n_3^{(k)}-n_2^{(k)}n_4^{(k)})\right]}$$

$$b^{(k)}=\sqrt{\frac{1}{2n_1^{(k)}}\left[\sqrt{n_1^{(k)}n_3^{(k)}}+\frac{1}{2}(1+n_1^{(k)}n_3^{(k)}-n_2^{(k)}n_4^{(k)})\right]} \qquad (1.12)$$

В соотношениях (1.10)-(1.12) $a^{(k)}, b^{(k)}, b_1^{(k)}, b_2^{(k)}>0$.

Решение **задачи А** при корнях γ (1.10) записывается в виде

$$u_1^{(k)s}=\left[q_1^{(k)}A_1^{(k)s}-\frac{1}{l}q_2^{(k)}A_2^{(k)s}\right]\cos lb^{(k)}z_k+\left[q_1^{(k)}A_3^{(k)s}+\frac{1}{l}q_2^{(k)}A_4^{(k)s}\right]\sin lb^{(k)}z_k+$$

$$+q_1^{(k)}z_k(A_2^{(k)s}\sin lb^{(k)}z_k+A_4^{(k)s}\cos lb^{(k)}z_k)$$

$$u_2^{(k)s}=A_1^{(k)s}\sin lb^{(k)}z_k-A_2^{(k)s}z_k\cos lb^{(k)}z_k-A_3^{(k)s}\cos lb^{(k)}z_k+A_4^{(k)s}z_k\sin lb^{(k)}z_k$$

$$s_x^{(k)s}=-B_{11}^{(k)}\left[(b_1^{(k)}l\,A_1^{(k)s}-b_2^{(k)}A_2^{(k)s})\cos lb^{(k)}z_k+(b_1^{(k)}l\,A_3^{(k)s}+\right.$$

$$+b_2^{(k)}A_4^{(k)s})\sin lb^{(k)}z_k+b_1^{(k)}l\,z_k(A_2^{(k)s}\sin lb^{(k)}z_k+$$

$$\left.+A_4^{(k)s}\cos lb^{(k)}z_k)\right]\mathrm{e}^{-l\,t}$$

$$s_y^{(k)s}=-B_{22}^{(k)}\left[(b_3^{(k)}l\,A_1^{(k)s}-b_4^{(k)}A_2^{(k)s})\cos lb^{(k)}z_k+(b_3^{(k)}l\,A_3^{(k)s}+\right.$$

$$+b_4^{(k)}A_4^{(k)s})\sin lb^{(k)}z_k+b_3^{(k)}l\,z_k(A_2^{(k)s}\sin lb^{(k)}z_k+$$

$$\left.+A_4^{(k)s}\cos lb^{(k)}z_k)\right]\mathrm{e}^{-l\,t}$$

$$t_{xy}^{(k)s}=G_{12}^{(k)}\left[-(b_5^{(k)}l\,A_1^{(k)s}-b_6^{(k)}A_2^{(k)s})\sin lb^{(k)}z_k+(b_5^{(k)}l\,A_3^{(k)s}+\right. \qquad (1.13)$$

$$+b_6^{(k)}A_4^{(k)s})\cos lb^{(k)}z_k+b_5^{(k)}l\,z_k(A_2^{(k)s}\cos lb^{(k)}z_k-$$

$$\left.-A_4^{(k)s}\sin lb^{(k)}z_k)\right]\mathrm{e}^{-l\,t},$$

где $b^{(k)}=1,\ n_1^{(k)}=(1-n^{(k)})/2,\ n_2^{(k)}=(1+n^{(k)})/2,\ n_1^{(k)}+n_2^{(k)}=1$

$n_{12}^{(k)}=n_{21}^{(k)}=n^{(k)}$ – коэффициент Пуассона. И тогда

$$q_1^{(k)}=1,\quad q_2^{(k)}=(1+n_1^{(k)})/n_2^{(k)},\quad b_1^{(k)}=1-n^{(k)},\quad b_2^{(k)}=(1+n_1^{(k)})/n_2^{(k)}-n^{(k)},$$

$$b_3^{(k)}=n^{(k)}-1,\quad b_4^{(k)}=n^{(k)}(1+n_1^{(k)})/n_2^{(k)}-1,\quad b_5^{(k)}=2,\quad b_6^{(k)}=2/n_2^{(k)}.$$

Задача В имеет место для ортотропного материала при $\sqrt{E_1^{(k)}E_2^{(k)}}>2G_{12}^{(k)}$ (сдвиговая жесткость $2\,G_{12}^{(k)}$ меньше, чем средняя жесткость на растяжение-сжатие $\sqrt{E_1^{(k)}E_2^{(k)}}$).

Решение задачи **В** записывается

$$
\begin{aligned}
u_1^{(k)s} &= -q_1^{(k)} A_1^{(k)s} \sin l b_1^{(k)} z_k + q_1^{(k)} A_2^{(k)s} \cos l b_1^{(k)} z_k - \\
&\quad - q_2^{(k)} A_3^{(k)s} \sin l b_2^{(k)} z_k + q_2^{(k)} A_4^{(k)s} \cos l b_2^{(k)} z_k \\
u_2^{(k)s} &= A_1^{(k)s} \cos l b_1^{(k)} z_k + A_2^{(k)s} \sin l b_1^{(k)} z_k + A_3^{(k)s} \cos l b_2^{(k)} z_k + \\
&\quad + A_4^{(k)s} \sin l b_2^{(k)} z_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_x^{(k)s} &= B_{11}^{(k)} l \,(b_1^{(k)} A_1^{(k)s} \sin l b_1^{(k)} z_k - b_1^{(k)} A_2^{(k)s} \cos l b_1^{(k)} z_k + \\
&\quad + b_2^{(k)} A_3^{(k)s} \sin l b_2^{(k)} z_k - b_2^{(k)} A_4^{(k)s} \cos l b_2^{(k)} z_k) e^{-l t}
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
s_y^{(k)s} &= -B_{22}^{(k)} l \,(b_3^{(k)} A_1^{(k)s} \sin l b_1^{(k)} z_k - b_3^{(k)} A_2^{(k)s} \cos l b_1^{(k)} z_k + \\
&\quad + b_4^{(k)} A_3^{(k)s} \sin l b_2^{(k)} z_k - b_4^{(k)} A_4^{(k)s} \cos l b_2^{(k)} z_k) e^{-l t} \\
t_{xy}^{(k)s} &= -G_{12}^{(k)} l \,(b_5^{(k)} A_1^{(k)s} \cos l b_1^{(k)} z_k + b_5^{(k)} A_2^{(k)s} \sin l b_1^{(k)} z_k + \\
&\quad + b_6^{(k)} A_3^{(k)s} \cos l b_2^{(k)} z_k + b_6^{(k)} A_4^{(k)s} \sin l b_2^{(k)} z_k) e^{-l t},
\end{aligned}
$$

где

$$
q_1^{(k)} = \frac{n_2^{(k)} b_1^{(k)}}{1 - n_1^{(k)} b_1^{(k)2}}, \quad q_2^{(k)} = \frac{n_2^{(k)} b_2^{(k)}}{1 - n_1^{(k)} b_2^{(k)2}}
$$

$$
\begin{aligned}
& b_1^{(k)} = q_1^{(k)} - n_{12}^{(k)} b_1^{(k)}, \; b_2^{(k)} = q_2^{(k)} - n_{12}^{(k)} b_2^{(k)} \\
& b_3^{(k)} = b_1^{(k)} - n_{21}^{(k)} q_1^{(k)}, \; b_4^{(k)} = b_2^{(k)} - n_{21}^{(k)} q_2^{(k)} \\
& b_5^{(k)} = 1 + q_1^{(k)} b_1^{(k)}, \; b_6^{(k)} = 1 + q_2^{(k)} b_2^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Задача С, имеющая место для ортотропного материала при $\sqrt{E_1^{(k)} E_2^{(k)}} < 2G_{12}^{(k)}$, в данной статье не рассматривается.

В различных вариантах решений задач **А** (1.13), **В** (1.14) и **С** содержится неизвестный параметр λ, который определяется из условия существования ненулевого решения относительно постоянных $A_1^{(k)s}, ... A_4^{(k)s}$. Для получения этого условия необходимо использовать статические краевые условия на лицевых поверхностях полосы $t_{xy}^{(1)s} = s_y^{(1)s} = 0$ при $z_1 = -a_1$, $t_{xy}^{(n)s} = s_y^{(n)s} = 0$ при $z_n = a_n$ и условия непрерывности функций $u^{(k)s}$, $\mathrm{v}^{(k)s}$, $t_{xy}^{(k)s}$, $s_y^{(k)s}$ при переходе от слоя k к k+1. Для n – слойной полосы задача сводится к решению однородной алгебраической системы уравнений порядка 4n, которая имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов этой системы уравнений, будет равен нулю. Задача сводится к собственной проблеме для определителя, элементами которого являются степенные и тригонометрические функции.

2. Численное решение задачи краевого эффекта. Используется численный подход с помощью системы “Математика-5”, которая обладает набором операторов, упрощающих решение собственной проблемы.

Программа состоит из следующих операторов:

$\overline{U} = Array\left[u, \{n, n\}\right]$ – образование квадратной матрицы размером n.

Как отмечалось, тело матрицы состоит из статических условий на лицевых поверхностях полосы при $z_1 = -a_1$, $t_{xy}^{(1)s} = s_y^{(1)s} = 0$, при $z_n = a_n$, $t_{xy}^{(n)s} = s_y^{(n)s} = 0$ и условий непрерывности функций $u^{(k)s}$, $\mathrm{v}^{(k)s}$, $t_{xy}^{(k)s}$, $s_y^{(k)s}$ при переходе от слоя k к k+1.

$f = Det[u]$ – получение определителя матрицы в символическом виде.

$p = Chop[\,f\,]$ – данный оператор упрощает полученное выражение определителя, заменяя приближенные вещественные числа, близкие к нулю, точным нулем. Принят оператор, который за нуль принимает число, значения которого меньше 10^{-10}.

$Plot[p]$ – оператор, который строит график функции p в заданном интервале для визуального приближенного определения корней уравнения.

$FindRoot\left[p == 0, \left\{l\,, l_0, l_1\right\}\right]$ – данный оператор определяет комплексный корень с заданной точностью в интервале λ_0,λ_1.

На основе данного подхода рассмотрен целый ряд двухслойных, трехслойных и пятислойных полос со слоями из различных материалов. Эти задачи сводятся к квадратным матрицам 6-ого, 8-ого, 10-ого и 12-ого порядков, которые решаются практически мгновенно.

Для получения достаточно точного решения необходимо определить некоторое число первых значений λ. Остановимся на первых десяти корнях. Наибольшее внимание уделено первому корню λ_1, который характеризует глубину проникновения краевого эффекта вглубь полосы [1].

Задача A_1A_2. Рассматривается двухслойная полоса из двух разных изотропных материалов: в программу вводится $E^{(k)}, n^{(k)}, a_k$ (k=1,2). Вычисляются

$$B_{11}^{(k)} = B_{22}^{(k)} = E^{(k)} / (1 - n^{(k)2}), \quad G_{12}^{(k)} = E^{(k)} / \left(2(1 + n^{(k)})\right), \quad g_2^{(k)}, \qquad b_i^{(k)} (i = 1, \ldots, 6).$$

По программе проследим влияние различных параметров на решение.

Влияние модулей упругости $E = E^{(2)} / E^{(1)}$ (1, 5, 10, 100) при одинаковых коэффициентах Пуассона $n^{(1)} = n^{(2)} = 0.3$ и одинаковых толщинах слоев $a_1 = a_2 = 0.5$ приведено в таблице 1.

Из таблицы 1 видно, что при E=1 имеем однослойную полосу, и корни этой задачи совпали полностью с известными результатами [1]. С увеличением параметра E до 5 видно, что первый корень практически не меняется,

Таблица 1

$l_n = X_n + iY_n$				
E / λ_n	1		5	
	X_n	Y_n	X_n	Y_n
λ_1	2.10620	1.12536	2.05577	0
λ_2	3.74884	1.38434	2.51661	1.08063
λ_3	5.35627	1.55157	4.25374	1.92259
λ_4	6.94998	1.67610	5.93686	1.97222
λ_5	8.53668	1.77554	7.52867	2.46605
λ_6	10.1193	1.85838	9.15950	2.40336
λ_7	11.6992	1.92940	10.7361	2.80825
λ_8	13.2773	1.99157	12.3472	2.69824
λ_9	14.8541	2.04685	13.9189	3.06074
λ_{10}	16.4299	2.09663	15.5195	2.92403

Таблица 1 (продолжение)

$l_n = X_n + iY_n$				
E / λ_n	10		100	
	X_n	Y_n	X_n	Y_n
λ_1	1.52781	0	1.03885	0
λ_2	2.57468	1.23577	2.58566	1.34856
λ_3	4.23642	2.08502	4.21506	2.23369
λ_4	5.93072	2.06899	5.92381	2.14754
λ_5	7.51424	2.61385	7.49944	2.75264
λ_6	9.15319	2.49166	9.14733	2.56499
λ_7	10.7249	2.95173	10.7138	3.08743
λ_8	12.3418	2.78362	12.3370	2.85507
λ_9	13.9098	3.20233	13.9010	3.33663
λ_{10}	15.5149	3.00802	15.5110	3.07858

но становится вещественным числом. В дальнейшем первый корень уменьшается и при E=1000 λ_1 =0.98003, что свидетельствует о более чем двукратном увеличении глубины проникновения краевого эффекта по координате *t* (до четырех толщин полосы).

Различие в коэффициентах Пуассона в слоях ($n^{(1)} = 0.2$, $n^{(2)} = 0.4$) практически не сказывается на глубине проникновения погранслоя (таблица 2 при $a_1 = a_2 = 0.5$).

Таблица 2

$l_n = X_n + iY_n$				
E / λ_n	1		100	
	X_n	Y_n	X_n	Y_n
λ_1	2.11179	1.12733	1.10134	0
λ_2	3.75200	1.37602	2.59495	1.26499
λ_3	5.37564	1.53941	4.21524	2.23222
λ_4	6.95927	1.64514	5.93157	2.08260
λ_5	8.57374	1.73387	7.49957	2.75128
λ_6	10.1385	1.78680	9.15296	2.50316
λ_7	11.7613	1.83743	10.7139	3.08610
λ_8	13.3147	1.85162	12.3414	2.79432
λ_9	14.9619	1.87028	13.9011	2.33532
λ_{10}	16.5132	1.83373	15.5145	3.01835

Таблица 3

$l_n = X_n + iY_n$				
E / λ_n	$a_1 = 0.7,\ a_2 = 0.3$		$a_1 = 0.9,\ a_2 = 0.1$	
	X_n	Y_n	X_n	Y_n
λ_1	0.984903	0	1.63093	1.20692
λ_2	1.82134	0.968542	2.17666	0
λ_3	4.23056	1.53307	3.20671	1.21035
λ_4	6.53358	1.83146	5.06505	1.41901
λ_5	8.81199	2.03903	6.84907	1.58184
λ_6	11.0792	2.19878	8.61576	1.70774
λ_7	13.3400	2.32892	10.3752	1.81004
λ_8	15.5968	2.43886	12.1308	1.89615
λ_9	17.8510	2.53401	13.8841	1.97049
λ_{10}	20.1033	2.61794	15.6358	2.03591

Влияние толщин α_n слоев при E=100 и $n^{(1)} = n^{(2)} = 0.3$ представлено в таблице 3.

Задача AB имеет место для двухслойной полосы, где первый слой из изотропного материала, а второй – из ортотропного материала. В качестве изотропного материала выбрана сталь ($E^{(1)}=2\cdot10^5$МПа, $n^{(1)}=0.3$), а в качестве ортотропного материала – стеклопластик намоточный однонаправленный [1] ($E_1^{(2)}=5.59\cdot10^4$МПа, $E_2^{(2)}=1.37\cdot10^4$МПа, $G_{12}^{(2)}=0.559\cdot10^4$МПа, $n_{12}^{(2)}=0.277$). Необходимо отметить, что в [1] при перечисленных характеристиках материала второго слоя неверно вычислены корни решения b_1, b_2, которые в действительности имеют значения $b_1 = 0.7537,\ b_2 = 2.6785$, а не $b_1 = 0.671,\ b_2 = 3.0$, что сильно влияет на определение l_i.

В таблице 4 приведены только первые корни (λ_1) при различных толщинах слоев, что дает возможность показать влияние соотношения толщин слоев на глубину проникновения краевых эффектов. Наибольшее проникновение имеет место при α_1=0.6 и α_2=0.4 (λ_1=0.982905).

Из таблицы 4 видно, что при α_1=1, α_2=0 имеем полосу из изотропного материала и ее первый корень решения совпадает с известным [1] и приведенным в таблице 1 данной статьи. Действительная часть этого корня указывает на глубину распространения краевого эффекта порядка двух толщин полосы. При α_1=0 и α_2=1 имеем полосу из стеклопластика намоточного однонаправленного с λ_1=1.32721 и, следовательно, краевой эффект распространяется в глубь полосы на три толщины. Еще большую глубину проникновения краевого эффекта для двухслойной полосы имеем при α_1=0.6, α_2=0.4 (λ_1=0.982905), что соответствует проникновению краевого эффекта на глубину порядка четырех толщин. Очевидно, можно найти такие материалы, для которых λ_1 будет еще меньше. Такой краевой эффект нельзя считать быстроубывающим. Для таких полос напряженно-деформированное состояние нельзя разбивать на основное и краевой эффект, а необходимо точно решать плоскую задачу теории упругости с учетом всех факторов совместно.

При вычислении корней этой задачи были отмечены факты постепенного перехода от комплексного значения корней к действительным и сильного влияния отношения механических характеристик слоев и отношения толщин слоев на значения корня.

Задача B_1B_2 соответствует двухслойной полосе из двух разных ортотропных материалов. Рассмотрен вариант, когда первым слоем является стеклопластик намоточный однонаправленный, а вторым – фанера марки БС-1[1] ($E_1^{(2)}=1.08\cdot10^4$МПа, $E_2^{(2)}=0.834\cdot10^4$МПа, $G_{12}^{(2)}=0.0883\cdot10^4$МПа, $n_{12}^{(2)}=0.076$, $b_1^{(2)} = 0.33$, $b_2^{(2)} = 3.4523$). Корни $b_1^{(2)},\ b_2^{(2)}$ также отличаются от приведенных в [1] ($b_1^{(2)} = 0.231,\ b_2^{(2)} = 4.923$). Для этих материалов в таблице 5 приведены решения для однослойных полос из каждого отдельного материала, которые, как и следовало ожидать, несколько отличаются от известных [1].

Согласно [1] для стеклопластика намоточного однонаправленного λ_1=1.1158, а для фанеры λ_1=0.6897, что значительно завышает глубину проникновения краевого эффекта. Для двухслойной полосы из этих материалов при α_1=α_2=0.5 имеем λ_1=0.765115, что меньше каждого отдельного корня.

Таблица 4

α_1	α_2	Первый корень
1	0	2.1062+1.12536i
0.9	0.1	2.2973+1.15310i
0.8	0.2	1.38810
0.7	0.3	1.05998
0.6	0.4	0.982905
0.5	0.5	1.04602
0.4	0.6	1.28022
0.3	0.7	1.33419
0.2	0.8	1.32871
0.1	0.9	1.19880
0	1	1.32721

Задача $A_1A_2A_3$ описывает полосу из трех различных изотропных материалов (матрица двенадцатого порядка). Из этой программы легко получить программу для полос регулярного строения: **задача $A_1A_2A_1$**(с) – симметричная задача (задача растяжения-сжатия полосы), **задача $A_1A_2A_1$**(к) – кососимметричная задача (задача изгиба). В этом случае матрица уменьшается до шестого порядка. Аналогично построены матрицы для трехслойных полос $\mathbf{A_1BA_2}$ и $\mathbf{B_1B_2B_3}$, в которых выделены симметричные (**ABA**(с), $\mathbf{B_1B_2B_1}$(с)) и кососимметричные (**ABA**(к), $\mathbf{B_1B_2B_1}$(к)) задачи. Для пятислойных полос регулярного строения, для симметричных и кососимметричных задач имеем матрицы десятого порядка: $\mathbf{A_1A_2A_3A_2A_1}$ **(**$\mathbf{A_1A_2A_1A_2A_1}$), $\mathbf{A_1BA_2BA_1}$ **(**$\mathbf{A_1BA_1BA_1}$ **),** $\mathbf{AB_1B_2B_1A}$**,** $\mathbf{A_1A_2BA_2A_1}$**,** $\mathbf{B_1B_2B_3B_2B_1}$ **(**$\mathbf{B_1B_2B_1B_2B_1}$**).**

Для задачи $\mathbf{A_1A_2A_1}$ получены решения симметричной и кососимметричной задач, решения которых приведены в таблице 6 для $E^{(1)}=E^{(3)}=1$, $E^{(2)}=0.1$, $n^{(1)}=n^{(2)}=n^{(3)}=0.3$ и $\alpha_1=0.1$, $\alpha_2=0.8$ $(2\alpha_1+\alpha_3=1)$ при $\lambda_к=X_к+iY_к$.

Таблица 5

λ_i	Стеклопластик намоточный однонаправленный	Фанера марки БС-1
λ_1	1.32721	0.918516
λ_2	1.73068	1.30659
λ_3	2.16307+0.425169i	1.83888
λ_4	3.01995	2.24533
λ_5	3.45669	2.76505
λ_6	4.14926+0.45846i	3.16924
λ_7	4.73945	3.71410
λ_8	5.16917	4.08887
λ_9	6.14545+0.37389i	4.69783+0.31551i
λ_{10}	6.46799	5.00723

Таблица 6

Корни	Симметричная задача		Кососимметричная задача	
λ_i	X_n	Y_n	X_n	Y_n
λ_1	1.75531	0.821598	3.37711	1.67744
λ_2	5.47628	0	4.90763	0
λ_3	8.67734	1.44674	6.45065	1.16000
λ_4	12.6742	1.74418	10.6926	1.61876
λ_5	16.6142	1.92455	14.6457	1.84298
λ_6	20.5505	2.05705	18.5822	1.99460
λ_7	24.4874	2.16790	22.5191	2.11441
λ_8	28.4210	2.26413	26.4547	2.21782
λ_9	32.3517	2.34638	30.3866	2.30688
λ_{10}	36.2822	2.41766	34.3169	2.38311

Таблица 7

λ_i	Симметричная задача	Кососимметричная задача
λ_1	1.32721	1.743073
λ_2	2. 16269+0.424865i	3.02005
λ_3	3.45681	4.14849+0.458391i
λ_4	4.73957	5.16944
λ_5	6.14405+0.374618i	6.46814
λ_6	6.83623	7.8668
λ_7	8.19935	8.45449+0.327658i
λ_8	9.50599	9.92893
λ_9	10.4626+0.451268i	11.2131
λ_{10}	11.6513	12.4466+0.442347i

Сравнение X_1 симметричной и кососимметричной задач показывает, что краевой эффект в симметричной задаче распространяется на глубину, в два с половиной раза большую, чем в задаче изгиба. Это совпадает с однослойными полосами из изотропного материала, но глубина проникновения краевого эффекта в задаче $\mathbf{A_1A_2A_1}$ несколько выше, чем для однослойных полос.

Если задачу $\mathbf{B_1B_2B_1}$ использовать для однослойной полосы из стеклопластика намоточного однонаправленного (α_1=0.25, α_2=0.5), то для симметричного и кососимметричного вариантов имеем корни, которые приведены в таблице 7.

При использовании задачи $\mathbf{B_1B_2B_1}$ для однослойной полосы (таблица 7), как и при использовании задачи $\mathbf{B_1B_2}$ для однослойных полос (таблица 5), отмечается несоответствие с данными Л.А. Агаловяна [1], что связано с неверным вычислением в [1] корней решения $b_1^{(2)}$, $b_2^{(2)}$.

Для однослойных полос задачи **B** характеристические уравнения легко получить аналитически. Так, в [1] для однослойной полосы получены уравнения:

для симметричной задачи

$$b_2 \sin l b_2 \cdot \cos l b_1 - b_1 \sin l b_1 \cdot \cos l b_2 = 0, \tag{2.1}$$

для кососимметричной задачи

$$b_2 \sin l b_1 \cdot \cos l b_2 - b_1 \sin l b_2 \cdot \cos l b_1 = 0. \tag{2.2}$$

В работе автора [3] аналогичные уравнения имеют вид:

для симметричной задачи

$$b_3 b_6 \sin l b_2 \cdot \cos l b_1 - b_4 b_5 \sin l b_1 \cdot \cos l b_2 = 0, \tag{2.3}$$

для задачи изгиба

$$b_3 b_6 \sin l b_1 \cdot \cos l b_2 - b_4 b_5 \sin l b_2 \cdot \cos l b_1 = 0. \tag{2.4}$$

Из уравнений (2.1-2.4) следует соотношение

$$b_3 b_6 / b_4 b_5 = b_2 / b_1 \tag{2.5}$$

Автору не удалось доказать соотношение (2.5) в общем виде, но численные проверки для каждого частного варианта задачи показывают правильность этого соотношения.

Определение НДС полосы происходит по соотношениям (1.13) для изотропного слоя (материал класса **A**) и по (1.14) для ортотропного материала класса **B.** В эти соотношения входят неопределенные пока коэффициенты A_i (i=1,...4) асимптотического разложения. Они должны быть найдены из краевых условий при $t=0$. Для удовлетворения краевых условий и вычисления постоянных A_i необходимо использовать метод граничной коллокации [1].

В работе рассмотрены только задачи многослойных полос (плоский краевой эффект) для матриц не выше двенадцатого порядка для материалов класса **A** и **B.** Объем матриц ограничен скоростью решения задачи по определению корней уравнения на ПЭВМ. Для матрицы выше двенадцатого порядка для подбора одного комплексного корня требуется на один вариант решения несколько минут времени. Если приходится долго искать первый корень, то на весь диапазон корней уходит достаточно много времени.

Автор не рассматривает в работе материалы класса **C**, ввиду незначительного числа таких ортотропных материалов.

Литература

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. – М.: Наука, 1997. – 414 с.
2. Бутенко Ю.И. Определение погранслоев в плоской задаче для трехслойных полос. Ч. 1 // Изв. РАН МТТ, 2008, № 4. – С. 58-76.
3. Бутенко Ю.И. Краевые эффекты в двухслойных и трехслойных полосах и пластинах. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2008. – 152 с.
4. Бутенко Ю.И. Определение погранслоев в плоской задаче для трехслойных полос. Ч. 2 // Изв.РАН МТТ, 2009, № 1. – С. 136-146.
5. Артюхин Ю.П., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. Система Математика 4.0 и ее приложения в механике. – Казань – Набережные Челны: Изд-во КамПИ, 2002. – 415 с.