

УДК 515.2: 624.04

А.А. Абдюшев – старший научный сотрудник

Тел.: (843) 272-42-45, e-mail: YZSRR@kfti.knc.ru

И.Х. Мифтахутдинов – кандидат технических наук, старший научный сотрудник

Тел.: (843) 231-91-15, e-mail: mift1943@mail.ru

П.П. Осипов – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник

Тел.: (843) 231-91-17, e-mail: ossipov@kfti.knc.ru

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук (ИММКНЦ РАН)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

АННОТАЦИЯ

Разработан программный комплекс для построения минимальных поверхностей, широко применяемых в архитектуре. Для построения оболочек со сложной конфигурацией применена технология многоуровневых адаптивных сеток. Приведено сравнение результатов построения оболочек по двум моделям, описываемым уравнениями Лапласа и Эйлера-Лагранжа. Дан анализ сходимости итерационных алгоритмов вычисления и точности представления минимальных поверхностей по различным моделям.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: непологие оболочки, минимальные поверхности, уравнения Эйлера-Лагранжа, Лапласа.

A.A. Abdiushev – senior staff scientist

Tel.: (843) 272-42-45, e-mail: YZSRR@kfti.knc.ru

I.H. Miftakhutdinov – candidate of technical sciences, senior staff scientist

Tel.: (843) 231-91-15, e-mail: mift1943@mail.ru

P.P. Osipov – doctor of physical-mathematical sciences, leading staff scientist

Tel.: (843) 231-91-17, e-mail: ossipov@kfti.knc.ru

Institute Mechanical engineers and Machine building of Kazan Scientific Centre of Russia Academy of Sciences (IMMKSC RAS)

DESIGN OF STEEP SHELLS WITH MINIMAL SURFACE

ABSTRACT

The simulator generating widely used in architecture minimal surfaces is developed. The technology of multilevel adaptive grids for generation of shells having complex shape is applied. The comparison of numerical results for two models corresponding to Laplace and Euler-Lagrange equations is presented. The analysis of convergence of iteration algorithms and quality of minimal surface representation for two models is given.

KEYWORDS: steep shells, minimal surfaces, Euler-Lagrange, Laplace equations.

Введение

Формы минимальных поверхностей (МП) и уравнения, их описывающие, известны из работ Л. Эйлера (1755) и Ж.Л. Лагранжа (1760). В 1861 году бельгийский физик Ж. Плато показал всему миру эти поверхности в виде мыльной пленки, натянутой на проволочный каркас. В настоящее время широко известен ряд минимальных поверхностей [1, 2, 3, 4]. В экспериментальной работе [2] показано, что при описании МП можно приближенно пользоваться уравнением Лапласа. Условно назовем получаемые при этом поверхности поверхностями Лапласа (ПЛ). Широкому применению МП в архитектуре и

строительстве способствует их привлекательный архитектурно-выразительный внешний вид, поскольку они созданы самой природой. Их оптимальность заключается в минимальном расходе материалов, а также в уменьшении теплообмена с внешней средой. Начало применению МП в архитектуре и строительстве положил известный немецкий архитектор и инженер Ф. Отто. В лаборатории Штутгартского университета (ФРГ) под его руководством проведено большое количество экспериментов с мыльными пленками, тонкими резиновыми шнурами, тканевыми и металлическими сетями для нахождения МП. Эти



эксперименты нашли воплощение во многих тентовых и сетчатых (вантовых) конструкциях, запроектированных и построенных под руководством Ф.Отто. Среди них павильон ФРГ в Монреале (1967) из тентовой конструкции, светопрозрачное сетчатое покрытие трибун Олимпийского стадиона в Мюнхене (1972), прозрачная конструкция выставочного павильона в Мангейме (1978) и др.

Отечественными учеными также внесен определенный вклад в разработку теории МП и внедрению их в практику строительства: тентовое покрытие под куполом в молодежном лагере близ Казани (1967), тентовые и полимерные покрытия над рыночными павильонами Казани и Татарстана (Блинов Ю.И., Сладков В.А., Удлер Е.М., Мифтахутдинов И.Х. и др.).

В настоящее время появились дорогостоящие программные комплексы (NASTRAN, ANSYS, CosmosWorks), позволяющие, в частности, рассчитывать геометрию оболочек, заданных на сложных в плане областях. В настоящей работе представлены результаты вычислений геометрии МП с использованием авторских программных разработок.

Математическая модель

Уравнение поверхности. МП характеризуются тем, что при заданных граничных условиях их средняя кривизна в любой точке равна нулю [2, 4]. Аппликаты этих поверхностей в декартовой системе координат удовлетворяют уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

или в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(m \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(m \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

$$m = \left\{ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\}^{-0.5}. \quad (1)$$

Для пологих оболочек подъемности вдоль осей малы, т.е. $\partial z / \partial x \ll 1$ и $\partial z / \partial y \ll 1$, и поэтому $m \approx 1$. Для них хорошим приближением служит решение уравнения Лапласа, которое получается из (1) при $m = 1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Для подъемистых оболочек величина m может значительно отличаться от единицы, и уравнение Лапласа неадекватно описывает МП.

Граничные условия. Основные граничные условия, применяемые в архитектуре и строительстве, сводятся к условиям Дирихле. На границе G области задается проектная высота поверхности (аппликата)

$$z|_G = w(x(t), y(t)), \text{ или } z|_G = w(t), \quad (3)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – параметрические уравнения участков границ.

Алгоритм определения поверхности

Записав уравнение (1) в конечных разностях на девятиточечном шаблоне равномерной сетки (рис. 1) и обозначив $T_{i,j} = z(x_i, y_j)$, получим:

$$T_{i,j} = g_1 T_{i+1,j} + g_2 T_{i,j+1} + g_3 T_{i-1,j} + g_4 T_{i,j-1}, \quad (4)$$

$$\text{где } g_k = \frac{m_k}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}, \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

$$m_1 = \left\{ 1 + \left((T_{i+1,j} - T_{i,j}) / h \right)^2 + \left((T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} - T_{i,j-1}) / (4h) \right)^2 \right\}^{-0.5},$$

$$m_2 = \left\{ 1 + \left((T_{i+1,j+1} + T_{i+1,j} - T_{i-1,j+1} - T_{i-1,j}) / (4h) \right)^2 + \left((T_{i,j+1} - T_{i,j}) / h \right)^2 \right\}^{-0.5},$$

$$m_3 = \left\{ 1 + \left((T_{i,j} - T_{i-1,j}) / h \right)^2 + \left((T_{i-1,j+1} + T_{i,j+1} - T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}) / (4h) \right)^2 \right\}^{-0.5},$$

$$m_4 = \left\{ 1 + \left((T_{i+1,j} + T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j-1} - T_{i-1,j}) / (4h) \right)^2 + \left((T_{i,j} - T_{i,j-1}) / h \right)^2 \right\}^{-0.5}. \quad (5)$$

Уравнение (4) решается с помощью метода последовательных приближений, т.е. итераций ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$T_{i,j}^{n+1} = g_1^n T_{i+1,j}^n + g_2^n T_{i,j+1}^n + g_3^n T_{i-1,j}^n + g_4^n T_{i,j-1}^n \quad (6)$$

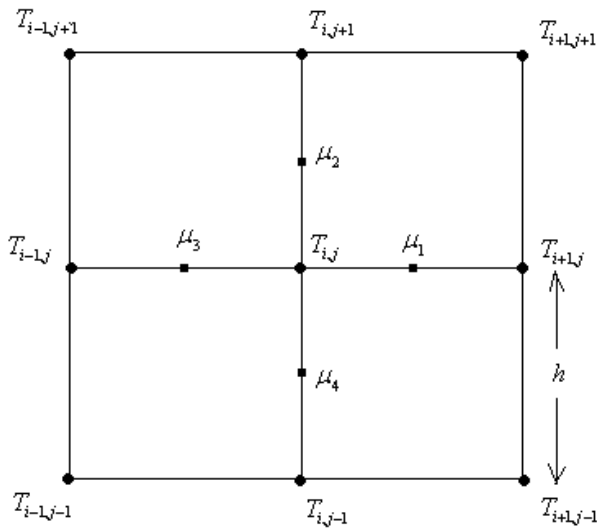


Рис. 1. Девятиточечный шаблон

где индексы i, j пробегает по внутренним узлам сетки.

Процесс устойчив, поскольку все $g_k^n > 0$ и

$g_1^n + g_2^n + g_3^n + g_4^n = 1$. Устойчивость гарантирует то, что итерация не расходится, но не гарантирует ее сходимости. Наши численные эксперименты неизменно показывали сходимость метода (6).

Для пологих оболочек все $m_k^n \approx 1$ и $g_k^n \approx 1/4$. Заметим, что при численном решении уравнения Лапласа можно использовать итерацию (6), положив все $g_k^n = 1/4$. В этом случае достаточно пятиточечного шаблона «крест».

Расчет МП на равномерных сетках

В качестве тестового примера была выбрана поверхность Шерка [1, 3]

$$z = \frac{1}{a} \log(\cos(ay) / \cos(ax)). \quad (7)$$

Был рассмотрен случай $a = 1$ для диапазона $x, y \in [-\arctg(k), \arctg(k)]$; $k > 0$. Здесь k – модуль градиента функции $z(x, y)$ на границе рассматриваемой области. Можно убедиться, что эта поверхность точно удовлетворяет уравнению (1). На рис. 2 показаны соответствующие участки поверхности Шерка при разных значениях подъемности k .

В таблице 1 приведены максимальные относительные погрешности расчета узловых аппликат поверхности Шерка (7) по уравнениям Лапласа (2) и Эйлера-Лагранжа (1). Погрешности отнесены к максимальному диапазону аппликат. Была использована равномерная квадратная сетка при трех вариантах числа разбиения N .

Расчет проводился до тех пор, пока модуль средней разности значений аппликат для двух последовательных итераций не становился меньше $5 \cdot 10^{-7}$. Расчеты проводились с привлечением программных средств АРС ЭРА ПК2000 [5]. Анализ результатов показывает, что для построения МП применение уравнения Лапласа является приемлемым с практической точки зрения при подъемности $k \leq 1$. При $k > 1$ построение МП необходимо проводить с применением уравнения Эйлера-Лагранжа [4]. При этом следует отметить, что сходимость итерационного процесса к ПЛ, организованного по пятиточечному шаблону, происходила в среднем в два раза быстрее процесса итерирования к МП по девятиточечному шаблону.

Расчет МП на нерегулярных сетках

При построении сеток для произвольных областей использована технология многоуровневых сеток [6]. Такие сетки состоят из квадратных ячеек, получаемых многократной бисекцией крупной декартовой сетки.

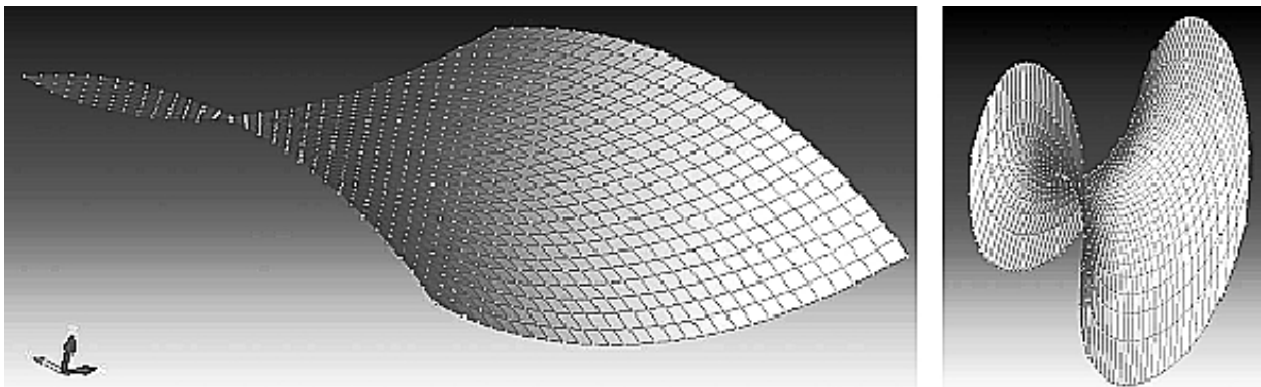


Рис. 2. Участки поверхности Шерка. Слева: $k = 0.5$; справа: $k = 10$

Таблица 1

N	Лаплас	Эйлер-Лагранж
$k = 0.2$		
10	0.000833	0
30	0.000904	0
50	0.000908	0
$k = 0.5$		
10	0.004820	0.000011
30	0.005203	0.000001
50	0.005219	0.000000
$k = 1.0$		
10	0.015577	0.000139
30	0.016607	0.000016
50	0.016621	0.000006
$k = 5.0$		
10	0.083611	0.006885
30	0.084412	0.001285
50	0.084476	0.000509
$k = 10.0$		
10	0.119564	0.014674
30	0.120620	0.004707
50	0.120703	0.001925

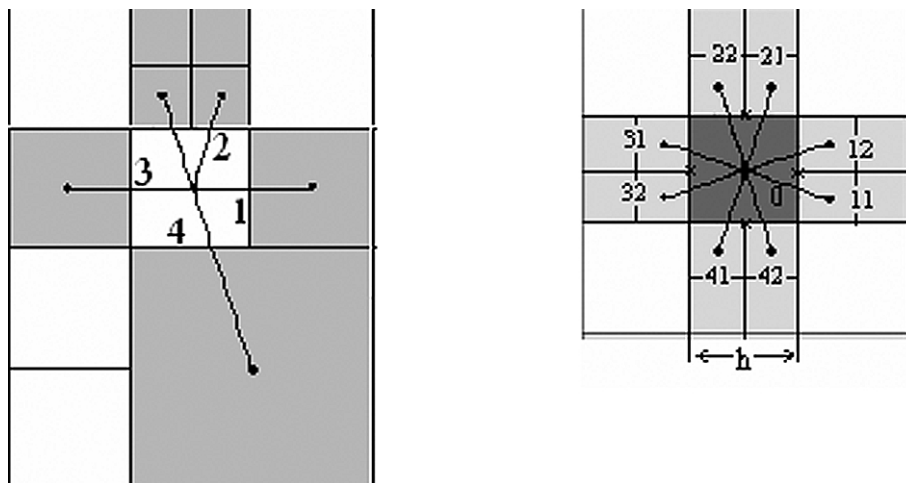


Рис. 3. Нумерация сторон ячейки и смежных ячеек

Типичный пример ячейки и смежных ячеек изображен на рис. 3. Ранг ячейки характеризует число бисекций (размер ячейки). Чем выше ранг, тем больше ячейка. При этом правило рангов требует, чтобы ранг ячейки отличался не более чем на единицу от рангов смежных ячеек. В центре ячейки задана аппликата. Для получения девятиточечного шаблона определяются аппликаты на серединах сторон и в углах ячейки

(жирные точки на рис. 4 и 5). Для этого используется линейная интерполяция. В таблице 2 приведены формулы вычисления аппликаты Λ_1 для середины первой стороны в зависимости от рангов и положения смежных ячеек. Для других сторон формулы вычисления аппликат Λ_2 , Λ_3 , Λ_4 получаются аналогично.

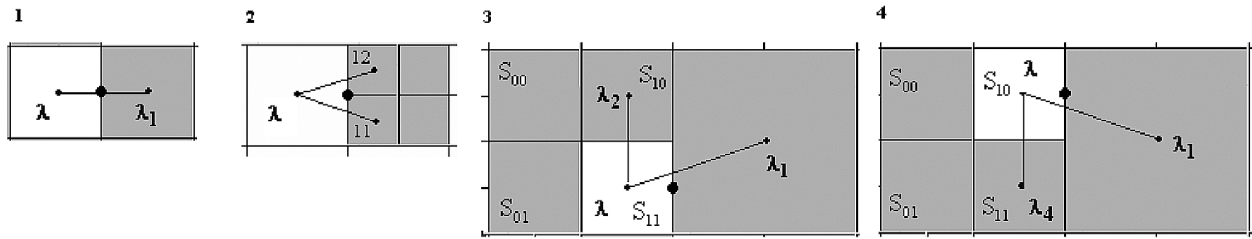


Рис. 4. Варианты вычисления аппликаты в середине первой стороны

Таблица 2

1 – ячейка справа имеет тот же ранг	2 – две ячейки справа имеют меньший ранг	3 – ячейка справа имеет больший ранг, чем S_{11}	4 – ячейка справа имеет больший ранг, чем S_{10}
$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda}{2}$	$\Lambda_1 = \frac{\lambda + \lambda_{11} + \lambda_{12}}{3}$	$\Lambda_1 = \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{3}\lambda_1 - \frac{1}{6}\lambda_2$	$\Lambda_1 = \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{3}\lambda_1 - \frac{1}{6}\lambda_4$

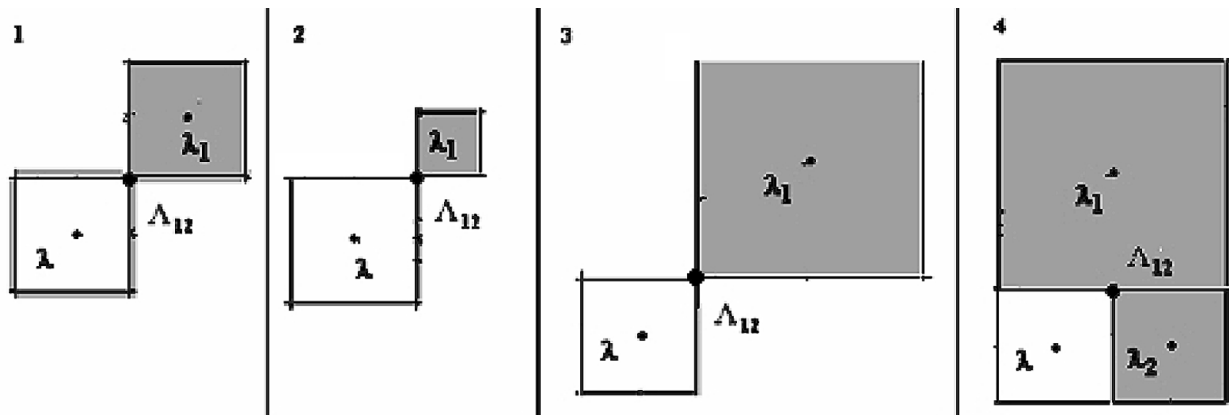


Рис. 5. Варианты вычисления аппликаты для угла 12

Таблица 3

1 – угловая ячейка имеет тот же ранг	2 – угловая ячейка имеет меньший ранг	3 – угловая ячейка имеет больший ранг	4 – угловая ячейка имеет больший ранг и является одновременно верхней ячейкой
$\Lambda_{12} = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda_1$	$\Lambda_{12} = \frac{1}{3}\lambda + \frac{3}{3}\lambda_1$	$\Lambda_{12} = \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3}\lambda_1$	$\Lambda_{12} = \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2$

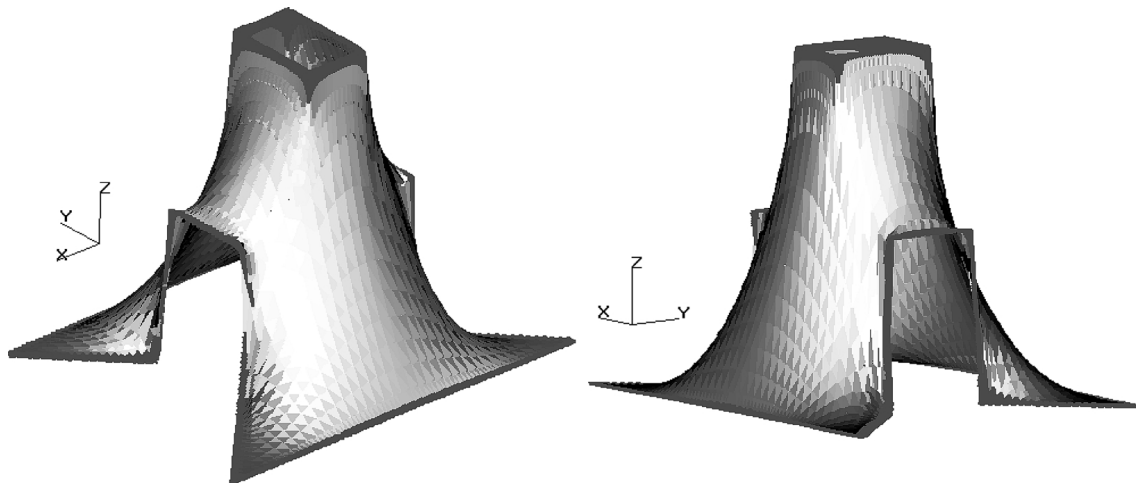


Рис. 6. Минимальная поверхность сложной конфигурации

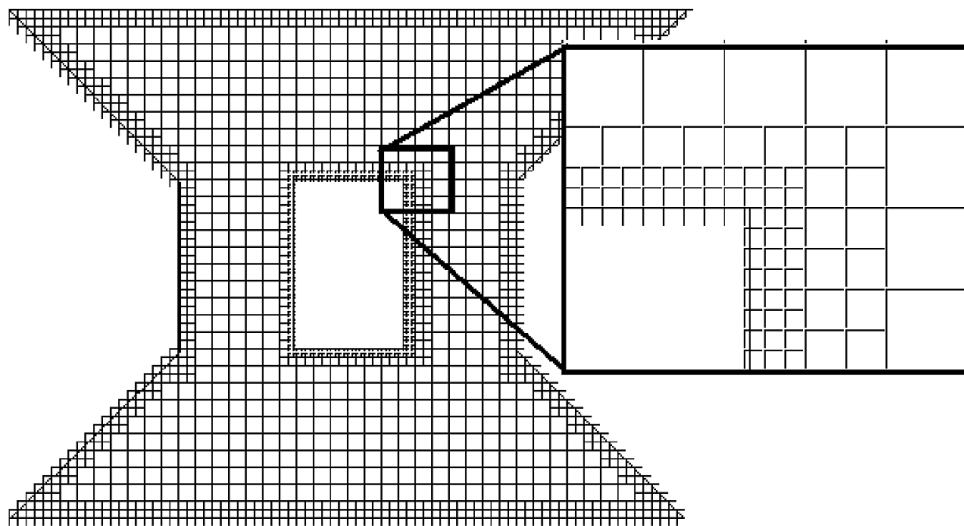


Рис. 7. Многоуровневая сетка в двусвязной области на плоскости (x, y)

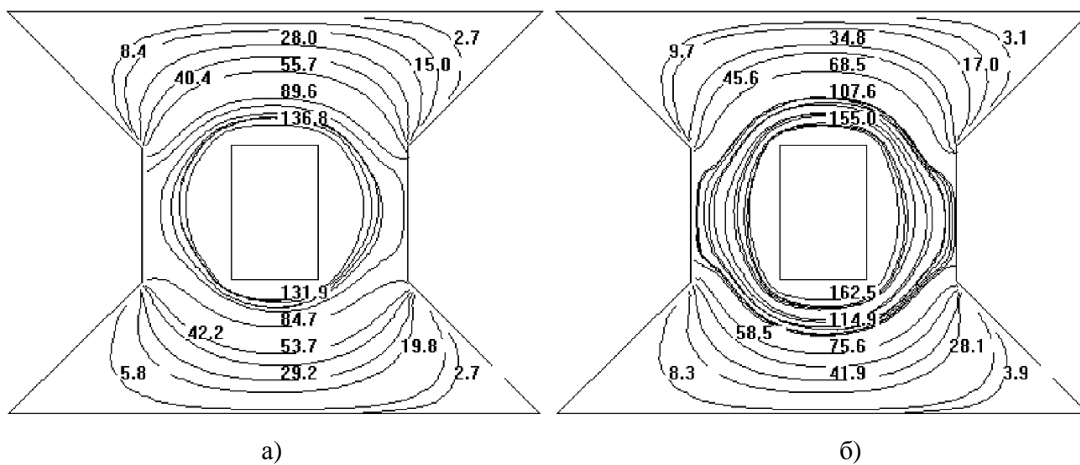


Рис. 8. Сравнение линий уровня
а – МП, б – ПЛ



В таблице 3 приведены формулы вычисления аппликаты для угла 12 в зависимости от рангов и положения смежных ячеек (рис. 5). Для других углов формулы получаются аналогично.

Результаты расчета

На рис. 6 показана МП, заданная на многосвязной области, имеющей в плане сложную конфигурацию (рис. 7).

На рис. 8 приведены линии уровня минимальной поверхности и поверхности Лапласа при средней подъемности поверхности порядка 10. Разница высот в характерных точках достигает 30 %.

Заключение

Разработанный авторами программный комплекс позволяет оперативно проводить многовариантные расчеты геометрии оболочек МП. На основе проведенных вычислений авторы пришли к выводу, что для оболочек МП с подъемностью более чем 1 необходимо применять уравнение Эйлера-Лагранжа. Для построения пологих МП с подъемностью меньшей, чем 1, допускается использование уравнения Лапласа. Технология многоуровневых сеток, предложенная в статье для построения сложных в плане МП, позволяет получать сетки для конечно-

элементного или конечно-разностного анализа напряженного состояния оболочек. Перспективными задачами для авторов является расширение разработанного программного комплекса для расчета напряженного состояния оболочек МП.

Литература

1. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1957. – 223 с.
2. Мифтахутдинов И.Х. Оболочки минимальной поверхности в природе и архитектуре. – Казань: ЗАО «Новое знание», 2007. – 144 с.
3. Мифтахутдинов И.Х. Наглядная геометрия оболочек минимальной поверхности. – Казань: ЗАО «Новое знание», 2009. – 40 с.
4. Михайленко В.Е., Ковалев С.Н. Конструирование форм современных архитектурных сооружений. – Киев: Будивельник, 1978. – 112 с.
5. Лукашенко В.И., Абдюшев А.А., Доронин М.М., Нуриева Д.М., Сладков А.В. Экспертиза, расчет, анализ пространственных конструкций (АРС ЭРА-ПК2000). – Казань: КазГАСУ, 2006. – 320 с.
6. Simpson R.B. Automatic local refinement for irregular rectangular meshes. // *Int. J. Num.Meth. Eng*, 1979, vol.14. – P. 1665-1678.