УДК 621-192.3+69.059.4

А.З. Манапов – кандидат технических наук, доцент
Кафедра металлических конструкций и испытаний сооружений
Казанский государственный архитектурно-строительный университет (КазГАСУ)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ СТАЛЬНОГО КОНСТРУКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА С УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ РАБОТОЙ МАТЕРИАЛА

АННОТАЦИЯ

Определены основные приемы расчета вероятности разрушения элементов строительных конструкций с упруго-пластической работой материала использованием методов статистического моделирования при известных функциях распределения напряжения и прочности.

A.Z. Manapov – ccandidate of technical sciences, associate professor
Department of Metallic Design and Building Testing
Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE)

STATISTICAL MODEL OF DESTRUCTION OF A STEEL CONSTRUCTIVE ELEMENT WITH AN ELASTIC-PLASTIC WORK OF A MATERIAL

ABSTRACT

The basic algorithms of probability calculation of destruction of building elements with elastic-plastic work of a material by using the methods of statistical modeling under conditional functions of pressure and durability distribution.

Предельные состояния элементов стальных конструкций зданий и сооружений определяются с учетом ограничений пластических деформаций [1]. Возможность допущения пластических деформаций при детерминированном расчете позволяет корректировать несущую способность элемента конструкции в сторону увеличения. В настоящей статье предлагается методика расчета надежности элементов конструкции с применением элементов статистического моделирования при допущении пластической работы стали.

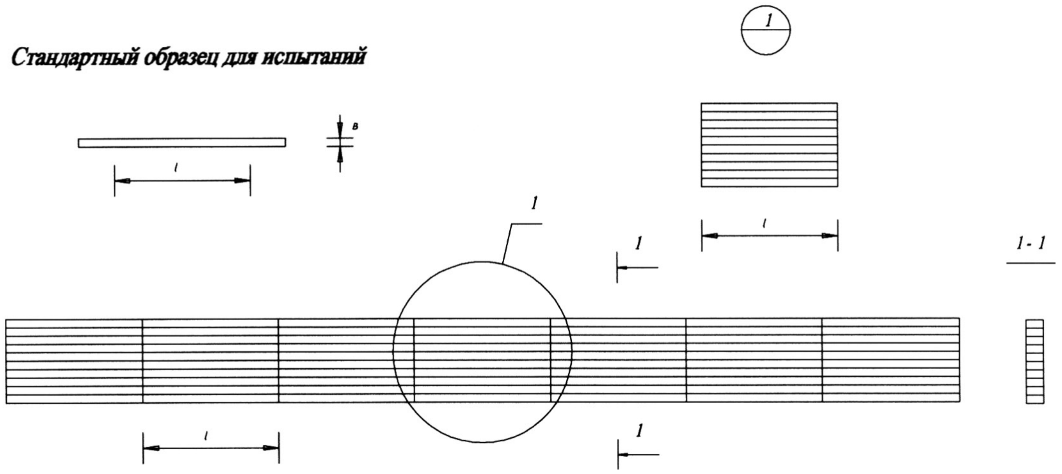
Для статистического расчета с учетом характера деформирования стали предварительно расчленим конструктивный элемент на первичные конечные элементы и составим схему их соединения.

Статистические данные о работе стали под нагрузкой формируются по результатам испытаний стандартных образцов на растяжение, использованием этих данных определяются расчетные сопротивления сталей по пределу текучести и временному сопротивлению. То есть образец для механических испытаний сталей является первичным элементом, участвующим в формировании влиятельной статистической выборки, используемой в дальнейшем при статистической обработке. Натурные строительные конструктивные элементы обычно имеют размеры больше, чем стандартные образцы для испытаний, поэтому последние могут быть представлены как композиции из первичных элементов, а статистические характеристики прочности натурного конструктивного элемента могут быть представлены как композиции статистических характеристик первичных элементов, в данном случае стандартных образцов на растяжение.

Рассмотрим стержень постоянного сечения, работающий на осевое растяжение.

Принцип разбиения конструктивного элемента, работающего на растяжение, представлен на рис 1. В таком конструктивном элементе содержится i продольных участков разбиения, каждый из которых разбит в свою очередь на j элементов, или всего $n = i * j$ первичных элементов. Для конкретного примера разбиения, представленного на рис.1, число участков разбиения равно 84. Если пластические деформации считаются не приемлемыми, за предельное принимается состояние, при котором в одном из первичных элементов напряжение становится равным пределу текучести. При таком ограничении материал конструкции работает упруго до разрушения, что характерно, например, для хрупких разрушений.

Надежность конструктивного элемента, подверженного хрупкому разрушению, будет определяться как произведение значений надежности



Продольных разбиений 7, каждое продольное разбиение имеет 10 поперечных разбиений. Всего конечных элементов 70

Рис. 1. Учёт масштабного фактора при осевом растяжении элемента

всех первичных элементов, на которые выполнено его разбиение:

$$H_n = \prod_{1}^{n} H_{ij} \qquad (1)$$

где H_{ij} – надежность ij-первичного элемента.

$$H_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} j\ (s\ )(\int_{-\infty}^{\infty} j\,(R)dR)ds \qquad (2)$$

В формуле (2) $j\,(s\ )$ и $j\ \ (R)$ – соответственно плотности распределения напряжения и предела текучести материала элемента конструкции.

В дальнейшем для решения численных примеров примем распределение предела текучести стали $j\ \ (R)$ и распределение напряжения $j\,(s\ )$ по нормальному распределению с параметрами m_R =298,0 (МПа) Δ_R =19,2 (МПа) [1] для предела текучести и m_s =180,0 (МПа) Δ_s =9,4 (МПа) для напряжения.

Для наглядности методом статистического моделирования выполним анализ распределений предела текучести и напряжения для образца, представленного на рис.1. Для этого, используя генератор случайных чисел и распределение $j_y(R)$ и $j_y(s\ )$, получим выборку из 84 случайных чисел для предела текучести и напряжения.

В таблице 2 приведены результаты расчета надежности одного первичного высоконадежного элемента конструкции и конструктивного элемента в целом с числом участков разбиения 84 (рис. 1). В последнем случае надежность элемента рассчитана аналитически по формуле (1) и методом статистического моделирования. Для наглядности результаты представлены как расчетное значение вероятности отказа (1– H).

Таблица 1

Номер выборки	Минимальное значение удельной прочности при объеме выборки 84 и нормальном распределении с параметрами m =298,0 (МПа) Δ =19,2 (МПа)	Максимальное значение напряжения при объеме выборки 84 и нормальном распределении с параметрами m =220,0 (МПа) Δ =9,4 (МПа)	Минимальная разность между удельной прочностью и напряжением при объеме выборки 84
1	248,51	241,04	22,02
2	241,46	240,11	16,93
3	250,75	241,94	41,88

Таблица 2

Распределение прочности и напряжения, характер работы материала, схема разбиения на первичные элементы	Расчетное значение вероятности отказа $(1-H)$
Один первичный элемент разбиения. Нормальное асимптотическое распределение удельной прочности R Математическое ожидание m_R=298,0 (МПа) Стандарт распределения Δ_R =19,2 (МПа) Нормальное асимптотическое распределение напряжения s m_s =220,0 (МПа) Δ_s =9,4 (МПа) Упругое разрушение, расчет по формуле (2)	131 на 10^6 элементов
Один первичный элемент разбиения. Нормальное асимптотическое распределение удельной прочности R Математическое ожидание m_R = 298,0 (МПа), стандарт распределения Δ_R = 19,2 (МПа) Нормальное асимптотическое распределение напряжения s m_s =220,0 (МПа) Δ_s = 9,4 (МПа). Упругое разрушение, расчет методом статистического моделирования при объеме выборки $2*10^6$	139 на 10^6 элементов
Конструктивный элемент разбит 7 продольных участков по 12 первичных элементов в каждом. Упругое разрушение, расчет по формуле (2)	$1-(1-131*10^{-6})^{84}$ =10944 на 10^6 конструктивных элементов. Возрастание в 84 раз
Конструктивный элемент разбит 7 продольных участков по 12 первичных элементов в каждом. Упругое разрушение, расчет методом статистического моделирования при объеме выборки $2*10^6$	11052 на 10^6 конструктивных элементов

Если сталь до разрушения может работать как упруго-пластический материал, разрушение будет происходить другим образом. В слабейшем первичном элементе напряжение достигнет предела текучести s_t и далее не будет возрастать вследствие пластической работы стали за пределом текучести. Рост напряжения продолжится на других участках с упругой работой материала. При появлении текучести на одном из участков рост напряжений приостановится.

Таким образом, пластическая работа стали за пределом текучести приведет к выравниванию напряжения в конечных элементах, расположенных в одном поперечном сечении. Несущая способность поперечного сечения в этом случае будет определяться как сумма несущих способностей параллельных первичных элементов, а удельная прочность этого сечения как среднее арифметическое значение удельных прочностей. В таком случае для расчета надежности растянутого элемента в предположении упруго-пластической работы материала необходимо рассматривать статистическое распределение среднего арифметического значения удельных прочностей первичных элементов, составляющих это сечение.

В соответствии с теоремой Линдберга-Леви случайная величина $R^m = \frac{1}{n}(R_1 + R_2 + ... + R_n)$ имеет асимптотически нормальное распределение вероятностей с центром m_R дисперсией $\frac{\Delta^2}{n}$ при условии, что существует общая дисперсия Δ^2 и общий центр m_R величин $R_1, R_2.....R_n$ (теорема Линдберга-Леви) [1]. Статистическая выборка пределов текучести для образцов, безусловно, удовлетворяет условиям теоремы Линдберга-Леви, так как основой является одна генеральная совокупность. Теорема Линдберга-Леви является предельной, то есть предполагает полную достоверность при $n = \infty$.

Фактически число разбиений конструктивного элемента ограничено с одной стороны размерами конструктивного элемента, с другой стороны – ограниченностью зоны пластической работы

Таблица 3

Статистические параметры распределения предела текучести	Случайные выборки, среднее арифметическое значение и среднее квадратическое значение удельной прочности при числе разбиений поперечного сечения на j =3, 6, 9 конечных элементов		
	1 выборка $j = 3$	2 выборка $j = 6$	3 выборка $j = 9$
Нормальное асимптотическое распределение удельной прочности R Математическое ожидание m = 298,0 (МПа) Стандарт распределения Δ = 19,2 (МПа)	292.2355 273.4685 302.6897 Среднее арифметическое 289.4646	292.2355 273.4685 302.6897 335.0491 292.9629 272.5785 Среднее арифметическое 294.8307	292.2355 273.4685 302.6897 335.0491 292.9629 272.5785 314.4952 315.8064 280.9018 Среднее арифметическое 296.0099

материала. Учитывая, что при пластическом разрыве сталей значительное влияние на пластические деформации оказывают касательные напряжения, выравнивание нормальных напряжений при пластическом деформировании следует ожидать на секторе, охватывающем не более 45^0 от оси действия растягивающих усилий.

Влияние размера выборки, то есть числа разбиений j одного поперечного сечения стержня, на точность назначения удельной прочности сечения в целом удобно оценить методом статистического моделирования. Результаты такого анализа представлены в таблице 3, статистические параметры распределения предела текучести при этом приняты по [2].

Результаты, содержащиеся в таблице 3 , показывают, что при числе разбиений одного поперечного сечения на три конечных элемента смещение центра распределения по сравнению с предельным случаем составило 2,86%, при разбиении поперечного сечения на 6 элементов – 1,06% и при разбиении на 9 элементов – 0,65 %.

Пусть число первичных элементов, участвующих в выравнивании напряжений при упруго-пластической работе, будет равно n_p, тогда надежность конструктивного элемента при упруго-пластическом разрушении будет определяться как произведение значений надежности k объединенных групп из n_p первичных элементов каждая:

$$H_k = \prod_1^k H_{n_p}$$

При этом надежность объединенной группы из n_p первичных элементов определяется с учетом распределения удельной прочности с математическим ожиданием m_R и дисперсией $\frac{\Delta^2}{n}$.

В таблице 4 приведены результаты расчета надежности конструктивного элемента с учетом выравнивания пределов текучести в одном поперечном сечении при допущении пластической работы стали. Результаты представлены как расчетное значение вероятности отказа ($1-H$).

Рассмотрим стержень постоянного сечения, работающий на осевое сжатие. В таком стержне наиболее нагруженными являются поперечные сечения, имеющие наибольшие стрелки выгиба от продольного изгиба, обычно это сечения, близко расположенные к середине длины стержня. Поперечные сечения нагружены также неравномерно, наиболее нагруженными являются конечные элементы, расположенные на крайних фибрах.

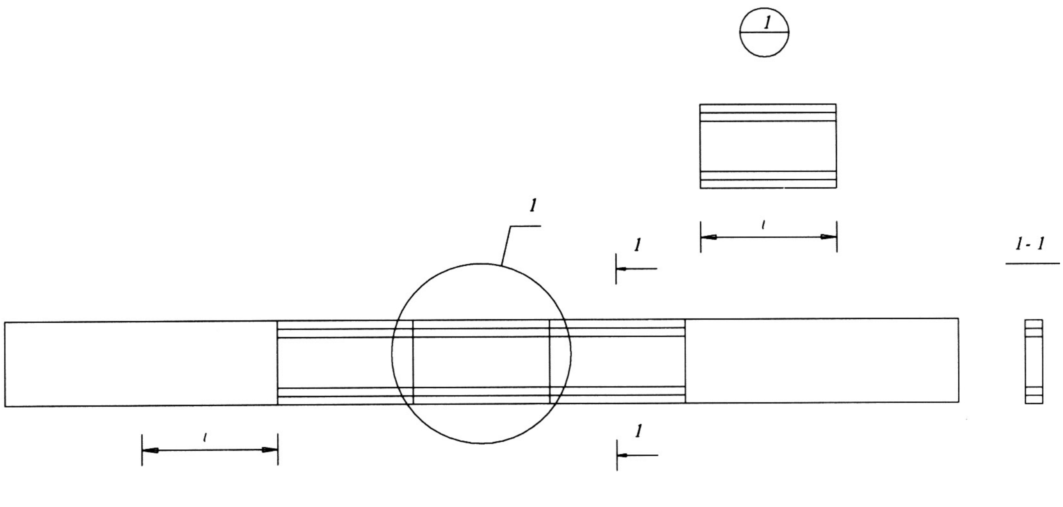
Разбиение конструктивного элемента, работающего на сжатие, на i продольных участков, каждый из которых содержит j элементов, представлено на рис 2. Если потеря устойчивости происходит на упругой стадии работы материала, надежность конструктивного

Таблица 4

Распределение прочности и напряжения, характер работы материала, схема разбиения на первичные элементы	Расчетное значение вероятности отказа $(1-H)$
Конструктивный элемент разбит 7 продольных участков по 12 первичных элементов в каждом. Упруго-пластическая работа стали, усреднение напряжений по 3 первичным элементам в одном сечении, стандарт распределения группы $\Delta_R = \frac{19,2}{3} = 6,4$ (МПа)	11 случаев на*10^{10} Уменьшение вероятности отказа по сравнению с конструктивным элементом без разбиения в 10^{5} раз

Таблица 5

Распределение прочности и напряжения, характер работы материала, схема разбиения на первичные элементы	Расчетное значение вероятности отказа $(1-H)$
Конструктивный элемент разбит 7 продольных участков по 12 первичных элементов в каждом. Упруго-пластическая работа стали, усреднение напряжений по 3 первичным элементам в одном сечении, стандарт распределения группы $\Delta_R = \frac{19,2}{3} = 6,4$ (МПа)	Уменьшение вероятности отказа по сравнению с конструктивным элементом без разбиения в 10^{8} раз



Продольных разбиений 3, каждое продольное разбиение имеет 2 поперечных разбиений. Всего конечных элементов 6

Рис. 2. Учет масштабного фактора при сжатии элемента

элемента определяется в предположении, что выравнивание напряжений в расчетном сечении происходить не будет, но учитывается эпюра нормальных напряжений вдоль продольной оси элемента от продольного изгиба

$$H_n = \prod_{1}^{n} H_{ij}$$

Если потеря устойчивости ожидается при упруго-пластической работе материала, надежность конструктивного элемента определяется с учетом выравнивания напряжений в расчетном сечении, аналогично стержню, работающему на растяжение.

В таблице 5 приведены результаты расчета надежности конструктивного элемента работающего на осевое сжатие при упругой работе стали и с учетом выравнивания пределов текучести в одном поперечном сечении при допущении пластической работы стали.

Выводы

1. Предложена методика расчета надежности элемента стальной конструкции при упруго-пластической работе материала.

2. Расчеты надежности и анализ статистических выборок выполнены по аналитическим формулам и методом статистического моделирования.

3. Численные результаты расчетов надежности элемента стальной конструкции при упругой и упруго-пластической работе материала показали, что при допущении возможности пластических деформаций значение надежности значительно возрастает.

Литература

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М., 1970. – 542 с.
2. Яковлева В.С. Малоуглеродистая полуспокойная сталь для металлических конструкций. / Сб.трудов ЦНИИСК “Полуспокойные стали для строительных конструкций”, вып.29. – М.: Стройиздат, 1976. – С.42-70.