

УДК: 539.3

DOI: 10.48612/NewsKSUAE/75.10

EDN: GLKF GG



Податливость сжатых стержней с учетом поперечного сдвига при наличии деградации материала опор

Р.А. Каюмов¹, Ф.Р. Шакирзянов¹, А.Р. Гимазетдинов¹, А.В. Гумеров¹

¹Казанский государственный архитектурно-строительный университет
г. Казань, Российская Федерация

Аннотация: При расчёте статически неопределимых ферменных конструкций важно иметь зависимость продольных деформаций от нормальных усилий. Она становится нелинейной в случае появления продольного изгиба. Статья посвящена выводу соотношений, которые связывают большие прогибы со сжимающей силой стержня при наличии в шарнирных опорах противодействия повороту оси стержня. Принимается, что это сопротивление уменьшается при увеличении угла поворота ввиду деградации материала опор.

Целью работы является разработка методики вычисления податливости сжатых стержней с учетом их закритического изгиба, а также с учетом сдвига при наличии изменения жесткости опор. Для достижения этой цели решены следующие задачи: получено уравнение, определяющее угол наклона оси стержня в зависимости от сдвиговых деформаций (разрешающее уравнение); предложена численная схема для аналитического решения полученного уравнения; проведена серия вычислительных экспериментов и на их основе выявлены взаимосвязи между важнейшими параметрами напряжённо-деформированного состояния стержня в условиях закритического изгиба с учетом сдвига; получено аналитическое выражение, позволяющие вычислять податливость стержня после потери устойчивости при больших прогибах.

Предложенные соотношения и методы позволяют выполнить расчёт статически неопределимых конструкций типа ферм с учётом потери устойчивости и закритического изгиба стержневых элементов с закреплениями, жёсткость которых зависит от уровня деформации стержней, что позволяет выявить запас их несущей способности. Это на сегодня важно для строительной отрасли в связи с широким применением стеклопластиковых стержней при изготовлении, например, мостовых конструкций, временных сооружений. Решение рассматриваемой проблемы важно при расчёте балок из композитных материалов и в связи с их малой жёсткостью на сдвиг.

Ключевые слова: деградация, сдвиг, стержень с не жёсткой опорой, закритический изгиб, геометрическая нелинейность, податливость сжатого стержня

Для цитирования: Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Гимазетдинов А.Р., Гумеров А.В. Податливость сжатых стержней с учетом поперечного сдвига при наличии деградации материала опор //Известия КГАСУ, 2026, № 1 (75), с. 111-122, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/75.10, EDN: GLKF GG

Compressed beam compliance considering transverse shear in the presence of degradation of support material

R.A. Kayumov¹, F.R. Shakirzyanov¹, A.R. Gimazetdinov¹, A.V. Gumerov¹

¹Kazan State University of Architecture and Engineering,
Kazan, Russian Federation

Abstract: When calculating statically indeterminate truss structures, it is important to have the dependence of longitudinal deformations on normal forces. It becomes nonlinear in the case of a longitudinal bend. The article is devoted to the derivation of the relations that link large deflections to the compressive force of the rod in the presence of a counteraction in the pivoting supports to the rotation of the axis of the rod. It is assumed that this resistance decreases with increasing rotation angle due to the degradation of the support material.

The aim of the work is to develop a methodology for calculating the ductility of compressed rods, taking into account their supercritical bending, as well as taking into account the shear in the presence of changes in the stiffness of the supports. To achieve this goal, the following tasks have been solved: an equation has been obtained that determines the angle of inclination of the rod axis depending on shear deformations (a resolving equation); a numerical scheme has been proposed for the analytical solution of the resulting equation; a series of computational experiments has been carried out and, based on them, the relationships between the most important parameters of the stress-strain state of the rod under conditions of supercritical bending have been identified, taking into account shear; the analytical expression has been obtained that makes it possible to calculate the compliance of the rod after loss of stability under large deflections.

The proposed relations and methods make it possible to calculate statically indeterminate structures such as trusses, taking into account the loss of stability and subcritical bending of core elements with fasteners, the rigidity of which depends on the level of deformation of the rods, which allows to identify their bearing capacity. This is important for the construction industry today due to the widespread use of fiberglass rods in the manufacture of bridge structures and temporary structures. The solution to the problem under consideration is important for the analysis of composite beams, especially due to their low shear stiffness.

Keywords: degradation, shear, a rod with a non-rigid support, supercritical bending, geometric nonlinearity, malleability of a compressed rod.

For citation: Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R., Gimazetdinov A.R., Gumerov A.V. Compressed beam compliance considering transverse shear in the presence of degradation of support material//News of KSUAE, 2026, № 1 (75), p. 111-122, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/75.10, EDN: GLKFEGG

1. Введение

Для определения механических характеристик композиционных материалов применяют и аналитические методы с разными моделями деформирования, и экспериментальные методы с различными строительными стандартами в зависимости от типа композиционных материалов. Однако в последнем случае необходимо проводить большее количество натурных испытаний. При разработке изделий из композиционных материалов коэффициенты запаса принимаются значительно большими, чем в случае обычных строительных материалов [1–3]. Это связано с тем, что при натурных испытаниях на различные виды нагрузок композиционные материалы, особенно волокнистые, проявляют некоторые особенности [4–6]. К числу таких особенностей относятся ярко выраженная анизотропия свойств, различие в поведении при растяжении и сжатии, а также повышенная чувствительность к концентраторам напряжений. Одним из других отличий от случая изотропии является то, что анизотропные, в частности ортотропные балки, пластины и оболочки часто обладают очень малой жесткостью на поперечный сдвиг.

В конструкциях, обладающих статической неопределимостью, выход из строя отдельных избыточных (кроме абсолютно необходимых) элементов, как правило, не ведёт

к утрате несущей способности всей системы. Чтобы оценить полную несущую способность такого сооружения, требуется понимать, как эти элементы ведут себя после того, как перейдут в иное состояние. Особо большое значение это приобретает в случае исследования легких пространственных конструкций (например, ферм, рам, арок). В них отдельные стержни могут терять устойчивость, а далее происходит их закритический изгиб с небольшим увеличением сопротивления сжимающей силе. Но при этом за счет перераспределения усилий конструкция в целом сохраняет работоспособность. В таких случаях ключевой механической характеристикой становится податливость (обратная величина жесткости материала) сжатых стержней в закритической стадии – параметр, непосредственно влияющий на совместность деформаций, следовательно, и на точность расчета статически неопределимых систем.

В расчетах облегченных композитных конструкций (в первую очередь волокнистых) важнейшее место занимает определение их прочности и устойчивости, принимая во внимание неупругие свойства. Кроме того, у деталей с мягким наполнителем жесткость на поперечный сдвиг может быть очень небольшой, что серьезно сказывается как на параметрах напряженно-деформированного состояния стержня, так и на его устойчивости. Особенно актуально это для стержней из стеклопластиков и других полимерных композитов, у которых модуль сдвига G_{13} может быть на порядок ниже модулей упругости E_1 , E_2 . Как было показано в работах Энгессера, такая же ситуация возникает при расчетах ферменных конструкций при их замене одномерными балочными элементами. Пренебрежение деформациями сдвига в таких элементах приводит к завышению критических сил и неверной оценке перемещений. С учетом сказанного актуальным становится исследование сжатой стойки в закритической стадии (после потери устойчивости) с включением в расчет влияния сдвига и нелинейного поведения узлового соединения. Ключевой аспект — выявление зависимости податливости стойки от величины сжимающего усилия. При этом рассматриваются условия, когда перемещения (прогибы, углы наклона оси балки и продольные перемещения) уже нельзя считать малыми, а жесткость опоры может изменяться в процессе нагружения (например, из-за деградации материала или конструктивной нелинейности).

Анализу процесса деформирования элементов конструкций при продольном изгибе после потери устойчивости посвящено огромное количество статей и отечественных, и зарубежных ученых, в том числе приведенных в обзорной части работ [7–9]. Однако при больших закритических прогибах укорочение оси стержня становится сопоставимым с прогибом и вносит заметный вклад в общую податливость, что требует отдельного учета. Ниже рассмотрены только те публикации, которые наиболее близки к теме предлагаемого исследования.

В работах [10–11] на конкретных примерах показана важность при построении соотношений для жесткостных характеристик тонкостенных балок и стержней учитывать влияние деформации сдвига. При этом учтены только изгибные деформации, деформации укорочения не учтены.

В [12] показано, что для оценки работы решетчатых и каркасных конструкций, является учет работы элементов узлов, в которых происходит соединение. Податливость соединений стержневых систем оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние всей конструкции. В последние годы появились работы [2, 14–16], в которых рассматриваются нелинейные диаграммы деформирования узловых соединений, в том числе с учетом уменьшения жесткости при циклических или длительных нагрузках ввиду деградации материала, из которых изготовлены соединительные элементы, или наличия конструктивной нелинейности. Однако большинство из этих исследований ориентировано на металлические конструкции. Для композитных стержней и опорных узлов количество таких работ значительно меньше.

В работах [13–15] авторами изложены ключевые соотношения теории пологих оболочек, несущие слои которых различаются по толщине и механическим свойствам материалов. Эти соотношения представлены в форме, удобной для решения прикладных задач. При малых прогибах пологой панели с мягким наполнителем система разрешающих уравнений сводится к трем линейным уравнениям, в которых неизвестными служат компоненты перемещений лишь одного из несущих слоев [16–18]. Отметим, что для

стержневых систем подобная редукция при больших прогибах невозможна из-за геометрической нелинейности, что и обуславливает необходимость разработки специальных аналитических и численных методов, учитывающих как сдвиг, так и конечные перемещения.

Значимость для практики учета податливости стержней в конструкции, содержащей одномерные элементы, состоит в более правильной оценке ее поведения в соответствии с реальной работой этих стержневых элементов [19–21]. При расчете статически неопределимых сооружений необходимо составлять соотношения совместности деформаций, в которых присутствуют механические характеристики, называемые жесткостью стержневого элемента, или обратная к ней величина, называемая податливостью. Методика ее расчета с учетом изменения механических характеристик опор, изменения геометрии балки ввиду немалого изгиба, а также учета деформации поперечного сдвига (что важно при использовании брусков из современных композиционных материалов, у которых весьма мал модуль сдвига) имеет важное значение. Это сделает возможным проектирование безопасных конструкций, в частности, из стеклопластиков, удовлетворяющих требованиям существующих норм [22–24]. При этом удастся сохранить преимущества применения существующих профилей [25–27].

Целью работы заключается в том, чтобы предложить способ расчёта податливости сжатых стержневых элементов, который учитывает большие закритические прогибы, нелинейное сопротивление повороту оси на опоре ввиду снижения жёсткости опоры по причине деградации материала, деформации поперечного сдвига.

Для достижения этой цели потребовалось решить следующие несколько задач:

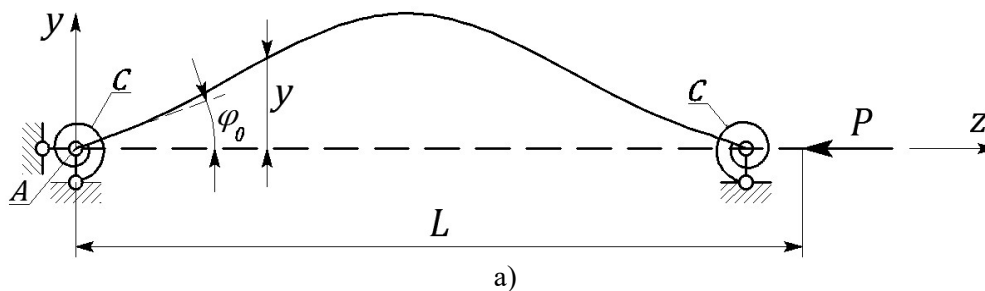
1. Вывести уравнение, определяющее угол наклона оси стержня в зависимости от сдвиговых деформаций (разрешающее уравнение).
2. Предложить численную схему для аналитического решения полученного уравнения.
3. Провести серию вычислительных экспериментов и на их основе выявить взаимосвязи между важнейшими параметрами напряжённо-деформированного состояния стержня в условиях закритического изгиба с учетом сдвига.
4. Получить аналитические выражения, позволяющие вычислять податливость стержня после потери устойчивости при больших прогибах.

2. Материалы и методы

В данном разделе для упрощения рассматривается только балка с шарнирным закреплением концов, которая подвергается продольному изгибу под действием сжимающей нагрузки P (см. рис. 1 а). Предполагается, что в опорных узлах возникает сопротивление угловому повороту балки (в дальнейшем будем называть эти элементы податливыми повороту опорами) [22–25]. Влияние податливости данных опор может быть описано в виде связи угла поворота оси балки φ_0 и изгибающего момента M_x в опоре следующим образом:

$$M_x = c \varphi_0, \quad (1)$$

где c (Гн см) – жесткость пружин, φ_0 (радиан) – угол наклона стержня в опоре.



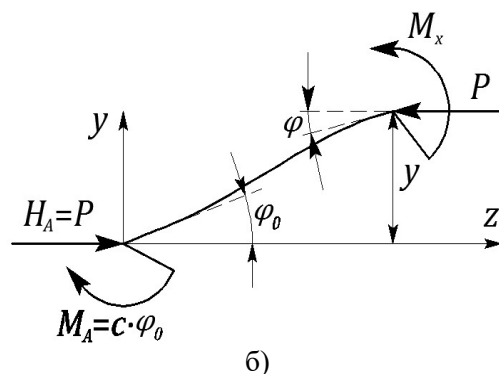


Рис.1 Стержень после потери устойчивости: а) деформированная схема; б) схема поперечного сечения стержня (иллюстрация авторов).

Fig.1 A rod after loss of stability: a) deformed diagram; b) diagram of the cross-section of the rod (illustration by the authors)

На рис.1б изображена левая часть балки, отсечённая на расстоянии z от опоры A .

Жёсткость податливых поворотов опор способна меняться в зависимости от величины их деформации, то есть от значения угла φ . На данном этапе принимается допущение, что на обеих опорах они имеют одинаковые жёсткости.

Введём обозначения: через s будем обозначать дуговую координату, начало которой находится в точке A ; полную длину балки обозначим символом L ; угол между касательной к изогнутой оси балки и горизонталью — через $\varphi(s)$ (см. рис. 1а).

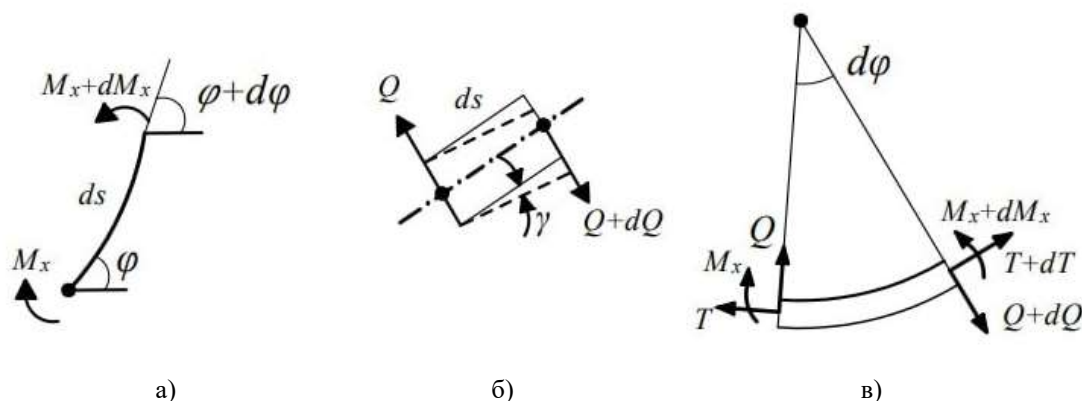


Рис.2 Элемент стержня: а) картина изгиба балки; б) картина сдвига элемента балки; в) картина воздействия на элемент балки (иллюстрация авторов)

Fig.2 Rod element a) the pattern of bending of the beam; b) the pattern of displacement of the beam element; c) the pattern of impact on the beam element (illustration by the authors)

Далее рассматривается бесконечно малый элемент балки. Картина изгиба оси этого элемента изображена на рис.2а, картина его сдвига представлена на рис.2б. Для силовых факторов, действующих на элемент длины ds (см. рис. 2в), имеют место следующие два уравнения равновесия. Во-первых, равенство нулю суммы моментов сил.

$$dM_x - Q_y ds = 0 \quad (2)$$

Во-вторых, условие равенства нулю проекций сил на нормаль к оси балки, проведенной на левом торце элемента, изображенного на рис. 2в.

$$\sum F_y = (dT + T)d\varphi - (dQ_y + Q_y) \cos(d\varphi) + Q_y = 0 \quad (3)$$

Здесь T - продольная сила, Q_y - перерезывающая сила.

Из (3) вытекает следующее уравнение:

$$T \frac{d\varphi}{ds} - \frac{dQ_y}{ds} = 0 \quad (4)$$

Чтобы получить реальную зависимость между прогибом y и силой P , необходимо решать задачу с учетом конечности прогибов $y(s)$ и углов наклона $\varphi(s)$. В этом случае справедливы следующие геометрические соотношения:

$$\frac{dz}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi \quad (5)$$

Если рассмотреть левую часть балки, мысленно отсечённую на расстоянии z от опоры A (рис. 1б), то выражение для изгибающего момента M_x примет вид:

$$M_x = c \varphi_0 - P y(s) \quad (6)$$

Из соотношения (6) видно, что для вычисления M_x требуется знать функцию $y(s)$. Из (5) следует, что

$$y = \int_0^s \sin\varphi \, ds, \quad z = \int_0^s \cos\varphi \, ds, \quad (7)$$

Считая, что для стержня справедлив закон Гука, а именно, что кривизна оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту, уравнение изгиба элемента балки и выражение для угла сдвига можно записать в виде:

$$M_x = EJ \frac{d\varphi^{\text{изг}}}{ds} \quad (8)$$

$$d\varphi^{\text{сдв}} = -\frac{dQ_y}{GA} k \quad (9)$$

Здесь k – коэффициент, учитывающий форму сечения (она вытекает из формулы Журавского), а приращение угла поворота оси стержня состоит из двух составляющих:

$$d\varphi = d\varphi^{\text{сдв}} + d\varphi^{\text{изг}} \quad (10)$$

Сдвиговую и изгибную составляющие приращения угла наклона можно расписать в виде:

$$d\varphi = \frac{M_x}{EJ} ds - \frac{dQ_y}{GA} k \quad (11)$$

Подстановка сюда M_x из выражения (6) приводит к соотношению:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{EJ} (c \cdot \varphi_0 - P \cdot y) - \frac{dQ_y}{ds} \frac{k}{GA} \quad (12)$$

Из уравнения (4) вытекает, что

$$T \frac{d\varphi}{ds} = \frac{dQ_y}{ds} \quad (13)$$

Решая систему уравнений (13), (12) с учётом того, что $T = -P$, можно получить следующее выражение:

$$\frac{d\varphi}{ds} \left(1 - \frac{Pk}{GA}\right) = \frac{1}{EJ} (c \cdot \varphi_0 - P \cdot y) \quad (14)$$

Далее для упрощения выражений и методов решения задачи целесообразно принять, что $\varphi \ll 1$, тогда $z \approx s$, $\frac{dy}{ds} = \varphi$, $\sin\varphi = \varphi$. После ряда преобразований получается

следующая зависимость между сжимающей силой и углом наклона оси балки, которая отличается от известных соотношений тем, что в ней учитывается деформация поперечного сдвига:

$$EJ \frac{d\varphi}{ds} \left(1 - \frac{Pk}{GA} \right) + P \int_0^s (\varphi - c\varphi_0) ds = 0 \quad (15)$$

Ввиду принятого упрощения об одинаковой податливости опор прогибы балки, будут симметричными относительно центрального сечения стержня. Это означает, что угол $\varphi(s)$ будет антисимметричен. Значит можно его аппроксимировать, например, в следующем виде:

$$\varphi = a(2s - L) + \theta_1 \cos \frac{\pi s}{L} + \theta_3 \cos \frac{3\pi s}{L} + \theta_5 \cos \frac{5\pi s}{L} + \dots, \quad (16)$$

Здесь $a, \theta_1, \theta_3, \theta_5, \dots$ – параметры аппроксимирующей функции. Аппроксимация (16) выбрана так, чтобы после интегрирования выражений (7) удовлетворялись условия равенства прогибов нулю на опорах.

Связь угла наклона оси балки на опоре с параметрами $\theta_1, \theta_3, \theta_5$ вытекает из (16) при $s = 0$:

$$\varphi_0 = a \cdot L + \theta_1 + \theta_3 + \theta_5 + \dots \quad (17)$$

Интересно отметить, что при предположении малости прогибов и малости углов φ , а также при отсутствии сопротивления угловому повороту балки (т.е. при $c = 0$), если в аппроксимации (16) сохранить лишь первое слагаемое и воспользоваться приближенными соотношениями вида $\sin \varphi \approx \varphi$ и $\cos \varphi \approx 1$, то уравнение (15) сильно упростится. Из него тогда вытекает формула Эйлера:

$$P = P_{crit} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \quad ((18))$$

Для описания поведения опор, которые в отличие от обычных шарниров сопротивляются повороту оси балки, можно принять соотношение в виде:

$$M_x = c(\varphi_0) \varphi_0 \quad (19)$$

При снижении их жёсткости из-за деградации материала коэффициент $c(\varphi_0)$ будет представлять собой уменьшающуюся функцию.

В геометрически нелинейных задачах важнейшее значение имеет параметр продолжения счета. Здесь в качестве такого основного параметра принят угол φ_0 . Тогда уравнение (15) можно решать, например, методом коллокаций. Суть этого подхода заключается в том, что подстановка (16) в (15) для различных значений длины дуги $s = s_i$ (т.е. значений $s = s_1, s = s_2, \dots$) дает зависимости между величинами P, a и φ_0 . Интегрирование в (15) приходится проводить численно, поскольку задача геометрически и физически нелинейная.

Проведённые численные эксперименты показали, что при использовании аппроксимации (16) достаточно ограничиться только первыми двумя членами разложения даже для сравнительно больших значений угла φ (т.е. можно принять, что $\theta_3 = \theta_5 = \dots = 0$) [28-30].

Для получения соотношения относительно податливости сжатых стержней, учитывая их закритическое поведение и наличие рассматриваемой опоры с убывающей жёсткостью при повороте оси балки, необходимо принять во внимание два обстоятельства. Во-первых, это изменение длины стержня (укорочение под действием сжатия). Во-вторых, требуется уметь определять перемещение подвижного конца, обусловленное закритическим изгибом. В итоге получается следующее выражение для перемещения правого торца $u_z(L)$:

$$u_z(L) \approx -\frac{P \cdot L}{E \cdot A} - \frac{P \cdot k \cdot L}{G \cdot A} + L - \int_0^L \sqrt{1 + tg^2 \varphi} ds \quad (20)$$

Податливость далее будет обозначаться через S . Тогда относительное перемещение линейную нагруженного торца можно представить в виде:

$$\frac{|\Delta L|}{L} = \frac{|u_z(L)|}{L} = S \frac{P}{A} \quad (21)$$

Из (20) и (21) вытекает выражение для податливости S :

$$S \approx \frac{1}{E} + \frac{k}{G} + \frac{A}{PL} \left(\int_0^L \sqrt{1 + tg^2(\varphi)} ds - L \right) \quad (22)$$

Как видно из (22), податливость S будет зависеть от силы сжатия P . Это вызвано тем, что в рассматриваемой задаче учтены два вида нелинейности (геометрическая и физическая). Ниже представлены результаты численных экспериментов при некоторых значениях геометрических и механических характеристик, а именно, зависимости между различными параметрами напряженно-деформированного состояния и некоторыми геометрическими характеристиками. При этом соотношение (19) принималось в виде следующей нелинейной функции:

$$M_x = c_0(1 + c_1 \cdot \varphi_0)^m \varphi_0 \quad (23)$$

При $m < 0$ жесткость опоры $c(\varphi_0)$ будет уменьшаться ввиду деструкции материала.

3. Результаты и обсуждения.

На рис. 3 и рис. 4 приводятся результаты численных расчетов для стержней в виде труб с внешним радиусом R и внутренним радиусом r при следующих механических и геометрических характеристиках стержня и опор: $E = 200$ ГПа, $G = 2$ ГПа, $c_0 = 50$ Гн · см, $c_1 = 14$, $m = -1$, $L = 200$ см, $R = 2.4$ см, $r = 2.0$ см, $k = 2$. На рисунках 3 и 4 введены также следующие обозначения N_{MAX} – максимальное усилие сжатия, а N_{CRIT} – критическая сила, вычисленная по стандартной формуле Эйлера, т.е. без учета сдвига. Приведены зависимости, которые характеризуют влияние модуля сдвига G на механические характеристики. Как и ожидалось, из анализа результатов следует, что и в случае наличия опор, для жесткости которых принято соотношение (19), влияние относительной длины стержня более существенно в случае учета поперечного сдвига. Видно также, что в отличие от обычного случая упругой опоры, сопротивляющейся повороту оси, податливость стержня не возрастает, а падает в более чем в полтора раза в рассмотренном примере. Кроме того, учет поперечного сдвига также уменьшает податливость стержня.

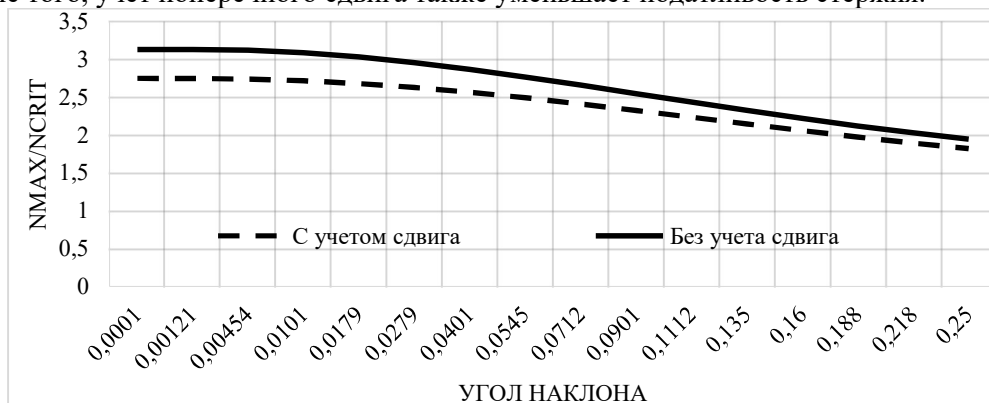


Рис.3 Зависимость относительного усилия сжатия от угла наклона стержня с учетом сдвига и без учета сдвига при $m < 0$ (иллюстрация авторов)

Fig.3 Dependence of the relative compressive force on the angle of inclination of the rod with and without taking into account the shear at $m < 0$ (illustration by the authors)

Для верификации предложенного здесь подхода к расчету податливости сжатого стержня, опертого на опоры с деградирующей жесткостью на поворот его оси, были проведены сравнения с результатами численного решения аналогичной задачи, но без учета поперечного сдвига [2]. Зависимости относительного усилия сжатия N_{MAX}/N_{CRIT} от относительной длины стержня практически совпали с графиками, приведенными на рис.3 сплошной линией.

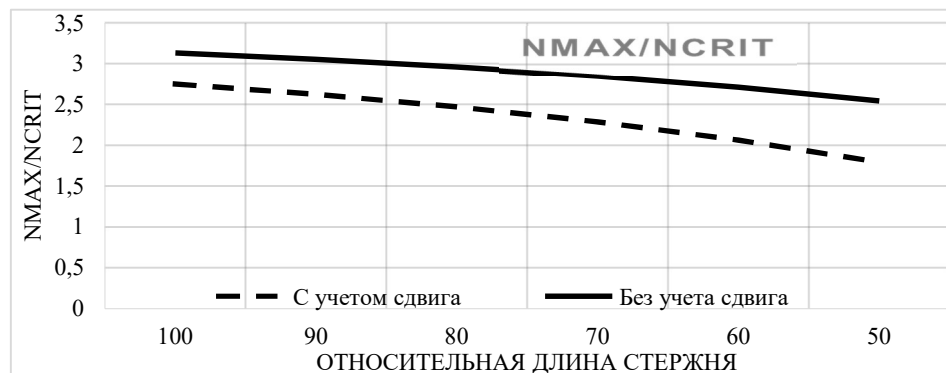


Рис.4 Зависимость относительного усилия сжатия от относительной длины стержня L/R с учетом сдвига и без учета сдвига при $m < 0$ (иллюстрация авторов)

Fig.4 Dependence of the relative compressive force on the relative length of the rod L/R taking into account the shear and without taking into account the shear for $m < 0$ (illustration by the authors)

4. Заключение

Разработана методика вычисления податливости сжатых стержней с учетом их закритического изгиба при наличии сопротивления повороту на опоре. Считается, что деструкция материала приводит к уменьшению жесткости опоры при повороте оси балки. В отличие от классических подходов, в которых податливость считается постоянной, предложенная методика позволяет получить ее зависимость от внешней сжимающей нагрузки, в виде функции $S = S(P)$, что критически важно для расчёта статически неопределимых систем с элементами, работающими в закритической стадии.

Приведен вывод разрешающего уравнения для угла наклона оси стержня вместо прогиба. Это, во-первых, является новой отличительной особенностью предлагаемого подхода решения поставленной задачи, во-вторых, позволяет уменьшить степень производных, входящих в полученное уравнение. Все это дает возможность упростить методику его решения. Кроме того, в нем учтена деформация поперечного сдвига, что важно при расчете конструкций из современных композиционных материалов типа стеклопластиков. Дополнительно получено выражение для расчёта податливости стержня в закритической стадии, а также предложен способ его реализации. Разработанная методика была проверена на стержне трубчатого сечения с геометрией и характеристиками, типичными для лёгких ферменных конструкций.

Проведённые вычислительные эксперименты позволили изучить взаимосвязи различных параметров напряжённо-деформированного состояния стержня. Анализ результатов показал, в частности, что сжимающие усилия снижаются при учёте деформаций сдвига в зависимости от угла наклона и длины стержня, что вполне ожидаемо. В более подробном виде выявлено следующее:

- при $m < 0$, то есть когда имеет место уменьшение жёсткости опоры (ввиду деградации материала опоры) податливость стержня S снижается более чем в 1,5 раза по сравнению со случаем линейно-упругой опоры с начальной жёсткостью c_0 ; это объясняется тем, что уменьшение опорного момента частично компенсируют изгибные деформации;
- учёт поперечного сдвига приводит к дополнительному снижению податливости на 10–20% при уменьшении относительной длины стержня L/R ;
- максимальное сжимающее усилие, которое способен воспринять стержень после потери устойчивости (а значит и минимальная податливость), при наличии деградации опоры обеспечивается при угле поворота на опоре $\varphi_0 < 0,01$ рад, после чего наступает плавное его падение.

Благодарности

Работа выполнена за счет представленного в 2025 г. Фондом науки и технологий Республики Татарстан гранта на осуществление фундаментальных и поисковых исследований в научных и образовательных организациях, предприятиях и организациях реального сектора экономики Республики Татарстан.

Список литературы/ References

1. Гарипов А.И. Численное исследование закритической работы стержней кольцевого поперечного сечения при внецентренном сжатии // Вестник гражданских инженеров. 2020. Vol. 17. No. 5. Pp. 87-93.
Garipov A.I. Numerical investigation of the supercritical operation of annular cross-section rods under non-central compression // Bulletin of Civil Engineers. 2020. Vol. 17. No. 5. P. 87-93. <https://doi.org/10.23968/1999-5571-2020-17-5-87-93>.
2. Каюмов Р.А. Закритическое поведение сжатых стержней с нелинейно упругими опорами // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 3. С. 23-31
Kayumov R.A. Supercritical behavior of compressed rods with nonlinear elastic supports // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2022. No. 3. P. 23-31
3. Gupta A., Nguyen D. T., Hirshikesh, Duddu R. Damage mechanics challenge: Predictions from an adaptive finite element implementation of the stress-based phase-field fracture model // Engineering Fracture Mechanics. 2024. Vol. 306. 110252. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.110252>.
4. Миронова Ю.В., Харитонов И.Ф., Галиева А.М. Диаграммные методы для оценки сопротивляемости прогрессирующему обрушению каркасов многоэтажных зданий // Строительные конструкции, здания и сооружения. – 2025. – № 4(13). – С. 25-34.
Mironova J.V., Kharitonov I.F., Galieva A.M. Diagrammatic methods for assessing the resistance to progressive collapse of multi-storey buildings // Building structures, buildings, and facilities. – 2025. – No. 4(13). – P. 25-34.
5. Шмелев Г.Н., Еремеев П.В., Галиев А.А., Иванова А.А., Файзуллина З.З., Агафонов. Б.В. Способ изготовления полигональной металлической фермы // Строительные конструкции, здания и сооружения. – 2025. – № 1(10). – С. 16-21.
Shmelev G.N., Ereemeev P.V., Galiev A.A., Ivanova A.A., Fayzullina Z.Z., Agafonov B.V. Method of manufacturing polygonal metal truss // Building structures, buildings and facilities. – 2025. – No. 1(10). – P. 16-21.
6. Шмелев Г.Н., Еремеев П.В., Файзуллина З.З. Способ изготовления металлических ферм с криволинейным нижним и прямолинейным верхним поясами // Строительные конструкции, здания и сооружения. – 2024. – № 4(9). – С. 40-45.
Shmelev G.N., Ereemeev P.V., Fayzullina Z.Z. Method of manufacturing metal trusses with curved lower and rectilinear upper belts // Building structures, buildings and facilities. – 2024. – No. 4(9). – P. 40-45.
7. Wang Z., Zhan Z., He X., Hu W., Meng Q., Li H. A hybrid framework combining damage mechanics and Physics-Informed neural Networks for damage and failure analysis of additively manufactured lattice structures // Materials and Design. 2025. Vol. 260. 115059. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2025.115059>.
8. Peng J.L., Ho C.M., Chan S.L., Chen W.F. Stability study on structural systems assembled by system scaffolds // Journal of Constructional Steel Research. 2017. Vol. 137. P. 135-151. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2017.06.004>.
9. Mercier C., Khelil A., Al Mahmoud F., Blin-Lacroix J.L., Pamies A. Experimental investigations of buckling behaviour of steel scaffolds // Structures. 2021. Vol. 33. P. 433-450. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.04.045>.
10. Liu H., Jia L., Wen S., Liu Q., Wang G., Chen Z. Experimental and theoretical studies on the stability of steel tube-coupler scaffolds with different connection joints // Engineering Structures. 2016. Vol. 106. P. 80-95. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.10.015>.
11. Бритвин Е.И. Влияние деформации сдвига на изгиб и кручение тонкостенных стержней // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. No. 5. Pp. 59-65.

- Britvin E.I. The effect of shear deformation on bending and torsion of thin-walled rods // Construction mechanics and calculation of structures. 2016. No. 5. P. 59-65.
12. Яковлев Э.А. Анализ влияния податливости на напряженно-деформированное состояние конструкций // Материалы VI Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум». 2014.
Yakovlev E.A. Analysis of the influence of ductility on the stress-strain state of structures // Proceedings of the VI International Student Scientific Conference “Student Scientific Forum”. 2014.
13. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.
Mushtari Kh.M., Galimov K.Z. Nonlinear theory of elastic shells. – Kazan: Tatknigoizdat, 1957. – 431 p.
14. Каюмов Р.А., Тазюков Б.Ф., Мухамедова И.З., Шакирзянов Ф.Р. Большие прогибы вязкоупругих панелей // Известия вузов. Математика. 2019. No. 11. Pp. 80-86.
Kayumov R.A., Tazyukov B.F., Mukhamedova I.Z., Shakirzyanov F.R. Large deflections of viscoelastic panels // News of universities. Mathematics. 2019. No. 11. P. 80-86.
15. Kayumov R.A., Shakirzyanov F.R. Large Deflections and Stability of Low-Angle Arches and Panels During Creep Flow // Adv. Struct. Mater. 2021. Vol. 141. P. 237-248.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_18.
16. Vega-Posada C., Areiza-Hurtado M., Aristizabal-Ochoa J.D. Large-deflection and post-buckling behavior of slender beam-columns with non-linear end-restraints // International Journal of NonLinear Mechanics. 2011. Vol. 46. P. 79-95.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.07.006>.
17. Areiza-Hurtado M., Aristizabal-Ochoa J.D. Second-order analysis of a beam-column on elastic foundation partially restrained axially with initial deflections and semirigid connections // Structures. 2019. Vol. 20. P. 134-146.
<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2019.03.010>.
18. Giraldo-Londono O., Monsalve-Giraldo J.S., Aristizabal-Ochoa J.D. Large-deflection and postbuckling of beam-columns with non-linear semi-rigid connections including shear and axial effects // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Vol. 77. P. 85-95. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2015.07.009>.
19. Benmokrane B., Brown V.L., Mohamed K., Nanni A., Rossini M., Shield C. Creep-rupture limit for GFRP bars subjected to sustained loads // Journal of Composites for Construction. 2019. Vol. 23. No. 6. Article 06019001.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CC.1943-5614.0000971](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CC.1943-5614.0000971).
20. Shlyannikov V., Martínez-Pañeda E., Tumanov A., Tartygasheva A. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity // International Journal of Solids and Structures. 2021. Vol. 208–209. P. 63–82.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
21. Степанова Л.В., Белова О.Н., Чаплий Д.В., Быкова Ю.С. Численное исследование асимптотики поврежденности материала в окрестности фронта трещины при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2025. Т. 392, No 4. С. 169–180.
Stepanova L.V., Belova O.N., Chapliy D.V., Bykova J.S. Numerical investigation of the asymptotics of material damage in the vicinity of the creep crack front // Applied Mechanics and Technical Physics. 2025. Vol. 392, No. 4. P. 169-180.
<https://doi.org/10.15372/PMTF202415561>.
22. Chitsazan I., Kobraei M., Jumaat M.Z., Shafigh P. An experimental study on the flexural behavior of FRP RC beams and a comparison of the ultimate moment capacity with ACI // Journal of Civil Engineering and Construction Technology. 2010. Vol. 1. No. 2. P. 27-42.
23. CNR-DT 203/2006. Guide for the Design and Construction of Concrete Structures Reinforced with Fiber – Reinforced Polymer Bars. Advisory Committee on Technical Recommendations for Construction. – 2007. – 55 p.
24. D’Antino T., Pisani M.A. Long-term behavior of GFRP reinforcing bars // Composite Structures. 2019. Vol. 227. Article 111283.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111283>.

25. Denvid Lau, Hoat Joen Pam Experimental study of hybrid FRP reinforced concrete beams // Engineering Structures. 2010. Vol. 32. No. 12. P. 3857-3865.
26. El-Gamal S., AbdulRahman B., Benmokrane B. Deflection Behaviour of Concrete Beams Reinforced with Different Types of GFRP Bars // CICE 2010 - The 5th International Conference on FRP Composites in Civil Engineering. September 27-29, 2010, Beijing, China.
27. Ju M., Park Y., Park C. Cracking control comparison in the specifications of serviceability in cracking for FRP reinforced concrete beams // Composite Structures. 2017. Vol. 182. P. 674- 684. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.016>.
28. Kim S., Kim S. Flexural behavior of concrete beams with steel bar and FRP reinforcement // Journal of Asian Architecture and Building Engineering. 2019. Vol. 18. No. 2. P. 94-100. <https://doi.org/10.1080/13467581.2019.1596814>.
29. Lapko A., Urba'nski M. Experimental and theoretical analysis of deflections of concrete beams reinforced with basalt rebar // Archives of Civil and Mechanical Engineering. 2015. Vol. 15. No. 1. P. 223-230. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2014.03.008>.
30. Мирсаяпов, И.Т., Гиматдинов И.М. Расчет сталежелезобетонной балки на основе двухлинейной диаграммы деформирования // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2024. – No 3(69). С. 118-129.
Mirsayapov, I.T., Gimatdinov I.M. Calculation of a composite beam based on a two-line deformation diagram // Bulletin of the Kazan State University of Architecture and Civil Engineering. – 2024. – No. 3(69). – P. 118-129. <https://doi.org/10.48612/NewsKSUAE/69.11>.

Информация об авторах

Каюмов Рашит Абдулхакович, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: kayumov@rambler.ru, ORCID: 0000-0003-0711-9429

Шакирзянов Фарид Рашитович, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: faritbox@mail.ru ORCID: 0000-0002-6514-8335

Гимазетдинов Айваз Расимович, ассистент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: aivazaivaz1313@gmail.com ORCID: 0000-0002-2177-1942

Гумеров Анвар Васильевич, кандидат технических наук, доцент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

E-mail: anvar_gumerov@list.ru, ORCID: 0000-0002-4547-8839

Information about the authors

Rashit A. Kayumov, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation.

E-mail: kayumov@rambler.ru, ORCID: 0000-0003-0711-9429

Farid R. Shakirzyanov, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation.

E-mail: faritbox@mail.ru ORCID: 0000-0002-6514-8335

Aivaz R. Gimazetdinov, assistant, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation.

E-mail: aivazaivaz1313@gmail.com ORCID: 0000-0002-2177-1942

Anvar V. Gumerov, candidate of technical sciences, associate professor, Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation

E-mail: anvar_gumerov@list.ru, ORCID: 0000-0002-4547-8839

Дата поступления: 23.02.2026

Дата принятия: 29.04.2026