

УДК 624.012.35/45

Замалиев Ф.С. – кандидат технических наук, доцент

E-mail: zamaliev49@mail.ru

Каюмов Р.А. – доктор физико-математических наук, профессор**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

К расчету сталежелезобетонного перекрытия как ортотропной плиты**Аннотация**

Существующие методы расчета сталежелезобетонных конструкций перекрытий основаны на балочных моделях и не учитывают пространственную их работу. Сталежелезобетонные перекрытия, применяемые в гражданских зданиях, представляют железобетонные плиты, подкрепленные стальными балками, поэтому для их расчета невозможно использовать существующие методы расчета изотропных пластин. В статье для расчета сталежелезобетонного перекрытия предложено рассматривать его как ортотропную плиту. Записано дифференциальное уравнение изгиба, даны формулы цилиндрических жесткостей, выражения для расчета напряжений и прогибов. Приведен пример расчета.

Ключевые слова: сталежелезобетонное перекрытие, ортотропная плита, дифференциальное уравнение, численные расчеты.

В гражданских зданиях сталежелезобетонные конструкции применяют в качестве перекрытий и покрытий. Конструктивная система состоит из железобетонной плиты, подкрепленной стальными балками – ребрами. Железобетонная плита работает в двух направлениях: в направлении стальных балок и в перпендикулярном направлении по неразрезной схеме, опираясь на стальные ребра. На сегодняшний день при проектировании сталежелезобетонных перекрытий основной расчет ведется в направлении стальных балок [1, 2], хотя экспериментальные исследования показывают значительные расхождения в результатах несущей способности отдельных балок и фрагментов перекрытий [3, 4, 5].

Наметившаяся тенденция расширения применения сталежелезобетонных конструкций в отечественной строительной практике актуализирует их дальнейшие исследования и поиск новых подходов в расчетах, особенно учитывающих пространственную работу сталежелезобетонной плиты.

Рассмотрим сталежелезобетонное перекрытие как бетонную плиту, подкрепленную стальными балками (рис. 1). Считаем, что при малых эксплуатационных нагрузках $p(x, y)$ материалы конструкции работают упруго. Для определения напряженно-деформированного состояния примем, как обычно, что перемещения U, V, W (вдоль осей x, y, z соответственно) раскладываются в ряды по координате z , в которых удерживаются по два слагаемых для тангенциальных перемещений и одно слагаемое для прогиба:

$$U = u(x, y) + u_1(x, y) \cdot z, \quad V = v(x, y) + v_1(x, y) \cdot z, \quad W = w(x, y).$$

Систему координат примем в виде, изображенном на рис. Следовательно, u, v, w – перемещения точек отсчетной плоскости $z = 0$. Принимая кинематические гипотезы Кирхгоффа-Лява о том, что нормаль к плите остается нормальной и после деформации, получим выражения:

$$u_1(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_1(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Тогда деформации в бетонной плите определяются по соотношениям Коши следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Для определения перемещений $u(x, y)$, $v(x, y)$ и прогиба $w(x, y)$, которые являются интегральными характеристиками конструкции, вполне приемлемо использовать осредненные механические характеристики конструкции, а для определения напряжений затем применить соотношения закона Гука со своими механическими характеристиками.

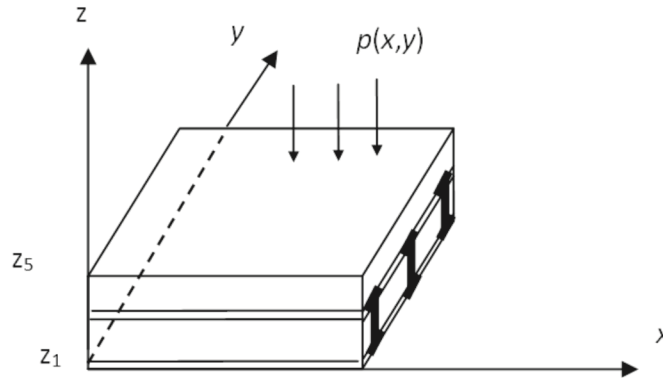


Рис. Схема бетонной плиты, подкрепленной стальными балками-ребрами

Представим конструкцию состоящей из бетонной плиты и слоев, эквивалентных по деформативным характеристикам поведению полок, а также слоя, эквивалентного по деформативным характеристикам поведению стенок двутавра. Для получения этих характеристик применим методы осреднения (гомогенизации). Введем удельные доли сечений полок v_b и стенок v_d стальных балок для соответствующих слоев. Пусть a_x, a_y размеры бетонной плиты вдоль осей x, y соответственно, H – ее толщина. Размеры двутавра обычные – h, b, t, d , число балок обозначим через m . Тогда:

$$v_b = b \cdot m / a_y, \quad v_d = d \cdot m / a_y.$$

Для осредненного слоя, состоящего из полок, согласно методам осреднения получим упругие характеристики ортотропного материала в виде:

$$E_x = E_{stail} \cdot v_b, \quad E_y = 0, \quad \mu_{xy} = 0, \quad \mu_{yx} = 0, \quad G_{xy} = 0.$$

Для слоя, состоящего из стенок, аналогично получим:

$$E_x = E_{stail} \cdot v_d, \quad E_y = 0, \quad \mu_{xy} = 0, \quad \mu_{yx} = 0, \quad G_{xy} = 0.$$

Уравнения равновесия малого элемента каждого слоя пластины имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Запишем их в матричном виде (в дальнейшем, если нет индексов x, y, z , то прописные буквы означают матрицы, а строчные – векторы):

$$L\sigma + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + N\tau = 0, \quad N = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T, \quad \tau = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T. \quad (4)$$

Индекс T означает операцию транспонирования.

Кинематические соотношения перепишем в виде:

$$\varepsilon = e + z\chi, e = \{e_{xx}, e_{yy}, 2e_{xy}\}^T, \chi = \{\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}\}, \quad (5)$$

В случае принятия гипотез Кирхгоффа-Лява соотношения для e и χ имеют вид:

$$e = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}, \quad \chi = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad (6)$$

Далее обозначим через n число слоев, например в случае двутавра ($n = 4$).

Закон Гука для слоя с номером k в осях xOy запишем в виде:

$$\sigma_k = D_k e. \quad (7)$$

Матрица D_k – это матрица упругих характеристик слоя. Принимаем статические гипотезы Кирхгоффа-Лява о том, что напряжения $\sigma_z \ll \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Тогда через технические константы его элементы вычисляются следующим образом (индексы k для простоты записи опущены):

$$D_{11} = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}, \quad D_{12} = D_{11}\mu_{yx}, \quad D_{33} = G_{xy}.$$

Связь тангенциальных деформаций e с изменениями кривизн χ получим из условия равенства нулю усилий в тангенциальном направлении для элемента многослойной пластины. Запишем его в виде:

$$\sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_k dz = 0. \quad (8)$$

Подставляя σ_k , получим соотношение между e и χ :

$$L(f(e, \chi)) = 0.$$

$$f = \left(\sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) D_k e + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_{k+1}^2 - z_k^2) D_k \chi \right).$$

Принимая, что:

$$f = 0, \quad (9)$$

выражаем вектор $\{e\}$ через вектор $\{\chi\}$:

$$e = H \chi, \quad H = \left(\sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) D_k \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_{k+1}^2 - z_k^2) D_k \right). \quad (10)$$

Как следует из (5), (6) и (10), вектор деформации $\{e\}$ выражается через прогиб w .

Разрешающее уравнение относительно прогиба.

Из уравнений равновесия (2) получим выражение для вектора τ .

$$\tau = \int_{z_1}^z L \sigma dz + \tau^0(x, y) = L \int_{z_1}^z \sigma dz + \tau^0(x, y). \quad (11)$$

На лицевых поверхностях $z = z_1$ и $z = z_{n+1}$ отсутствуют касательные внешние воздействия. Тогда статические граничные условия имеют вид:

$$\tau(z_1) = \tau(z_{n+1}) = 0. \quad (12)$$

Как видно из (11) и (9), эти условия выполняются при $\tau^0 = 0$.

Уравнение для прогиба w получим из уравнения (3) и граничных условий для σ_z на лицевых поверхностях.

Интегрируя (3), находим выражение:

$$\sigma_z = \int_{z_1}^z N \tau dz + \sigma^0(x, y), \quad N = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]. \quad (13)$$

Статические граничные условия на лицевых поверхностях имеют вид:

$$\sigma_z(z_1) = 0, \quad (14)$$

$$\sigma_z(z_{n+1}) = -p. \quad (15)$$

Из (14) вытекает, что $\sigma^0(x, y) = 0$.

Таким образом, выражение для напряжения σ_z принимает следующий вид:

$$\sigma_z = NL \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z \sigma dz dz. \quad (16)$$

Уравнение для прогиба u_z получим из граничного условия (15) в виде:

$$NL \int_{z_1}^{z_{k+1}} \int_{z_1}^z \sigma dz dz = -p. \quad (17)$$

После преобразований уравнение изгиба принимает вид:

$$D_{04} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_{40} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -p. \quad (18)$$

Здесь D_{04} , D_{22} , D_{40} – цилиндрические жесткости полученной модели ортотропной плиты.

Для определения напряжения в стальных балках и в бетонной плите возможны два варианта вычислений. В первом случае нужно воспользоваться соотношениями (6) для вычисления изменений кривизны на плоскости с координатой $z = 0$ (в нашем случае это плоскость, проходящая по нижним поверхностям полок стальных балок):

$$\chi = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}.$$

Затем вычисляются деформации на плоскости с координатой $z=0$ по соотношениям (10):

$$e = H \chi, \quad H = \left(\sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) D_k \right)^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_{k+1}^2 - z_k^2) D_k \right).$$

После этого можно вычислить деформации на любом уровне z по высоте сталебетонной плиты по соотношению:

$$\varepsilon = e + z \chi.$$

Наконец, выражение для напряжений вытекает из закона Гука согласно (7):

$$\sigma_k = D_k \varepsilon.$$

Таким образом, решение задачи об отыскании напряженно-деформированного состояния сталебетонной плиты, так же, как и для обычной однородной изотропной пластины, сводится к решению уравнения (18). На сегодня для решения существует немало разных методов, например, методы коллокаций, Бубнова-Галеркина, Ритца, МКЭ, МКР и др.

В случае шарнирно опертой по краям плиты одним из наиболее простых является метод, предложенный Навье, но который по сути является методом Бубнова-Галеркина. Рассмотрим это решение при произвольной нагрузке.

Пусть имеем распределенную по поверхности плиты нагрузку $p(x, y)$. Для простоты записи введем обозначения:

$$a = a_x, \quad b = a_y.$$

Решение ищем в виде ряда:

$$w = B_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + B_{21} \sin \frac{\pi 2x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + B_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi 2y}{b} + \dots + B_{ij} \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi j y}{b} + \dots \quad (19)$$

Подставляя в уравнение (18), получим:

$$B_{11} \left(D_{40} \frac{\pi^4}{a^4} + 2D_{22} \frac{\pi^4}{a^2 b^2} + D_{04} \frac{\pi^4}{b^4} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \dots \\ + B_{ij} \left(D_{40} \frac{(\pi i)^4}{a^4} + 2D_{22} \frac{(\pi i)^2 (\pi j)^2}{a^2 b^2} + D_{04} \frac{(\pi j)^4}{b^4} \right) \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi j y}{b} + \dots = -p(x, y).$$

Для получения алгебраических уравнений относительно B_{11} , B_{22} ... можно использовать любые методы (например, коллокаций), но наиболее удобным является метод Бубнова-Галеркина. Причина в том, что в нашем случае метод Бубнова сразу даёт выражения для B_{ij} .

Умножим уравнение на $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$, проинтегрируем по площади плиты:

$$\int_A \dots dA = \int_0^a dx \int_0^b \dots dy.$$

Справа получим: $\int_0^a dx \int_0^b p(x, y) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dy$.

Рассмотрим левую часть:

$$B_{11} \left(D_{40} \frac{\pi^4}{a^4} + 2D_{22} \frac{\pi^4}{a^2 b^2} + D_{04} \frac{\pi^4}{b^4} \right) \int_0^a dx \sin^2 \frac{\pi x}{a} \int_0^b \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy + \dots$$

$$+ B_{ij} \left(D_{40} \frac{(\pi i)^4}{a^4} + 2D_{22} \frac{(\pi i)^2 (\pi j)^2}{a^2 b^2} + D_{04} \frac{(\pi j)^4}{b^4} \right) \int_0^a dx \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi j x}{a} \int_0^b \sin \frac{\pi j y}{b} \sin \frac{\pi y}{b} dy + \dots$$

Все слагаемые, кроме первого, равны нулю, причем $\int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}$, $\int_0^b \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}$.

Таким образом, получаем:

$$B_{11} = \frac{-p \cdot [1 - \cos(\pi)] \cdot [1 - \cos(\pi)]}{\pi^6 \cdot \left(D_{40} \frac{1}{a_x^4} + 2D_{22} \frac{1}{a_x^2 a_y^2} + D_{04} \frac{1}{a_y^4} \right)}.$$

Аналогично получим все остальные коэффициенты в следующем явном виде:

$$B_{ij} = \frac{-p \cdot [1 - \cos(i\pi)] \cdot [1 - \cos(j\pi)]}{i \cdot j \cdot \pi^6 \cdot \left(D_{40} \frac{i^4}{a_x^4} + 2D_{22} \frac{i^2 j^2}{a_x^2 a_y^2} + D_{04} \frac{j^4}{a_y^4} \right)}.$$

В качестве примера рассмотрим задачу изгиба сталежелезобетонной плиты, которая изготовлена из бетона класса В30 и имеет подкрепление из шести балок, изготовленных из двутавров № 20. Размеры плиты:

$$a_x = 600 \text{ см}, a_y = 600 \text{ см}, h = 8 \text{ см} [4].$$

Технические константы приняты следующими:

$$E_{\text{бет}} = 265 \text{ т/см}^2, \mu_{\text{бет}} = 0,15.$$

$$E_{\text{стали}} = 2000 \text{ т/см}^2, \mu_{\text{стали}} = 0,3$$

Нагрузка принималась равномерной, суммарное значение которой принималось равным 10 т. В формуле (19) принималось $i = 3, j = 3$.

В бетонной плите, подкрепленной шестью двутаврами № 20, формула (19) дает следующее максимальное значение прогиба:

$$W_{\text{max}} = 0,603 \text{ см}.$$

Список библиографических ссылок

1. СП 35.13330.2011. Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84*; введ. 2011-05-20. – М.: Стройиздат, 2011.
2. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1: General rules for buildings / European Committee for Standardization, 2002.
3. Замалиев Ф.С., Шаймарданов Р.И. Исследования крупномасштабной модели фрагмента сталежелезобетонного перекрытия. // Актуальные проблемы градостроительства и ЖКК: сборник международной научно-практической конференции. – М., 2003. – С. 285-287.
4. Замалиев Ф.С., Сагитов Р.А., Хайрутдинов Ш.Н. Испытание фрагмента сталежелезобетонного перекрытия на статические нагрузки // Известия КазГАСУ, 2010, № 1 (13). – С. 102-105.
5. Замалиев Ф.С. Экспериментальные исследования пространственной работы сталежелезобетонных конструкций // Вестник МГСУ, 2012, № 12. – С. 53-60.

Zamaliy F.S. – candidate of technical sciences, associate professor

E-mail: zamaliy49@mail.ru

Kaumov R.A. – doctor of physical-mathematical sciences, professor

Kazan State University of Architecture and Engineering

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

On the calculation of the steel-concrete slab as orthotropic plate

Resume

Methods for calculating the steel-concrete structures nowadays are insufficiently elaborated. Existing methods either use a beam model or semi empirical, or reflect the actual work of steel reinforced concrete slab as a spatial reference system. In this article, the steel-concrete overlay consisting of the concrete slab and the steel ribs regarded as a spatial construction, working in the direction of the steel beams – the edges and in the perpendicular direction. Resolved steel-concrete joists, supported by steel beams and loaded uniformly distributed load is represented as orthotropic plate. On the basis of kinematic hypotheses and conjectures recorded normal expressions for displacements and deflections. Using the method of averaging (homogenization) obtained characteristics of the concrete slab and deformation characteristics reflecting layers of shelves and walls of the I-beam steel beam. Recorded differential equation of bending of steel reinforced concrete slab as an orthotropic plate, which consists of four layers. Given expression to determine the bending characteristics of the model orthotropic plate. The formulas for determining the stresses in the steel beam and concrete slab are given. An example of calculation of steel reinforced concrete slab dimensions 6x6 m, supported by six steel beams of the I-beam № 20.

Keywords: steel-concrete joists, orthotropic plate, differential equation, numerical calculations.

Reference list

1. SP 35.13330.2011. Bridges and pipes. The updated edition SNIP 2.05.03-84*; introduced, 2011-05-20. – M.: Stroiizdat, 2011.
2. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1: General rules for buildings / European Committee for Standardization, 2002.
3. Zamaliy F.S., Shaimardanov R.I. Studies of large-scale models of steel reinforced concrete slab fragment // Actual problems of urban development and the FCC: a collection of international scientific-practical conference. – M., 2003. – P. 285-287.
4. Zamaliy F.S., Sagitov R.A., Khairutdinov Sh.N. Test fragment the steel-concrete slab at static load // News KSUAE, 2010, № 1 (13). – P. 102-105.
5. Zamaliy F.S., Experimental studies of spatial steel-concrete structures // Herald MGRS, 2012, № 12. – P. 53-60.