Карабашева Э.Н. – аспирант
E-mail: enkarabasheva@bk.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности

Аннотация

В верхней полуплоскости рассматривается однородная задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов краевого условия и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности. В процессе работы проведено полное исследование картины разрешимости задачи. Основными результатами, которые были получены в процессе работы, являются: формула общего решения при данной постановке, формулировка и обоснование теорем, описывающих картину разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: завихрение на бесконечности, целая функция, краевая задача Гильберта, бесконечный индекс.

Введение

В краевой задаче Гильберта [2], [1] требуется определить аналитическую в верхней полуплоскости D функцию $F(z)$ по краевому условию:

$$a(t)\Re F(t) - b(t)\Im F(t) = c(t), \qquad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ − заданные вещественнозначные функции переменной точки t вещественной оси L, $a^2(t)+b^2(t) \neq 0$. Нас будет интересовать случай, когда односторонние пределы функции $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$ на бесконечности не существуют как некоторая положительная степень $|t|^{\rho}$. Следуя Н.В. Говорову ([3], с. 114), такую задачу Гильберта будем называть задачей с двусторонним завихрением на бесконечности порядка ρ.

И.Е. Сандрыгайло [4] сформулировал задачу с непрерывными всюду на вещественной оси кроме бесконечно удаленной точки, коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка меньше 1, получил формулу общего решения и предварительные результаты о разрешимости в классе ограниченных функций экспоненциального порядка убывания на бесконечности и в классе ограниченных функций. Завершенную картину разрешимости этой задачи получили Р.Б. Салимов и П.Л. Шабалин в [5, 6, 7].

В работах [8] и [9] впервые были получены формулы общего решения задачи Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка. Завершенная картина разрешимости этой задачи получена в работах [7] для порядка завихрения $\rho < 1/2$, для $1/2 \leq \rho < 1$.

В данной статье получена формула общего решения, проведено полное описание картины разрешимости задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разного порядка $\left(\nu(t) = O(|t|^{\rho_-}), t \to -\infty,\right.$ и $\left.\nu(t) = O(t^{\rho_+}), t \to +\infty\right)$ завихрением на бесконечности.

Постановка и решение задачи

Пусть L − вещественная ось в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, D − полуплоскость $\Im z > 0$, t − точка линии L. Требуется найти функцию $F(z)$, аналитическую в области D по краевому условию (1), где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ − заданные на L действительные функции точки t контура L, непрерывные всюду, кроме точек разрыва первого рода t_j, $j=\pm 1,\pm 2,...,$ причем $a^2(t)+b^2(t)\neq 0$ во всех точках непрерывности коэффициентов, $0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}<\cdots,$ $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=\infty$ $0>t_{-1}>\cdots>t_{-k}>t_{-k-1}>\cdots,$ $\lim\limits_{k\to\infty} t_{-k}=-\infty.$ Считаем, что краевое условие выполняется на границе L, исключая точки t_k, t_{-k}, где $k=\overline{1,\infty}$. Уточним постановку задачи ниже.

Если $c(t)\equiv 0$, то задача называется однородной, если $c(t)\not\equiv 0-$ неоднородной. В этой работе рассмотрим однородную задачу Гильберта.

Краевое условие (1) с $c(t)\equiv 0$, перепишем в виде:

$$\Re[e^{-i\nu(t)}F(t)]=0, \tag{2}$$

где $\nu(t)=\arg[a(t)-ib(t)]$ − ветвь, выбранная на каждом из интервалов непрерывности коэффициентов так, чтобы число $\delta_j=\nu(t_j+0)-\nu(t_j-0)$ удовлетворяло условию $0\le\delta_j<2\pi,\quad j=\pm 1,\pm 2,\ldots.$

Введем функцию $\varphi(t)=\nu(t)-\beta(t)$, где $\beta(t)$ − целочисленная функция, принимающая значения β_k, β_{-k} в интервалах (t_k,t_{k+1}) и (t_{-k},t_{-k-1}), $k=\overline{1,\infty}$, соответственно, и значение $\beta_0=0$ в интервале (t_{-1},t_1). Число β_k выберем так, чтобы $0\le\phi(t_k+0)-\phi(t_k-0)<\pi,$ а значение β_{-k} выберем так, чтобы $0\le\phi(t_{-k}+0)-\phi(t_{-k}-0)<\pi.$ Обозначим $\kappa_j=\dfrac{\varphi(t_j+0)-\varphi(t_j-0)}{\pi},\quad j=\pm 1,\pm 2,\cdots,$ тогда имеем $0\le\kappa_k<1, 0\le\kappa_{-k}<1,\quad k=\overline{1,\infty}.$

Будем считать, что точки разрыва удовлетворяют условиям $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{t_k}<\infty,\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{-t_{-k}}<\infty\cdot$ Тогда для функций:

$$P_+(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{t_k})^{\kappa_k},\quad P_-(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{t_{-k}})^{\kappa_{-k}}, \tag{3}$$

где под $\arg(1-z/t_j)$ имеем в виду однозначную ветвь, которая обращается в нуль при $z=0$ и непрерывную в плоскости z, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t=t_j$, $t=+\infty$ при $j>0$ и соединяющей точки $t=-\infty$, $t=t_j$ при $j<0$, справедливы (см. [8], С.110) формулы:

$$\begin{aligned}&\arg P_+(t)=-\sum_{j=1}^{k}\kappa_j\pi,\quad t_k<t<t_{k+1},\\ &\arg P_-(t)=\sum_{j=1}^{k}\kappa_{-j}\pi,\quad t_{-k-1}<t<t_{-k},\end{aligned} \tag{4}$$

где $k=\overline{1,\infty}$:

$$\arg P_+(t)=0,\ t<t_1,\quad \arg P_-(t)=0,\ t>t_{-1}. \tag{5}$$

Краевое условие (2) запишем так:

$$\Re[e^{-i\varphi_1(t)}F(t)P_+(t)P_-(t)]=0, \tag{6}$$

где

$$\varphi_1(t)=\varphi(t)+\arg P_+(t)+\arg P_-(t), \tag{7}$$

функции $\arg P_+(t)$, $\arg P_-(t)$ определяются формулами (4), (5).

Вводим новую искомую функцию $F_1(z)=F(z)P_+(z)P_-(z)$, условие (6) запишем в виде $\Re[e^{-i\varphi_1(t)}F_1(t)]=0,$ причем, как видно из формул (4), (7), функция $\varphi_1(t)$ непрерывна во всех конечных точках L. Так мы пришли к краевой задаче Гильберта с непрерывными коэффициентами для функции $F_1(z)$. При этом будем считать, что функция $\varphi_1(t)$ удовлетворяет условиям:

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} \nu^- t^{\rho^-}+\tilde{\nu}(t), & t<0,\\ \nu^+|t|^{\rho^+}+\tilde{\nu}(t), & t>0, \end{cases} \tag{8}$$

где ρ^-,ρ^+ – заданные числа, подчиненные ограничениям $0<\rho^-<1$, $0<\rho^+<1$, $\rho^-\neq\rho^+$, (случай $\rho^-=\rho^+$ подробно разобран в работе [7]), $\nu^-\neq 0$, $\nu^+\neq 0$, функция $\tilde{\nu}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на вещественной оси, причем на бесконечности это условие имеет вид неравенства:

$$|\tilde{\nu}(t_1)-\tilde{\nu}(t_2)|\le K\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|^{\alpha}, \tag{9}$$

с $K>0$, и некоторым α, $0<\alpha<1$.

Решение $F(z)$ однородной задачи будем искать в классе функций, для которых $F(z)P_+(z)P_-(z)=F_1(z)$ является ограниченной в D функцией. Таким образом, задача сводится к уже рассмотренной в [6]. После того, как функция $F_1(z)$ будет найдена, можно будет определить решение однородной краевой задачи (2), по формуле $F(z)=F_1(z)/P_+(z)P_-(z)$.

В точке t_j решение задачи обращается в бесконечность порядка κ_j.

Рассмотрим поведение решения задачи на луче $z=re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta=\text{const}$, $0<\theta<\pi$, $r\to\infty$. Так же, как в [9], введем функции:

$$n_-^*(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<-t_{-1},\\ \sum\limits_{j=1}^{k-1}\kappa_{-j}, & -t_{-k+1}\le x<-t_{-k}, \end{cases} \qquad n_+^*(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<t_1,\\ \sum\limits_{j=1}^{k-1}\kappa_j, & t_{k-1}\le x<t_k. \end{cases}$$

Пусть будут выполнены условия:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n_+^*(x)}{x^{\kappa_+}}=\Delta_+,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{n_-^*(x)}{x^{\kappa_-}}=\Delta_-, \tag{10}$$

с положительными постоянными Δ_+, Δ_- и $0<\kappa_-<1$, $0<\kappa_+<1$. В [9], ([8], с. 112) получены структурные формулы:

$$\ln P_+(z)=\frac{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin(\pi\kappa_+)}z^{\kappa_+}+I_+(z),\quad I_+(z)=-z\int_0^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau)-\Delta_+\tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau-z)}d\tau, \tag{11}$$

для $0<\arg z<2\pi$ и

$$\ln P_-(z)=\frac{\pi\Delta_-}{\sin\pi\kappa_-}z^{\kappa_-}+I_-(z),\quad I_-(z)=z\int_0^{+\infty}\frac{n_-^*(\tau)-\Delta_-\tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau+z)}d\tau, \tag{12}$$

если $-\pi<\arg z<\pi$. Предельные значения интегралов типа Коши выражаем по формулам Сохоцкого, далее, выделяя вещественные части из (11), (12), получим равенства:

$$\begin{gathered} \ln|P_+(t)|=\frac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\kappa_+\pi)}t^{\kappa^+}+I_+(t),\quad t>0,\\ I_+(t)=-\int_0^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau)-\Delta_+\tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau-t)}d\tau,\quad t>0,\quad t\neq t_k,\quad k=\overline{1,\infty}, \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \ln|P_-(-t)|=\frac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\kappa_-\pi)}t^{\kappa^-}+I_-(-t),\\ I_-(-t)=-\int_0^{+\infty}\frac{n_-^*(\tau)-\Delta_-\tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau-t)}d\tau,\quad t<0,\quad t\neq -t_{-k},\quad k=\overline{1,\infty}. \end{gathered} \tag{14}$$

Из формул (3), (11), (12) следует, что функция $|\exp\{I_+(z)\}|$ $\left(|\exp\{I_-(z)\}|\right)$ обращается в нуль порядка κ_k (порядка κ_{-k}) в точке t_k (t_{-k}), $k=\overline{1,\infty}$. Справедлива лемма из [12].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (10),* δ *– заданное малое положительное число,* $z=re^{i\theta}$*, тогда справедливы следующие асимптотические оценки:*

$$I_+(re^{i\theta})=\mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_+}),\quad r\to+\infty,\quad \delta<\theta<2\pi-\delta,$$

$$I_-(re^{i\theta})=\mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_-}),\quad r\to+\infty,\quad -\pi+\delta<\theta<\pi+\delta.$$

Для аналитического выделения особенностей краевого условия на бесконечности, введем функцию: $P_1(z)+iQ_1(z)=l_1e^{i\alpha_1}z^{\rho^-}$, которую при $z=re^{i\theta}$ представим в виде:

$$P_1(z)+iQ_1(z)=l_1r^{\rho^-}(\cos(\alpha_1+\rho^-\theta)+i\sin(\alpha_1+\rho^-\theta)).$$

Если взять $l_1=-\dfrac{\nu^-}{\sin\pi\rho^-}$, $\alpha_1=\dfrac{\pi}{2}$, то при $z=t$, $t>0$, $\theta=0$, и $t<0$, $\theta=\pi$, получим:

$$P_1(t)=\begin{cases}\nu^-|t|^{\rho^-}, & t<0,\\ 0, & t>0.\end{cases}\qquad Q_1(t)=\begin{cases}-\dfrac{\nu^-|t|^{\rho^-}\cos\pi\rho^-}{\sin\pi\rho^-}, & t<0,\\ -\dfrac{\nu^-t^{\rho^-}}{\sin\pi\rho^-}, & t>0,\end{cases}\tag{15}$$

и

$$Q_1(re^{i\theta})=-\frac{r^{\rho^-}\nu^-\cos(\theta\rho^-)}{\sin(\pi\rho^-)}.\tag{16}$$

Также введем функцию $P_2(z)+iQ_2(z)=l_2e^{i\alpha_2}z^{\rho^+}$, для которой при $l_2=\nu^+/\sin\pi\rho^+$, $\alpha_2=\pi/2-\pi\rho^+$ справедливы формулы:

$$P_2(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \nu^+t^{\rho^+}, & t>0,\end{cases}\qquad Q_2(t)=\begin{cases}\dfrac{\nu^+|t|^{\rho^+}}{\sin(\pi\rho^+)}, t<0,\\ \dfrac{\nu^+t^{\rho^+}\cos(\pi\rho^+)}{\sin(\pi\rho^+)}, t>0,\end{cases}\tag{17}$$

и

$$Q_2(re^{i\theta})=\frac{r^{\rho^+}\nu^+\cos(\pi\rho^+-\theta\rho^+)}{\sin(\pi\rho^+)}.\tag{18}$$

Определим ограниченную в области D, аналитическую функцию с граничными значениями мнимой части: $\varphi_1(t)-P_1(t)-P_2(t)=\tilde{\nu}(t)$, по формуле:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\nu}(t)\frac{dt}{t-z}.$$

На контуре L эта функция принимает значения $\Gamma^+(t)=\Gamma(t)+i\tilde{\nu}(t)$, где:

$$\Gamma(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\nu}(t_1)\frac{dt_1}{t_1-t}.$$

Краевое условие (6) запишем так:

$$\Im\left\{ie^{-\Gamma^+(t)}e^{-iP_1(t)+Q_1(t)}e^{-iP_2(t)+Q_2(t)}F(t)P_+(t)P_-(t)\right\}=0,\tag{19}$$

преобразовав при дополнительных ограничениях (8), (11), (12) краевые условия однородной задачи к виду задачи (19).

В фигурных скобках формулы (19) граничное значение функции:

$$\Phi(z)=ie^{-\Gamma^+(z)}e^{-iP_1(t)+Q_1(t)}e^{-iP_1(t)+Q_1(t)}F(z)P_+(z)P_-(z),\tag{20}$$

аналитической в области D, которую с учетом (13), (14) можно записать так:

$$\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)}\exp\{-iP_1(t)+Q_1(t)\}\exp\{-iP_2(t)+Q_2(t)\}F(z)\times$$
$$\times e^{I_+(z)}e^{+I_-(z)}\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}\right\}\exp\left\{\frac{\pi\Delta_-}{\sin\pi\kappa_-}z^{\kappa_-}\right\}. \tag{21}$$

Согласно (19) для граничного значения функции $\Phi(z)$ всюду на L имеем:

$$\Im\Phi_+(t) = 0 \tag{22}$$

Так как функция $\Phi(z)$ симметричная и аналитическая в верхней полуплоскости и $\Im\Phi_+(t) = 0$, ее можно продолжить на нижнюю полуплоскость $\Im z < 0$ по принципу симметрии Римана-Шварца формулой:

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \tag{23}$$

Решение $F(z)$ однородной задачи (19), ищем в классе функций $\tilde{B}$, для которых произведение $|F(z)||z-t_j|^{\kappa_j}$ ограничено вблизи точки t_j для всех $j=\pm1,\pm2,\ldots$.

Для таких решений условие $\Im\Phi_+(t) = 0$ считаем выполненным и в точках t_k, t_{-k}, $k=\overline{1,+\infty}$. Так как, продолжая функцию $\Phi(z)$ на полуплоскость $\Im z<0$ через участки $t_{k-1}t_k$ и $t_k t_{k+1}$, мы получаем одну и ту же функцию в силу (24). Величина $|\Phi(z)|$ является ограниченной вблизи t_k в классе $\tilde{B}$, поэтому точка t_k является устранимой особой точкой функции $\Phi(z)$, полученной при аналитическом продолжении, значит, можно принять $\Im\Phi^+(t_k) = 0$. Таким образом, мы строим целую функцию $\Phi(z)$.

Далее справедлива теорема 1.

Теорема 1. *Для того, чтобы однородная краевая задача (20) имела решение* $F(z)$ *в классе* $\tilde{B}$, *необходимо и достаточно, чтобы для этого решения была справедлива формула (20), где* $\Phi(z)$ *– произвольная целая функция, которая принимает действительные значения на границе* L.

Теперь решение однородной задачи (19) станем искать в классе B_* функций $F(z)$, для которых произведение $|F(z)|e^{\Re I_+(z)}e^{\Re I_-(z)}$ – функция аналитическая и ограниченная в области D. Класс решений $B_*\subset\tilde{B}$. Вычислим порядок функции $\Phi(z)$ по формуле $\rho_\Phi := \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}[\ln\ln M(r)/\ln r]$. В силу симметрии для целой функции $\Phi(z)$ формулы (20), когда имеют место (22), (23):

$$M(r) := \max_{0\le\theta\le2\pi}|\Phi(re^{i\theta})| = \max_{0\le\theta\le\pi}|\Phi(re^{i\theta})|.$$

Согласно (21):

$$|\Phi(re^{i\theta})| = \exp\{Q_1(re^{i\theta})+Q_2(re^{i\theta})+\Re(I_+(re^{i\theta})+I_-(re^{i\theta})-\Gamma(re^{i\theta}))\}$$
$$\times|F(re^{i\theta})|\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}\cos(\kappa_+(\theta-\pi))+\frac{\pi\Delta_- r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\cos(\kappa_-\theta)\right\}. \tag{24}$$

Так как $\Re\Gamma(z)$, $|F(z)|e^{\Re(I_+(z)+I_-(z))}$ – функции ограниченные в D, то:

$$\max_{0\le\theta\le\pi}\left\{\exp\{-\Re\Gamma(re^{i\theta})\}|F(re^{i\theta})|\exp\{\Re(I_+(re^{i\theta})+I_-(re^{i\theta}))\}\right\}\le C, \tag{25}$$

$C = const > 0$, кроме того, согласно (17) $Q_1(re^{i\theta})\le l_1 r^{\rho^-}$, $Q_2(re^{i\theta})\le l_2 r^{\rho^+}$. Поэтому в силу (24), (25) имеем:

$$M(r)\le C\exp\left\{l_1 r^{\rho^-}+l_2 r^{\rho^+}+\frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)}r^{\kappa_+}+\frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}r^{\kappa_-}\right\},$$

$$\ln M(r) \le \ln C + l_1 r^{\rho^-} + l_2 r^{\rho^+} + \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} r^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)} r^{\kappa_-}.$$

Будем различать случаи $\rho_\Phi > \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ и $\rho_\Phi < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$.

Пусть $\rho_\Phi \ge \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$. Здесь по формуле (25) имеем:

$$\rho_\Phi = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \le \begin{cases} \rho^+, \rho^+ > \rho^-, \\ \rho^-, \rho^- > \rho^+. \end{cases}$$

То есть, порядок $\rho_\Phi = \overline{\lim_{r\to\infty}}[\ln\ln M(r)/\ln r]$ целой функции $\Phi(z)$, определяемой формулами (20), (22), (23), не превосходит $\max\{\rho^+, \rho^-\}$.

Теорема 2. *Для того, чтобы краевая задача (19) имела решение $F(z)$ класса B_* при $\max\{\rho^+, \rho^-\} \ge \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, необходимо и достаточно, чтобы для функции $F(z)$ была справедлива формула (20), где $\Phi(z)$ – целая произвольная функция порядка $\rho_\Phi \le \max\{\rho^+, \rho^-\}$, удовлетворяющая условию (22) и на контуре L для всех достаточно больших t неравенствам:*

$$|\Phi(t)| \le C\exp\left\{-\frac{\nu^- t^{\rho^-}}{\sin(\pi\rho^-)} + \frac{\nu^+ t^{\rho^+}\cos(\pi\rho^+)}{\sin(\pi\rho^+)} + \frac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)t^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_- t^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\}, \tag{26}$$

если $t > 0$, и

$$|\Phi(t)| \le C\exp\left\{-\frac{\nu^- |t|^{\rho^-}\cos(\pi\rho^-)}{\sin(\pi\rho^-)} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin(\pi\rho^+)} + \frac{\pi\Delta_+ |t|^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)|t|^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\}, \tag{27}$$

если $t < 0$. Здесь $C = const > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $F(z)$ − решение краевой задачи (18) в классе B_*. Тогда выполняются соотношения (20), (22), где $\Phi(z)$ с условием (23) является целой функцией порядка $\rho_\Phi \le \max\{\rho^+, \rho^-\}$. Полагая в формуле (24) $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, с учетом (25) получаем неравенства (26), (27), соответственно.

Достаточность. Пусть для функции $F(z)$ справедливо (20), причем $\Phi(z)$ целая функция порядка $\rho_\Phi \le \max\{\rho^+, \rho^-\}$, удовлетворяющая условию (22) и неравенствам (26), (27) (тогда функция $F(z)$, определяемая по формуле (20), является решением задачи (19)). В силу указанных неравенств и формул (24), (15), (17), учитывая ограниченность функции $|\Re\Gamma(re^{i\theta})| \le q$, $q = const$, $r \ge 0$, $0 \le \theta \le \pi$, для аналитической в области D функции $F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}$ имеем $|F(t)e^{I_+(t)+I_-(t)}| \le Ce^q$ при $t > 0$ и $t < 0$. Так, всюду на L выполняется неравенство $|F(t)e^{I_+(t)+I_-(t)}| \le \tilde{C}$, $\tilde{C} = \text{const} > 0$.

На основании (24) с учетом (16), (18) имеем:

$$|F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta})\}| = |\Phi(re^{i\theta})| \times$$

$$\times\exp\left\{-l_1 r^{\rho^-}\sin(\alpha + \rho^-\theta) - l_2 r^{\rho^+}\sin(\alpha + \rho^+\theta) + \Re\Gamma(re^{i\theta})\right\} \times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\pi\Delta_+ r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}\cos(\kappa_+(\theta - \pi)) - \frac{\pi\Delta_- r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\cos(\kappa_-\theta)\right\}, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Отсюда получим:

$$\max_{0\le\theta\le\pi} |F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta})\} \le M(r)e^{l_1 r^{\rho^-} + l_2 r^{\rho^+} + q}\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_- r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\}.$$

Поскольку для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $M(r) < \exp\{r^{\rho_\Phi+\varepsilon}\}$ при всех $r > r_\varepsilon$, то выбрав числа ε, ρ^* так, чтобы $\max\{\rho^+, \rho^-\} < \rho^* < 1$, $\rho_\Phi + \varepsilon < \rho^*$, из предыдущего соотношения получим:

$$\max_{0\le\theta\le\pi} |F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta})\}| < \exp\{r^{\rho^*}\},$$

для всех достаточно больших r, для которых:

$$r > r_\varepsilon, \quad \frac{r^{\rho_\Phi+\varepsilon}}{r^{\rho^*}} + \frac{l_1 r^{\rho^-}}{r^{\rho^*}} + \frac{l_2 r^{\rho^+}}{r^{\rho^*}} + \frac{q}{r^{\rho^*}} + \frac{\pi\Delta_+ r^{\kappa_+}}{r^{\rho^*}\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_- r^{\kappa_-}}{r^{\rho^*}\sin(\pi\kappa_-)} < 1.$$

Таким образом, порядок функции $F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}$ внутри угла $0 \le \theta \le \pi$ не превышает ρ^* [11], С. 69. По принципу Фрагмена-Линделёфа будем иметь $|F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}| < \tilde{C}$ всюду в D, т.е. $F(z)$ лежит в классе B_*.

Теорема 3. *При* $\max\{\rho^+, \rho^-\} \ge \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ *общее решение краевой задачи (19) в классе функций* B_* *определяется формулой:*

$$F(z) = -ie^{\Gamma(z)}e^{i[P_1(z)+iQ_1(z)]}e^{i[P_2(z)+iQ_2(z)]}\Phi(z)[P_+(z)P_-(z)]^{-1}, \tag{28}$$

или

$$F(z) = -ie^{I_+(z)-I_-(z)}e^{\Gamma(z)}e^{i[P_1(z)+iQ_1(z)]}e^{i[P_2(z)+iQ_2(z)]}\Phi(z)\exp\left\{-\frac{\pi\Delta_+ e^{-i\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_- z^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\},$$

где $\Phi(z)$ *– произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi \le \max\{\rho^+, \rho^-\}$, *удовлетворяющая условию (22) и неравенствам (26), (27) для достаточно больших* $|t|$.

Действительно, для функции $F(z)$, определяемой формулой (28), выполняется соотношение (20) и утверждение теоремы следует из предыдущего доказательства.

Разрешимость однородной задачи Гильберта

Проведем описание картины разрешимости однородной задачи Гильберта в классе функций B_*.

Теорема 4. *Пусть* $\max\{\kappa_+, \kappa_-\} < \max\{\rho^+, \rho^-\} < 1$. *Тогда, если выполняется:*

$$a)\ \rho^- > \rho^+ \text{ и } \nu^- > 0, \text{ либо } \rho^+ > \rho^- \text{ и } \nu^+ < 0,$$

однородная краевая задача (19) не имеет нетривиальных решений в классе B_*:

$$b)\ \rho^- > \rho^+ \text{ и } \nu^- < 0, \text{ либо } \rho^+ > \rho^- \text{ и } \nu^+ > 0,$$

однородная краевая задача (19) имеет в классе B_* *решения, которые определяются формулой (28), где* $\Phi(z)$ *– целая функция порядка* ρ_Φ, $\rho_\Phi \le \max\{\rho^+, \rho^-\}$, *удовлетворяющая условию (22) и неравенствам:*

$$|\Phi(t)| \le C\exp\left\{-\frac{\nu^- t^{\rho^-}}{\sin(\pi\rho^-)} + \frac{\nu^+ t^{\rho^+}\cos(\pi\rho^+)}{\sin(\pi\rho^+)}\right\}, \text{ при } t > 0, \tag{29}$$

$$|\Phi(t)| \le C\exp\left\{-\frac{\nu^- |t|^{\rho^-}\cos(\pi\rho^-)}{\sin(\pi\rho^-)} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin(\pi\rho^+)}\right\}, C = const, C > 0 \text{ при } t < 0. \tag{30}$$

Доказательство. а) Пусть $\rho_+ < \rho_- < 1$ и $\nu^- > 0$, тогда если $0 < \rho_- < 1/2$, в силу неравенства (26) получаем $\lim_{t\to+\infty} |\Phi(t)| = 0$, по принципу Фрагмена-Линделёфа для разрезанной по положительной вещественной полуоси плоскости получаем: $\Phi(z) \equiv 0$.

Если же $1/2 \le \rho_- < 1$, то используем неравенства (26), (30) и принцип Фрагмена-Линделёфа для верхней полуплоскости. Ясно, что то же получим и в случае, когда $\rho_- < \rho_+ < 1$ и $\nu^+ < 0$.

Пусть выполнено условие b). По теореме 3 целая функция $\Phi(z)$, которая входит в формулу общего решения (28), должна иметь порядок $\rho_\Phi \le \max\{\rho^+, \rho^-\}$, удовлетворять неравенствам (26), (27), которые в силу условия $\max\{\rho^+, \rho^-\} > \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ примут вид неравенства (29), (27) и в силу (22) принимать на вещественной оси вещественные значения. Такие целые функции существуют, это следует из построений, проведенных в работах [6, 8]. Возьмем целую функцию:

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}}\right)\left(1 - \frac{z}{r_k e^{-i\theta_0}}\right), \quad r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta_0}\right)^{1/\kappa_0}, \quad 0 \le \theta_0 \le \pi. \tag{31}$$

Формулой $\arg(1 - z/r_k e^{i\theta_0})$ означаем ветвь, однозначную и непрерывную в плоскости, разрезанной по лучу $z = re^{i\theta_0}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение при $z = 0$, а формулой $\arg(1 - z/r_k e^{-i\theta_0})$ означаем ветвь, однозначную и непрерывную в плоскости, разрезанной по лучу $z = re^{i\theta_0}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение при $z = 0$, $\kappa_0 -$ число из интервала $(0,1)$. В [6], см. также ([8], с. 102) доказана асимптотическая формула:

$$\ln \Phi_0(t) = o(|t|^{\kappa_0}) + \begin{cases} \dfrac{\Delta_0 \pi 2\cos((\theta_0 - \pi)\kappa_0)}{\sin(\pi\kappa_0)} t^{\kappa_0}, & t > 0, \\ \dfrac{\Delta_0 \pi 2\cos(\theta_0 \kappa_0)}{\sin(\pi\kappa_0)} |t|^{\kappa_0}, & t < 0. \end{cases}$$

Ясно, что порядок функции $\Phi_0(z)$ равен κ_0 (т.е. показатель сходимости последовательности её нулей равен κ_0 ([12], с. 278)). Таким образом, условия (26), (27) для целой функции $\Phi_0(z)$ будет выполняться для любых Δ_0, θ_0, если взять $\kappa_0 < \max\{\rho^+, \rho^-\}$, а в случае $\kappa_0 = \max\{\rho^+, \rho^-\}$, числа $\Delta_0 > 0$, $\theta_0 \in (0, \pi)$ следует выбрать так, чтобы при $\rho^- > \rho^+$ выполнялась система неравенств:

$$\begin{cases} \Delta_0 2\pi \cos((\theta_0 - \pi)\rho^-) \le -\nu^-, \\ \Delta_0 2\pi \cos(\theta_0 \rho^-) \le -\nu^- \cos(\pi\rho^-). \end{cases}$$

Равенство в этой системе выполняется при $\theta_0 = \pi$, $\Delta_0 = -\nu^-/2\pi$. Аналогично разбирается случай $\rho^+ > \rho^-$.

Теорема 5. *Пусть* $\rho^+ < \kappa_+ = \kappa_- = \rho^- < 1/2$. *Тогда однородная краевая задача (19)*

a) не имеет нетривиальных решений в классе B_*, *если* $\pi\Delta_+ \cos(\pi\rho^-) + \pi\Delta_- - \nu^- < 0$ *либо* $\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-) < 0$;

b) имеет единственное с точностью до постоянного вещественного сомножителя A *решение вида* $F(z) = -ie^{\Gamma(z)} e^{i[P_1(z) + iQ_1(z)]} e^{i[P_2(z) + iQ_2(z)]} A[P_+(z)P_-(z)]^{-1}$, *если* $\nu^+ < 0$ *и*

$$\begin{cases} \pi\Delta_+ \cos(\pi\rho^-) + \pi\Delta_- - \nu^- = 0, \\ \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-) > 0. \end{cases}$$

c) имеет решения класса B_*, определенные формулой (28), где $\Phi(z)$ – произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \le \rho^-$, удовлетворяющая условию (23) и неравенствам:

$$|\Phi(t)| \le C \exp\left\{\frac{\nu^+ \cos(\pi\rho^+)}{\sin(\pi\rho^+)} t^{\rho^+}\right\}, \quad t > 0, \tag{32}$$

$$|\Phi(t)| \le C \exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos\pi\rho^-}{\sin(\pi\rho^-)} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin(\pi\rho^+)}\right\}, \quad t < 0, \tag{33}$$

если $\nu^+ > 0$ и:

$$\begin{cases} \pi\Delta_+ \cos(\pi\rho^-) + \pi\Delta_- - \nu^- = 0, \\ \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-) > 0. \end{cases}$$

d) имеет решения класса B_*, определенные формулой (28), где $\Phi(z)$ – произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \le \rho^+$, удовлетворяющая условию (22) и при $\rho_\Phi = \rho^-$ еще и неравенствам:

$$|\Phi(t)| \le C \exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ \cos(\pi\rho^-) + \pi\Delta_- - \nu^-}{\sin(\pi\rho^-)} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ \cos(\pi\rho^+)}{\sin(\pi\rho^+)} t^{\rho^+}\right\}, \quad t > 0,$$

$$|\Phi(t)| \le C \exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-)}{\sin(\pi\rho^-)} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin(\pi\rho^+)}\right\}, \quad t < 0,$$

если:

$$\begin{cases} \pi\Delta_+ \cos(\pi\rho^-) + \pi\Delta_- - \nu^- > 0, \\ \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-) > 0. \end{cases} \tag{34}$$

Доказательство. Случай b) теоремы 5. Примем выполненными условия (34). По теореме 3 общее решение задачи (19) определяется формулой (32), которая содержит произвольную целую функцию $\Phi(z)$ порядка $\rho_\Phi \le \rho$, удовлетворяющую условию (22) и неравенствам (26), (27), которые в условиях пункта b) теоремы 5 примут вид неравенств (32), (33). В силу условия $\nu^+ < 0$ из неравенства (32) получим $|\Phi(t)| \le C, t > 0$. Из-за симметрии $\Phi(z)$ ограничена по модулю на обеих берегах разреза, проведенного по положительной вещественной полуоси, так как $\rho_\Phi < 1/2$, то по теореме Фрагмена-Линделефа функция $\Phi(z)$ ограничена во всей плоскости, значит является постоянной.

Пусть выполнены условия пункта c). Согласно теореме 3 целая функция $\Phi(z)$ должна удовлетворять условию симметрии и неравенствам (26), (27), которые примут вид (32), (33) и иметь порядок $\rho_\Phi \le \rho$. В качестве примера можно взять функцию (31), если положить $\theta_0 = \pi$, Δ_0 – любое положительное число при $\kappa_0 < \rho^+$, и в случае $\kappa_0 = \rho^+$ взять $\Delta_0 < \nu^+ \cos(\pi\rho^+)/2\pi\rho^+$.

Обоснование случая d) проводится построением примера на базе целой функции (31).

Теорема 6. *Пусть $\rho^+ < \kappa_+ = \kappa_- = \rho^-$, $1/2 \le \rho^- < 1$. Тогда однородная краевая задача (19):*

a) не имеет нетривиальных решений в классе B_*, если:

$$\begin{cases} \pi\Delta_+ \cos(\pi\rho^-) + \pi\Delta_- - \nu^- < 0, \\ \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-) < 0; \end{cases}$$

b) имеет решения класса B_*, определенные формулой (28), в которой $\Phi(z)$ *– произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi \le \rho^-$*, удовлетворяющая условию (22) и неравенствам:*

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(t)| \le C\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+\cos(\pi\rho^-)+\pi\Delta_- - \nu^-}{\sin(\pi\rho^-)}t^{\rho^-} + \frac{\nu^+\cos(\pi\rho^+)}{\sin(\pi\rho^+)}t^{\rho^+}\right\}, \quad t>0,\\
&|\Phi(t)| \le C\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos\pi\rho^-}{\sin\pi\rho^-}|t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+|t|^{\rho^+}}{\sin\pi\rho^+}\right\}, \quad t<0,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

если:

$$
\begin{cases}\pi\Delta_+\cos(\pi\rho^-)+\pi\Delta_- - \nu^- = 0,\\ \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-) > 0,\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\pi\Delta_+\cos(\pi\rho^-)+\pi\Delta_- - \nu^- > 0,\\ \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-) = 0.\end{cases}
$$

c) имеет решения класса B_*, определенные формулой (28), в которой $\Phi(z)$ *– произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi \le \rho^-$*, удовлетворяющая условию (22) и при* $\rho_\Phi = \rho^-$ *еще и неравенствам (34)если:*

$$
\begin{cases}\pi\Delta_+\cos(\pi\rho^-)+\pi\Delta_- - \nu^- > 0,\\ \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-)\cos(\pi\rho^-) > 0.\end{cases}
$$

Список библиографических ссылок

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. − М.: Наука, 1968. − 511 с.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. − М.: Наука, 1977. − 640 с.
3. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. − М.: Наука. 1986. − 239 с.
4. Сандрыгайло И.Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., № 6, 1974. − С. 16-23.
5. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Метод регуляризующего множителя для решения однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом // Изв. вузов. Математика, 2001, № 4. − С. 76-79.
6. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Матем. заметки, 2003, Т. 73, Вып. 5. − С. 724-734.
7. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Однородная задача Гильберта с разрывными коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности порядка // Известия вузов, Математика, 2012, № 11. – С. 67-71.
8. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения. – Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005. − 297 с.
9. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Задача Гильберта. Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициентов // Сиб. матем. журн., 2008, Т. 49, № 4. − С. 898-915.
10. Хейман У. Мероморфные функции. − М.: Мир, 1966. − 287 с.
11. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. − М.: Гостехиздат, 1956. − 632 с.
12. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, Т. 2. − М.: Наука, 1968. − 624 с.

Karabasheva E.N. − post-graduate student
E-mail: enkarabasheva@bk.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

On solvability of homogeneous Hilbert problem with countable set of points discontinuities and of a different order two-side curling at infinity

Resume

In this article we consider the Hilbert boundary value problem with countable set of points of discontinuity of the first kind with a different order two-Side curling at infinity of edge conditions. The problem considered at the upper half-plane. The problem is in definition of the function analytical in special class of functions on the given boundary condition. This view of Hilbert boundary value problem it was not considered yet. Similar problem has been studied in Sandrygaylo I., Salimov R. and Shabalin P. papers.

In this article we received formulas for general solutions, found the conditions for the existence and for the uniqueness of the problem, described the set of solutions in the case when solution is not unique, complete investigation of the solvability of problem with conditions, that described in the article.

Keywords: the Hilbert boundary value problem, curling at infinity, infinite index, entire functions.

Reference list

1. Muskhelishvili N.I. Singular integral equations. − M.: Nauka, 1968. − 511 p.
2. Gakhov F.D. Boundary value problems. − M.: Nauka, 1977. – 640 p.
3. Govorov N.V. Riemann's boundary problem with infinite index. − M.: Nauka, 1986. – 239 p.
4. Sandrygailo I.E. On Hilbert boundary value problem for half-plane with infinite index // Izv. AN BSSR. Ser. fiz.-mat. n., № 6, 1974. − P. 16-23.
5. Salimov R.B., Shabalin P.L. The regularizing factor method for solving a homogeneous Hilbert problem with an infinite index // Izv. vuzov. Matem., 2001, № 4. − P. 76-79.
6. Salimov R.B., Shabalin P.L. Solution of the Hilbert Problem with infinite index. Mathem. Zametki, 2003, V. 73, № 5. − P. 724-734.
7. Salimov R.B., Shabalin P.L. A homogeneous Hilbert problem with discontinuous coefficients and two-side curling at infinity of order less S // Yfimski mathematicheski zhurnal, V. 5, № 2, 2013. − P. 82-93.
8. Salimov R.B., Shabalin P.L. Hilbert boundary value problem in the theory of analytic functions and its applications. – Kazan: Izd-vo Kazansk. mat. o-vo, 2005. – 297 p.
9. Salimov R.B., Shabalin P.L. The Hilbert problem: the case of infinitely many discontinuity points of coefficients // Sib. matem. Zhur, 2008, V. 49, № 4. − P. 898-915.
10. Hayman Y. Meromorphic functions. – M.: Mir, 1966. – 287 p.
11. Levin B.Ya. Distribution of zeros of entire functions. – M.: Gostechizdat, 1956. – 632 p.
12. Markushevich A.I. The teory of analitic functions, V. 2. – M.: Nauka, 1968. – 624 p.