УДК 624.04

Гирфанов И.С. – кандидат технических наук, профессор
E-mail: Girfanov@kgasu.ru
Юманов В.А. – кандидат технических наук, доцент
E-mail: 2381802@kgasu.ru
Казанский государственный архитектурно-строительный университет
Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зелёная, д. 1

К решению обыкновенных дифференциальных уравнений, включающих в себя аут-функции, при реализации задач поиска оптимальных конструкций при действии как статических, так и динамических нагрузок

Аннотация

Целью работы была демонстрация использования в дифференциальных уравнениях, описывающих оптимизационные процессы при проектировании конструкции с обеспечением минимума объема, массы, стоимости и пр., разработанного авторами математического аппарата счета – теории аут-функции, широко применяемого в прикладном оптимальном проектировании строительных конструкций.

Дифференциальные уравнения типа (А.2) с правой частью в виде (А.4) имеют многочисленные приложения в механике, либо описывая реальные процессы, либо давая первое приближение, позволяющее судить об их характере и физической сути.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, аут-функции, фундаментальная система.

А) Рассмотрим обыкновенное неоднородное линейное дифференциальное уравнение вида:

$$P_o(x)y^{(n)}(x)+P_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+P_{n-1}(x)y^1(x)+P_n(x)y(x)=f(x). \qquad (А.1)$$

В общем случае $P_o(x)\neq 0$, поэтому разделив обе части (А.1) на него, приходим к уравнению:

$$y^{(n)}(x)+\tilde{P}_1(x)y^{(n-1)}(x)+\tilde{P}_2(x)y^{(n-2)}(x)+\ldots+\tilde{P}_{n-1}(x)y'(x)+\tilde{P}_n(x)y(x)=g(x),\text{[1]} \qquad (А.2)$$

где $g(x)$ – некоторая суммарная функция вида:

$$g(x)=\Psi_o(x)+\Psi_1(x)+\Psi_2(x)+\ldots+\Psi_k(x). \qquad (А.3)$$

Здесь $\Psi_i(x)$ – нелинейные или линейные аут-функции [2].

Используя соотношение (1.7.4) § 1.7 [2], выразим каждую аут-функцию, входящую в (А.3), через ее составляющие. Собирая члены с одинаковыми множителями Ф(a_i) и обозначая их сумму соответственно через $g_o(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ и т.д., получим:

$$g(x)=g_o(x)\Phi(0)+\phi_1(x)\Phi(a_1)+\phi_2(x)\Phi(a_2)+\ldots+\phi_{m-1}(x)\Phi_{m-1}(a)+\phi_m(x)\Phi(a_m), \qquad (А.4)$$

где $\varphi_j(x)$ – суть непрерывные функции (j = 1,…,m).

Таким образом, ввиду (А.4) выражение (А.2) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}&y^{(n)}(x)+\widetilde{P}_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+\widetilde{P}_{n-1}(x)y'(x)+\widetilde{P}_n(x)y(x)=\\&=g_0(x)\Phi(0)+\varphi_1(x)\Phi(a_1)+\ldots+\varphi_m(x)\Phi(a_m).\end{aligned} \qquad (А.5)$$

Представим для начала, что в правой части (А.5) находится не сумма выражений $\sum\varphi_j(x)\Phi(a_j)$, где j=1,…,m, а одно произведение $\varphi_r(x)\Phi(a_r)$.

[1] Уравнения типа (А.2) с правой частью вида (А.4) имеют многочисленные приложения в технике и механике, либо описывая реальные процессы, либо давая первое приближение, позволяющее судить о характере изучаемого явления.

Тогда (А.5) перепишется так:

$$y^{(n)}(x)+\widetilde{P}_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+\widetilde{P}_n(x)y(x)=\varphi_k(x)\Phi(a_k). \tag{А.6}$$

Причем согласно определению модификации (1.2.1) [2], правая часть (А.6) равна нулю при всех $x \le a_k$ и равна $\varphi_k(x)$ при всех $x > a_k$.

Значит в интервале $-\infty < x \le a_k$ уравнение (А.6) вырождается в однородное линейное дифференциальное уравнение n–го порядка:

$$y^{(n)}(x)+\widetilde{P}_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+\widetilde{P}_n(x)y(x)=0\,. \tag{А.7}$$

В интервале же $a_k < x < +\infty$ уравнение (А.6) представляет собою неоднородное линейное дифференциальное уравнение n–го порядка с непрерывной правой частью в рассматриваемом интервале:

$$y^{(n)}(x)+\widetilde{P}_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+\widetilde{P}_n(x)y(x)=\varphi_k(x). \tag{А.8}$$

Как известно (с. 390 [1]), «для нахождения общего решения неоднородного уравнения достаточно найти какое-нибудь частное решение этого уравнения и прибавить к нему общее решение соответствующего однородного уравнения (5)», т.е.:

$$y = y_1 + \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{y}_i, \tag{А.9}$$

где $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Вместе с тем, совершенно очевидно, что «соответствующее однородное уравнение» и уравнение (А.7) представляют из себя одно и то же, так как и то, и другое получается из (А.8) приравниваем нулю правой части. Следовательно, второе слагаемое правой части выражения (А.9) есть общее решение уравнения (А.7) и главная часть решения уравнения (А.8).

Учитывая изложенное, записываем общее решение неоднородного линейного уравнения (А.6) с привлечением функций (1.2.1) [2] в следующем виде:

$$y = y_1\Phi(a_k) + \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{y}_i\,. \tag{А.10}$$

Здесь y_1 – частное решение уравнения (А.8):

$$\begin{aligned}&\Phi(a_k)=0,\ \text{ при }\ x \le a_k \quad \text{и}\\ &\Phi(a_k)=1,\ \ \text{при }\ x > a_k.\end{aligned} \tag{А.10}$$

Нетрудно видеть, что в соответствии с (А.10), при $x \le a_k$ решение (А.6) равняется:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{y}_i; \tag{А.11}$$

при $x > a_k$:

$$y = y_1 + \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{y}_i. \tag{А.12}$$

Поскольку уравнение (А.4) отличается от уравнения (А.6) наличием в правой части суммы слагаемых вида (А.5), то на основании замечания 1 (стр. 390 [1]) общее решение неоднородного линейного уравнения n-го порядка запишется:

$$\begin{gathered} y = \sum_{j=1}^{m} y_j \Phi(a_j) + \sum_{i=1}^{n} C_i \bar{y}_i;\\ (j=1,\ldots,m;\ i=1,..,n). \end{gathered} \tag{А.13}$$

Здесь первое слагаемое (А.13) представляет собою сумму частных решений уравнения (А.5) по интервалам непрерывности, определенным соответствующими $\Phi(a_j)$, где j=1,…,m; а второе слагаемое – общее решение однородного уравнения (А.7).

На основании замечания 2 (стр. 391 [1]) при известных «m» частных решениях неоднородного уравнения (А.5), порядок его можно понизить на «m-1» единиц, если отмеченные выше частные решения линейно независимы в интервале рассмотрения.

Б) Пусть теперь обыкновенные дифференциальные уравнения включают в себя единично-прерывистые формы типа 1.2.1 (стр. 17 [2]).

Предположим, что коэффициенты уравнения (А.2) $\widetilde{P}_1(x),\ldots,\widetilde{P}_n(x)$ и правая часть $g(x)$ заданы и непрерывны в рассматриваемом интервале, причем:

$$g(x) = z_1\Phi'(x-a) + z_2\Phi''(x-a) + \ldots + z_{m-1}\Phi^{(m-1)}(x-a) + z_m\Phi^{(m)}(x-a).^2 \quad (\text{Б.1})$$

Тогда уравнение (А.2) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(x) + \widetilde{P}_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + \widetilde{P}_{n-1}(x)y'(x) + \widetilde{P}_n(x)y(x) = \\ &= z_o\Phi'(x-a) + z_1\Phi''(x-a) + \ldots + z_{m-1}\Phi^{(m-1)}(x-a) + z_m\Phi^{(m)}(x-a). \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Учитывая вышеизложенные результаты § 1.3 и § 1.4, а также выводы § 1.8, из работы [2] к решению уравнения (Б.2) можно применить подход, предложенный в работе [3].

Будем считать, что фундаментальная система $\bar{y}_i$ однородного уравнения (А.7) известна и, поскольку функции $\widetilde{P}_i(x)$ предполагались непрерывными, непрерывна [4].

Общее решение уравнения (А.7), описываемое выражением (А.11), удовлетворяет также уравнению (Б.1) для всех x, отличных от a, т.к. в силу §1.3; 1.4 [2] при $x \neq a$, уравнения (Б.2) и (А.7) тождественные. Однако в силу того, что на участках оси x, разделенных точкой $x = a$, постоянные C_i в общем случае различны, полагаем в соответствии с [3]:

$$C_i = \overline{C}_i + \Psi_i\Phi(x-a), \quad (\text{Б.3})$$

где $\overline{C}_i$ и Ψ_i – новые постоянные и, следовательно, имеем:

$$\frac{dC_i}{dx} = \Psi_i\Phi'(x-a). \quad (\text{Б.4})$$

Так как в правую часть уравнения (Б.2) входит сумма конечного ряда производных прерывистых форм типа (1.2.1) [2], то полный интеграл его запишется в виде:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i\bar{y}_i + \sum_{i=n}^{m} X_i\Phi^{(i-n)}(x-a), \quad (\text{Б.5})$$

или с учетом (Б.3):

$$y = \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i\bar{y}_i + \Phi(x-a)\sum_{i=1}^{n}\Psi_i\bar{y}_i + \sum_{i=n}^{m} X_i\Phi^{(i-n)}(x-a), \quad (\text{Б.6})$$

здесь $X_i (i = n, n+1, \ldots, m)$ – неизвестные постоянные.

Причем первая сумма (Б.6) представляет собою решение однородного уравнения (А.7), остальные две суммы – частное решение неоднородного уравнения (Б.2), а постоянные Ψ_i и X_i должны быть такими, чтобы (Б.6) удовлетворяло уравнению (Б.2).

Запишем теперь l-ю производную функции $y = y(x)$:

$$y^{(l)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(l)} + \sum_{i=n-l}^{m} X_i\Phi^{(i-n+l)}(x-a); \quad l = 0,1,\ldots,n. \quad (\text{Б.7})$$

Вносяa производные $y^{(l)}$ в уравнение (Б.2) и имея в виду, что первая сумма (Б.7) представляет собою решение однородного дифференциального уравнения (А.7), получаем соотношение:

$$\sum_{l=0}^{n}\widetilde{P}_l(x)\sum_{i=n-l}^{m} X_i\Phi^{(i-n+l)}(x-a) = \sum_{j=0}^{m} z_i\Phi^{(j)}(x-a). \quad (\text{Б.8})$$

---

[2] О физическом смысле (интерпретации) (Б.1) можно судить по п. Б § 1.5 [2].

Учитывая особенности функции (1.2.6) и ее производных (§ 1.4 п. Г [2], из (Б.8) получаем систему m+1 алгебраических уравнений с неизвестными $X_i(i=0,1,...,m)$:

$$\sum_{l=0}^{n}\widetilde{P}_l(x)X_{l+1}=z_i;\qquad i=0,...,m. \tag{Б.9}$$

Матрица, соответствующая определителю системы (Б.9), имеет треугольный вид с диагональными элементами, равными $\widetilde{P}_0(x)=1$, поэтому система (Б.9) является полной и имеет одно определенное решение. Значения $X_i(i=0,1,...,m)$ определяются из (Б.9), как непрерывные функции переменной a.

Вместе с тем, располагая производными функции $y=y(x)$ и основываясь на (Б.4) можно определить следующие суммы:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{dC_i}{dx}y_i^{(l)}(x)=X_{n-l-1}\Phi'(x-a);\ \ (l=0,1,...,n-1). \tag{Б.10}$$

Но согласно (Б.4) $\frac{dC_i}{dx}=\Psi_i\Phi'(x-a)$, поэтому перепишем (Б.10) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\Psi_i\Phi'(x-a)y_i^{(l)}(x)=X_{n-l-1}\Phi'(x-a). \tag{Б.11}$$

Учитывая вновь особенности (1.2.6) и ее производных (§ 1.4 п. Г [2], перепишем (Б.11) в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\Psi_i y_i^{(l)}(a)=X_{n-l-1};\qquad (l=0,..n-1). \tag{Б.12}$$

Определитель системы (Б.12), являясь вронскианом этих функций, отличен от нуля при всех значениях «x», в том числе и при $x=a$. Следовательно, система (Б.12) является полной и имеет определенное решение. Раскрывая и решая систему (Б.12), получаем величины Ψ_i как известные функции переменной a.

Определив Ψ_i и X_i, из граничных и начальных условий находятся постоянные интегрирования $\overline{C}_i$.

Список библиографических ссылок

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1977. – 310 с.
2. Гирфанов И.С. Аут-функции в статике и динамике оптимальных конструкций. – Казань: Таткнигоиздат, 1975. – 154 с.
3. Новицкий В.В. Дельта-функция и ее применение в строительной механике. // Сб. «Расчет пространственных конструкций», вып. 8. – М.: Стройиздат, 1962. – С. 128-136.
4. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1958. – 340 с.
5. Юманов В.А., Гирфанов И.С. Некоторые свойства конструкций минимальной массы с заданными динамическими характеристиками. // Всесоюзная конференция по проблеме «Оптимизация конструкций при динамических нагрузках». Доклады конференции. – Тарту, 1979. – С. 54-59.

Girfanov I.S. – candidate of technical sciences, professor
E-mail: Girfanov@kgasu.ru
Jumanov V.A. – candidate of technical sciences, associate professor
E-mail: 2381802@kgasu.ru
Kazan State University of Architecture and Engineering
The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

About solving common differential equations with Out-functions in context of searching optimal structural form of structures during static and dynamic loads

Resume

The article shows usage of Out-functions specifically in differential equations applied to optimization of structural form of the plain and spatial braced structures for example plane and spatial trusses, multi span girders, arcs, frames, slabs, easy-sloped shells e.t.c. while Out-functions usually are used directly in optimization tasks. Differential equations which have been reviewed in the article are homogeneous and non-homogeneous linear equations with right part of equation consisted of sum of the linear and nonlinear Out-functions. The out-function is the function that operates by selecting positive value of variable from two possible variants. The sum of the Out-function is a consequently compound of different linear and non linear functions. For instance if compress and tensile brace element of steel truss have nonlinear and linear dependences, respectively, between volume, mass or evaluated cost of the brace element and axial force therefore overall function would be consist of nonlinear and linear segments. The approaches which are shown in article could be used by researchers for mass and cost optimization purposes.

Keywords: differential equations, Out-functions, fundamental system.

Reference list

1. Matveev N.M. The methods of integration common differential equations. High school, 1977. – 310 p.
2. Girfanov I.S. OR-functions in static and dynamic of optimized structures. – Kazan: Tatknigaizdat, 1975. – 154 p.
3. Novickiy V.V. Delta-function and it appliance in structural mechanics // Journal «The designing of spatial structures», № 8. – M.: Stroiizdat, 1962. – P. 128-136.
4. Stepanov V.V. The course of the differential equations. – M.: Science, 1958. – 340 p.
5. Umanov V.A., Girfanov I.S. Some properties of the minimum mass structures with determinately dynamic characteristics USSR conference about «Optimizing of the structures during dynamic loads». Reports of the conference. – Tartu, 1979. – P. 54-59.