

УДК 532.5:621.694

**Багоутдинова А.Г.** – кандидат технических наук, доцентE-mail: [bagoutdinova@rambler.ru](mailto:bagoutdinova@rambler.ru)**Нижекамский химико-технологический институт**

Адрес организации: 423570, РТ, г. Нижнекамск, пр. Строителей, 47

**Золотоносов Я.Д.** – доктор технических наук, профессорE-mail: [zolotonosov@mail.ru](mailto:zolotonosov@mail.ru)**Мустакимова С.А.** – ведущий программистE-mail: [mustakim@kgasu.ru](mailto:mustakim@kgasu.ru)**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

Адрес организации: 420043, Россия, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1

## Моделирование турбулентного течения в прямых пружинно-витых каналах

### Аннотация

Работа посвящена математическому моделированию стационарных турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости в пружинно-витых каналах. Разработанная математическая модель основывается на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых при помощи  $k - \epsilon$  модели турбулентности с учетом характерных особенностей геометрии канала, и может быть использована для оптимизации технологических характеристик и геометрических параметров существующих теплообменных устройств, а также при создании новых перспективных конструкций.

**Ключевые слова:** турбулентное течение, моделирование, пружинно-витой канал.

### Введение

С ростом энергетических мощностей и объема производства все более увеличиваются масса и габариты применяемых теплообменных аппаратов, на изготовление которых расходуется немало средств и материалов. В связи с этим актуальными являются вопросы, связанные со снижением размеров и массы теплообменного оборудования и повышением его эффективности. Одним из перспективных направлений решения этой проблемы является изменение формы и режима движения теплоносителей. В этой связи представляет практический интерес предлагаемый нами класс пружинно-витых каналов [1-4], обладающих высокоэнергетической эффективностью, позволяющих модернизировать и реконструировать существующий парк теплообменной аппаратуры без существенных капитальных затрат.

Однако широкое внедрение подобных аппаратов в производство сдерживается отсутствием надежных данных о гидравлических и тепловых характеристиках пружинно-витых каналов и особенностях протекающих в них процессов. Попытка восполнить имеющийся пробел является предметом настоящих и будущих исследований.

### 1. Описание геометрии канала и вычисление геометрических характеристик

Рассматриваемый нами канал представляет собой тугую пружину с жестко скрепленными витками [1]. Процесс образования таких каналов может быть реализован путем намотки проволоки произвольного сечения на подложку, выполненную в виде круглого или эллиптического цилиндра. Если намотка плотная, то после микроплазменной или лазерной сварки витков и удаления подложки получается пружинно-витой канал.

В работе [5] рассмотрен общий метод построения поверхностей каналов, образованных движением непрерывной замкнутой кривой  $\rho(\varphi)$ , вдоль некоторой криволинейной направляющей  $\gamma(t)$  (рис. 1).

Если в качестве направляющей кривой выбрать винтовую линию

$$g : x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt,$$

а в качестве образующей – эллипс, с полуосями, равными  $c$  и  $d$ , то поверхность, вид которой представлен на рис. 2, описывается векторной функцией:

$$\mathbf{r}(t, j) = x(t, j) \mathbf{i} + y(t, j) \mathbf{j} + z(t, j) \mathbf{k}, \quad (1)$$

где:

$$\begin{aligned} x(t,j) &= (a - c \cos j) \cos t + \frac{db \sin j \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ y(t,j) &= (a - c \cos j) \sin t + \frac{db \sin j \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ z(t,j) &= bt + \frac{ad \sin j}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

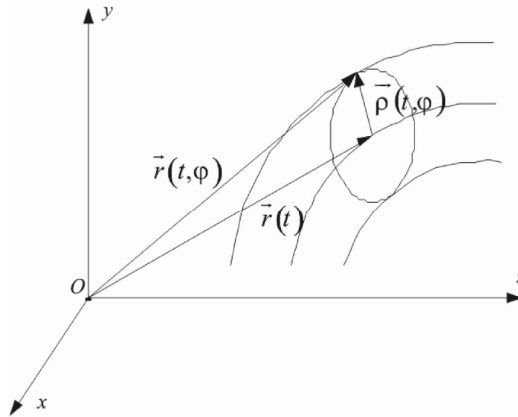


Рис. 1. Схема описания поверхности

Параметр  $\varphi$  задает положение точки на эллипсе ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ),  $t$  – положение точки на винтовой линии ( $0 \leq t \leq k\pi$ ),  $k$  – количество витков. Если полуоси эллипса равны, то эллипс трансформируется в окружность. Уравнение поверхности в этом случае записывается в виде (1), где:

$$\begin{aligned} x(t,j) &= (a - R \cos j) \cos t + \frac{bR \sin j \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ y(t,j) &= (a - R \cos j) \sin t + \frac{bR \sin j \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ z(t,j) &= bt + \frac{aR \sin j}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Эквивалентный диаметр канала можно вычислить по формуле [6]:

$$d_s = 4V/S, \tag{2}$$

где  $V$  – объем,  $S$  – площадь смоченной поверхности канала.

Площадь внутренней поверхности  $G$ , заданной векторной функцией (1), выражается с помощью поверхностного интеграла первого рода:

$$S = \iint_G dG = \iint_{D(t,j)} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial j} \right| dt dj, \tag{3}$$

где координаты  $(t, j)$  изменяются в пределах области определения

$D(t,j) = \{(t,j) | 0 \leq t \leq kp, -p/2 \leq j \leq p/2\}$ , а  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial j}$  означает векторное произведение.

Частные производные  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial j}$  вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t}(t,j) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t}(t,j) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial t}(t,j) \mathbf{k} = \\ &= \left( (c \cos j - a) \sin t + \frac{db \sin j \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} + \left( (a - c \cos j) \cos t - \frac{db \sin j \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j} + b \mathbf{k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial j} &= \frac{\partial x}{\partial j} (t, j) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial j} (t, j) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial j} (t, j) \mathbf{k} = \\ &= \left( c \sin j \cos t + \frac{db \cos j \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{i} + \left( c \sin j \sin t + \frac{db \cos j \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{j} + \frac{ad \cos j}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью  $G$ , определяется с помощью тройного интеграла:

$$V = \iiint_G dx dy dz. \quad (4)$$

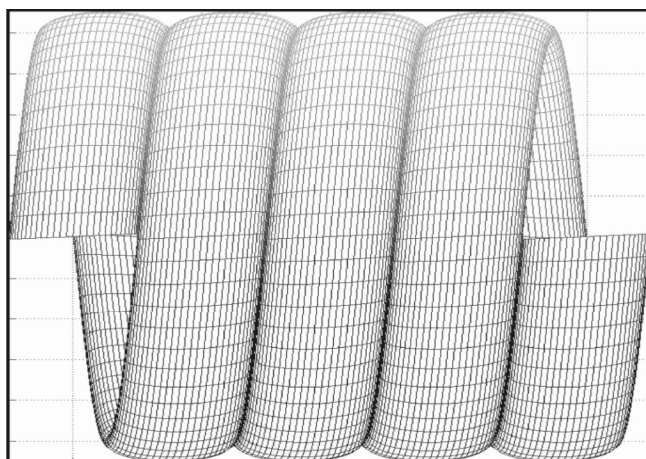


Рис. 2. Поверхность пружинно-витого канала с эллиптическим нормальным сечением

Для упрощения вычисления интеграла (4) выполним замену переменных:

$$\begin{aligned} x &= (r - c \cos j) \cos t + \frac{db \sin j \sin t}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \\ y &= (r - c \cos j) \sin t + \frac{db \sin j \cos t}{\sqrt{r^2 + b^2}}; \\ z &= bt + \frac{rd \sin j}{\sqrt{r^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Отображение  $(x, y, z) \rightarrow (r, \varphi, t)$  переводит область  $G$  в прямоугольный параллелепипед, описываемый неравенствами:

$$d \leq r \leq a, -\frac{p}{2} \leq j \leq \frac{p}{2}, 0 \leq t \leq kp$$

Запишем якобиан отображения:

$$J(r, j, t) = \begin{vmatrix} \cos t + \frac{dbr \sin j \sin t}{\sqrt{(r^2 + b^2)^3}} & c \sin j \cos t + \frac{db \cos j \sin t}{\sqrt{r^2 + b^2}} & (c \cos j - r) \sin t + \frac{db \sin j \cos t}{\sqrt{(r^2 + b^2)}} \\ \sin t + \frac{dbr \sin j \cos t}{\sqrt{(r^2 + b^2)^3}} & c \sin j \sin t + \frac{db \sin j \cos t}{\sqrt{r^2 + b^2}} & (r - c \cos j) \cos t - \frac{db \sin j \sin t}{\sqrt{r^2 + b^2}} \\ \frac{b^2 d \sin j}{\sqrt{(r^2 + b^2)^3}} & \frac{rd \cos j}{\sqrt{r^2 + b^2}} & b \end{vmatrix}$$

Интеграл (4) преобразуется к виду:

$$V = \iiint_G dx dy dz = \int_{d-p/2}^a \int_{-p/2}^{p/2} \int_0^{kp} |J(r, j, t)| dr dj dt. \quad (5)$$

Полученные интегралы (3), (5) вычисляются приближенно с помощью известных квадратурных формул.

## 2. Основные уравнения

Процессы турбулентного переноса представляют собой сложное физическое явление, теоретическое изучение которого опирается на основные законы физики, и описываются уравнениями гидродинамики. Основными уравнениями гидродинамики для описания стационарных турбулентных течений являются уравнения Навье-Стокса [8]:

$$rv_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + m \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (7)$$

В системе уравнений (6)-(7) и далее подразумевается суммирование по дважды повторяемому в одночленах индексу.

Применяя осреднение по Рейнольдсу, запишем уравнения движения и неразрывности в виде:

$$r\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + m \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -r\overline{v_i' v_j'} \right); \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (9)$$

Система уравнений (8)-(9) является незамкнутой. Для замыкания этих уравнений необходимо использовать модель турбулентности. Несмотря на значительные успехи современных исследователей в вопросах моделирования турбулентности, включая прямое численное моделирование и методы крупных вихрей, до сих пор оптимальной по возможностям использования в инженерных расчетах считается двухпараметрическая дифференциальная модель турбулентности.

Запишем уравнения для турбулентной кинетической энергии  $k$  и скорости ее диссипации  $e$  [9]:

$$r\bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = t_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - re + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( m + \frac{m_i}{s_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right];$$

$$r\bar{v}_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = c_{e1} \frac{e}{k} t_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - c_{e2} r \frac{e^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( m + \frac{m_i}{s_e} \right) \frac{\partial e}{\partial x_j} \right];$$

$$m_i = C_m r \frac{k^2}{e};$$

$$t_{ij} = -\overline{r v_i' v_j'} = m_i \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} r k d_{ij}.$$

Модельные константы:

$$c_{e1} = 1,44; \quad c_{e2} = 1,92; \quad C_m = 0,09; \quad s_k = 1; \quad s_e = 1,3.$$

$$\bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{m}{r} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ C_m \frac{k^2}{e} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k d_{ij} \right]; \quad \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0;$$

$$\bar{v}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \left[ C_m \frac{k^2}{e} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k d_{ij} \right] \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - e + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{m}{r} + C_m \frac{k^2}{e} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right];$$

$$v_j \frac{\partial e}{\partial x_j} = c_{e1} \frac{e}{k} \left[ C_m \frac{k^2}{e} \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k d_{ij} \right] \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - c_{e2} \frac{e^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{m}{r} + C_m \frac{k^2}{s_e e} \right) \frac{\partial e}{\partial x_j} \right].$$

Запишем уравнения в развернутом виде.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} & \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{m}{r} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_1} + \\ & + C_m \left[ \frac{k^2}{e} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{k^2}{e} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{k^2}{e} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \frac{m}{r} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_3^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_2} + \\ & + C_m \left[ \frac{k^2}{e} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{k^2}{e} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{k^2}{e} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \frac{m}{r} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_3^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_3} + \\ & + C_m \left[ \frac{k^2}{e} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \bar{v}_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_2 \partial x_3} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{k^2}{e} \right) + \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{k^2}{e} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} = 0. \quad (13)$$

Уравнение для турбулентной кинетической энергии:

$$\begin{aligned} & \bar{v}_1 \frac{\partial k}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial k}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial k}{\partial x_3} = -\frac{2k}{3} \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} \right) - \frac{2C_m k^2}{e} \left[ \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} \right] + \\ & + C_m \frac{k^2}{e} \left[ \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \right)^2 \right] - e + \\ & + \left( \frac{m}{r} + C_m \frac{k^2}{e} \right) \left( \frac{\partial^2 k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial x_3^2} \right) + C_m \left[ \frac{\partial k}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{k^2}{e} \right) + \frac{\partial k}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{k^2}{e} \right) + \frac{\partial k}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{k^2}{e} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение скорости диссипации турбулентной кинетической энергии:

$$\begin{aligned} & \bar{v}_1 \frac{\partial e}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial e}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial e}{\partial x_3} = -c_{e2} \frac{e^2}{k} - c_{e1} \frac{2e}{3} \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} \right) + \\ & + c_{e1} C_m k \left[ -2 \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} \right) + \right. \\ & + \left. \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \\ & + \left( \frac{m}{r} + \frac{C_m k^2}{s_e e} \right) \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial x_3^2} \right) + \frac{C_m}{s_e} \left[ \frac{\partial e}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{k^2}{e} \right) + \frac{\partial e}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{k^2}{e} \right) + \frac{\partial e}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{k^2}{e} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

В качестве условий однозначности для системы уравнений (10)-(15) зададим профили скорости, давления во входном сечении канала, на выходе из канала и граничные условия на стенках:

на входе: все переменные имеют постоянные значения;

на стенках: условия прилипания;

на выходе: «мягкие» условия Неймана.

Решение системы (10)-(15) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= u_0 F_1(x, y, z), \quad \bar{v}_2 = u_0 F_2(x, y, z), \\ \bar{v}_3 &= u_0 F_3(x, y, z), \quad p - p_0 = u_0^2 r P(x, y, z), \\ k &= u_0^2 K(x, y, z), \quad e = u_0 g E(x, y, z), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $x = \frac{x_1}{a}$ ,  $y = \frac{x_2}{a}$ ,  $z = \frac{x_3}{l}$  – безразмерные переменные,  $F_1(x, y, z)$ ,  $F_2(x, y, z)$ ,  $F_3(x, y, z)$ ,  $P(x, y, z)$ ,  $K(x, y, z)$ ,  $E(x, y, z)$  – безразмерные функции,  $g$  – ускорение свободного падения,  $u_0$  – начальная скорость,  $a$  – коэффициент винтовой линии,  $l$  – длина канала,  $d_{eqv}$  – эквивалентный диаметр канала,  $Re = \frac{u_0 d_{eqv}}{\nu}$  – число Рейнольдса,

$$Fr = \frac{u_0^2}{g \cdot a} \text{ – число Фруда.}$$

Подставляя формулы (16) в уравнения (10)-(15), получим безразмерные уравнения.

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} F_1 \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_1}{\partial y} + F_3 \frac{\partial F_1}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{d_{eqv}}{a Re} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial x} + \\ &+ C_m Fr \left[ \frac{K^2}{E} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} \right) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K^2}{E} \right) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K^2}{E} \right) \right]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} F_1 \frac{\partial F_2}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + F_3 \frac{\partial F_2}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{d_{eqv}}{a Re} \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial y} + \\ &+ C_m Fr \left[ \frac{K^2}{E} \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} \right) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K^2}{E} \right) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K^2}{E} \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} F_1 \frac{\partial F_3}{\partial x} + F_2 \frac{\partial F_3}{\partial y} + F_3 \frac{\partial F_3}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{d_{eqv}}{a Re} \left( \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial K}{\partial z} + \\ &+ C_m Fr \left[ \frac{K^2}{E} \left( \frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} \right) + \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K^2}{E} \right) + \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K^2}{E} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

Уравнение для турбулентной кинетической энергии:

$$\begin{aligned} F_1 \frac{\partial k}{\partial x} + F_2 \frac{\partial k}{\partial y} + F_3 \frac{\partial k}{\partial z} &= -\frac{2K}{3} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) + \left( \frac{d_{eqv}}{a Re} + C_m Fr \frac{K^2}{E} \right) \left( \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} \right) + \\ &- 2C_m Fr \frac{K^2}{E} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial y} \right] + \\ &+ C_m Fr \frac{K^2}{E} \left[ \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_2}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{E}{Fr} + \\ &+ C_m Fr \left[ \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K^2}{E} \right) + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K^2}{E} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K^2}{E} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение скорости диссипации турбулентной кинетической энергии:

$$\begin{aligned}
 F_1 \frac{\partial E}{\partial x} + F_2 \frac{\partial E}{\partial y} + F_3 \frac{\partial E}{\partial z} = & -c_{e2} \frac{1}{Fr} \frac{E^2}{K} - c_{e1} \frac{2E}{3} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) + \\
 & + c_{e1} C_m Fr \cdot K \left[ -2 \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_3}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial F_2}{\partial z} \right)^2 \right] + \\
 & + \left( \frac{d_{eqv}}{a Re} + Fr \frac{C_m K^2}{s_e E} \right) \left( \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right) + \\
 & Fr \frac{C_m}{s_e} \left[ \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{K^2}{E} \right) + \frac{\partial E}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{K^2}{E} \right) + \frac{\partial E}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{K^2}{E} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, система уравнений (17)-(22) с соответствующими граничными условиями представляет собой полную математическую формулировку задачи турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости в прямом пружинно-витом канале.

### Заключение

Разработанная математическая модель турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости в пружинно-витом канале позволит установить основные гидродинамические закономерности течения в канале и послужит базой для последующих исследований, а также разработки надежных методов инженерного расчета современной теплообменной аппаратуры с теплообменными элементами в виде пружинно-витых каналов.

### Список литературы

1. Золотоносов А.Я., Золотоносов Я.Д. Теплообменный элемент: пат. 64750 на пол. мод. Рос. Федерация. № 2007107173; заявл. 26.02.07; опубл. 10.07.07, Бюл. № 19. – 3 с.
2. Евсеев Е.С., Золотоносов А.Я., Золотоносов Я.Д. Высокоэффективные теплообменные аппараты на базе теплообменных элементов в виде пружинно-витых труб // Тр. Академэнерго, 2008, № 4. – С. 18-33.
3. Антонов С.Ю., Антонова А.В., Золотоносов Я.Д. Определение коэффициента теплопередачи эллиптических пружинно-витых каналов в теплообменных аппаратах // Сб. трудов XVII шк.–семинара молодых ученых и специалистов «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях». – Жуковский: ЦАГИ, 2009, Т. 1. – С. 280-283.
4. Антонов С.Ю., Антонова А.В., Золотоносов Я.Д. Математическая модель конфигурации эллиптических пружинно-витых каналов теплообменных устройств // Известия КГАСУ, 2009, № 2 (12). – С. 173-178.
5. Багоутдинова А.Г., Золотоносов Я.Д., Мустакимова С.А. Геометрическое моделирование сложных поверхностей пружинно-витых каналов теплообменных устройств // Известия КГАСУ, 2011, № 4 (18). – С. 185-193.
6. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Учеб. пособие для вузов / Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. – Л.: Химия, 1987. – 576 с.
7. Юн А.А. Теория и практика моделирования турбулентных течений. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
8. Лойцянский Л.И. Механика жидкости и газа. Изд. 6-е. – М: Наука, 1987.
9. Юн А.А., Крылов Б.А. Расчет и моделирование турбулентных течений с теплообменом, смешением, химическими реакциями и двухфазных течений в программном комплексе Fastest-3D: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 116 с.

**Bagoutdinova A.G.** – candidate of technical sciences, associate professor

E-mail: [bagoutdinova@rambler.ru](mailto:bagoutdinova@rambler.ru)

**Nizhnekamsk Chemical-Technological Institute**

The organization address: 423570, Russia, Nizhnekamsk, Builders st., 47

**Zolotonosov Ya.D.** – doctor of technical sciences, professor

E-mail: [zolotonosov@mail.ru](mailto:zolotonosov@mail.ru)

**Mustakimova S.A.** – the leading programmer

E-mail: [mustakim@kgasu.ru](mailto:mustakim@kgasu.ru)

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

The organization address: 420043, Russia, Kazan, Zelenaya st., 1

### Modelling of turbulent flow in straight line spring-twisted channels

#### Resume

The article deals with a steady turbulent flow of a viscous incompressible fluid in a twisted spring channel. The surface of this tube is a channel that is used as a taut spring coils is rigidly fastened. The surface of the channel under consideration is described vector-parametric equations derived on the basis of fundamental principles of analysis and differential geometry.

The mathematical model of a viscous incompressible fluid is constructed in the Cartesian coordinate system based on the Reynolds equations, closed by the turbulence model, taking into account the characteristics of the channel geometry. The solution of the resulting system of equations with the boundary conditions will determine the parameters of velocity and pressure in the flow part of the channel and can be used to optimize the technological characteristics and geometric parameters of the existing heat exchangers, as well as creating new and promising designs of heat exchange equipment.

**Keywords:** turbulent flow, modeling, the spring-twisted channel.

#### References

1. Zolotonosov A.J., Zolotonosov Ja.D. Heat exchange element: patent 64750 Russian Federation. № 2007107173; It is declared 26.02.07; it is published 10.07.07. The bulletin № 19. – 3 p.
2. Evseev E.S., Zolotonosov A.J., Zolotonosov Ja.D. High-performance heat exchangers based on heat transfer elements in the form of a spring-twisted tubes // Tr. Academenergo, 2008, № 4. – P. 18-33.
3. Antonov S.Ju., Antonova A.V., Zolotonosov Ja.D. Determination of the heat transfer coefficient elliptic spring-twisted channels of heat exchangers. CAGI, Proceedings of the XVII sch.-seminar of Young Scientists and Specialists Problems of Gas Dynamics and Heat and Mass Transfer in aerospace technology. – Zhukovsky: 2009, T. 1. – P. 280-283.
4. Antonov S.Ju., Antonova A.V., Zolotonosov Ja.D. A mathematical model of the configuration of elliptic spring-stranded channel heat exchangers. // News of the KSUAE, 2009, № 2 (12). – P. 173-178.
5. Bagoutdinova A.G., Zolotonosov Ya.D., Mustakimova S.A. Geometrical modelling of complex surfaces of spring-twisted channels of heat exchangers// News of the KSUAE, 2011, № 4 (18). – P. 185-193.
6. Examples and problems on rate of processes and devices of applied chemistry. Manual for high schools / Pavlov K.F., Romankov P.G., Noskov A.A. – L.: Himija, 1987. – 576 p.
7. Jun A.A. Theory and practice of modelling of turbulent flows. – M.: Knignii dom «Librokom», 2009.
8. Loicanskii L.I. Fluid mechanic. Izd. 6. – M.: Nauka, 1987.
9. Jun A.A., Krilov B.A. Calculation and modelling of turbulent flows with heat exchange, mixture, chemical reactions and two-phase flows in program package Fastest-3D: Manual. – M.: Izd. MAI, 2007. – 116 p.