

УДК 539.3

**Каюмов Р.А.** – доктор физико-математических наук, профессор

E-mail: [kayumov@mail.ru](mailto:kayumov@mail.ru)

**Мухамедова И.З.** – кандидат физико-математических наук, доцент

**Шакирова А.М.** – кандидат физико-математических наук

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

**Лобова Л.В.** – кандидат технических наук, доцент

**Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна**

**Абдуллин И.Ш.** – доктор технических наук, профессор

**Хамматова В.В.** – доктор технических наук, профессор

E-mail: [venerabb@mail.ru](mailto:venerabb@mail.ru)

**Казанский государственный технологический университет им. Кирова**

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ТКАНЕЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

### АННОТАЦИЯ

Предложена модель поведения модифицированных тканей с целью оценки их деформативности в своей плоскости. Анализируется применимость методики оценки жесткости флокированной ткани по линейной теории механики многослойных структур в зависимости от свойств ткани и клея (ее толщины и доли занимаемой клеем площади). Излагается метод определения жесткостных характеристик, приводятся результаты обработки натурных экспериментов, анализ численных исследований задачи о растяжении образцов ткани по разработанной модели.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** холодная плазма, полиэфирная ткань, флокированная ткань, идентификация, жесткость.

**Kayumov R.A.** – doctor of physical and mathematical sciences, professor

**Muhamedova I.Z.** – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor

**Chakirova A.M.** – candidate of physical and mathematical sciences

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

**Lobova L.V.** – doctor of technical sciences, associate professor

**St. Petersburg State University of Technology and Design**

**Abdullin I.C.** – doctor of technical sciences, professor

**Hammatova V.V.** – doctor of technical sciences, professor

**Kazan State Technological University**

## THE MODELLING OF DEFORMATION OF THE MODIFIED FABRICS AT STRETCHING

### ABSTRACT

We suggest the behavior model of the modified fabrics for deformability estimation in their own planes. The applicability of the methodology for the rigidity estimation of flocked fabric by the linear theory of the mechanics of multilayer structures, depending on the properties of the fabric and glue (its thickness and the proportion occupied by the adhesive area) is analyzed. The method for the stiffness (rigidity) characteristics determination is stated, the results of processing carried out field experiments are shown. The analysis of numerical studies of the fabric samples stretching by the developed model is presented.

**KEYWORDS:** cold plasma, polyether fabric, flocked fabric, identification, rigidity.

Придание материалам улучшенных механических и технологических свойств осуществляется путем их модификации. В настоящее время в связи с ограниченными возможностями традиционных методов модификации (механических, химических, электрохимических) в текстильной промышленности все чаще используются и другие, например, в [1-6] приводятся методы модификации с помощью обработки тканей холодной плазмой. Одним из эффективных способов

\*Работа выполнена в рамках реализации Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (государственный контракт № 2432 от 19.11.2009 г.)

модификации натуральных и синтетических материалов является использование процесса флокирования. С помощью этой технологии возможно получение требуемых технологических, эксплуатационных свойств текстильных материалов, а также целенаправленное улучшение физико-механических свойств тканей.

Для анализа качества модифицированных тканей полезно иметь математические модели, описывающие напряженно-деформированное состояние (НДС) ткани при воздействии различных нагрузок. Это актуально и в связи с тем, что такие модели позволят легче решать проблему оптимизации технологии обработки тканей.

### 1. Нелинейно-упругая модель деформирования ткани

В дальнейшем будем оперировать только усилиями, приходящимися на единицу длины сечения образца. Будем обозначать их через  $N_{11}$ ,  $N_{22}$ ,  $N_{12}$  (усилия вдоль основы, утка и усилие сдвига). Соответствующие деформации обозначим через  $e_{11}$ ,  $e_{22}$ ,  $g_{12}$ , введем векторы  $\{N\}$ ,  $\{\epsilon\}$ :

$$\{N\} = \{ N_{11}, N_{22}, N_{12} \}^T, \quad \{\epsilon\} = \{ \epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \gamma_{12} \}^T$$

Индекс «Т» означает операцию транспонирования.

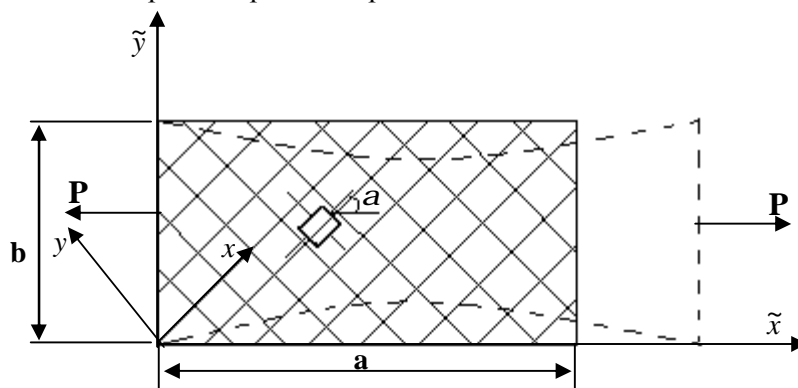


Рис. 1. Деформирование образца ткани, вырезанного под углом  $\alpha$  к основе под действием силы  $P$

Для нелинейного случая в осях ортотропии упругий потенциал для не флокированной ткани примем в следующей форме:

$$W = D_{110}e_{11}^2 / 2 + D_{112}e_{11}^4 / 12 + D_{120}e_{11}e_{22} + D_{220}e_{22}^2 / 2 + D_{222}e_{22}^4 / 12 + D_{330}g_{12}^2 / 2 + D_{334}g_{12}^6 / 30. \quad (1)$$

Аналогично вводится упругий потенциал для флокированной ткани. Отличать соотношения будем с помощью индекса «флок»:

$$W^{флок} = D_{110}^{флок} e_{11}^2 / 2 + D_{112}^{флок} e_{11}^4 / 12 + D_{120}^{флок} e_{11}e_{22} + D_{220}^{флок} e_{22}^2 / 2 + D_{222}^{флок} e_{22}^4 / 12 + D_{330}^{флок} g_{12}^2 / 2 + D_{334}^{флок} g_{12}^6 / 30 \quad (2)$$

В приращениях связь погонных усилий через приращения деформаций запишем в виде:

$$d\{N\} = [D]d\{\epsilon\} \quad (3)$$

$$\text{где, } D_{11} = \frac{d^2W}{de_{11}^2}, \quad D_{22} = \frac{d^2W}{de_{22}^2}, \quad D_{33} = \frac{d^2W}{dg_{12}^2}, \quad D_{12} = \frac{d^2W}{de_{11}e_{22}}. \quad (4)$$

Тогда согласно (1), (3) получаем выражения для характеристик жесткости не флокированной ткани  $D_{ij}^{ткань}$ :

$$\begin{cases} D_{11}^{ткань} = D_{110} + D_{112}e_{11}^2, & D_{22}^{ткань} = D_{220} + D_{222}e_{22}^2 \\ D_{12}^{ткань} = D_{120}, & D_{21}^{ткань} = D_{12}^{ткань} \\ D_{33}^{ткань} = D_{330} + D_{334}g_{12}^4 \\ D_{23}^{ткань} = D_{32}^{ткань} = D_{13}^{ткань} = D_{31}^{ткань} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Упругий закон в лабораторной системе координат  $\tilde{x} \tilde{y}$ , т.е. в осях, параллельных краям испытуемого прямоугольного образца ткани, изображенного на рис. 1, примет вид:

$$d\{\tilde{N}\} = [\tilde{D}]d\{\tilde{\epsilon}\}, \quad [\tilde{D}] = [T] [D] [T]^T, \quad T = \begin{bmatrix} \cos^2 a & \sin^2 a & -\sin 2a \\ \sin^2 a & \cos^2 a & \sin 2a \\ \frac{\sin 2a}{2} & \frac{-\sin 2a}{2} & \cos 2a \end{bmatrix} \quad (6)$$

Для численного анализа процесса деформирования образцов тканей применялся принцип Лагранжа в приращениях в виде:

$$\int_{\Omega} \Delta N^T de d\Omega = \int_w \Delta p^T du. \quad (7)$$

Здесь  $\Omega$  – область, занимаемая образцом ткани,  $\partial\Omega$  ее граница,  $\Delta p$  – приращение вектора погонных сил, приложенных на этой границе,  $de$ ,  $du$  – вариации векторов деформаций и перемещений. Для дискретизации области применялся МКЭ с шестиузловым треугольным элементом второго порядка [8].

Для учета неспособности ткани воспринимать сжимающую нагрузку использовался следующий подход. На каждом шаге приращения нагрузки анализировалось силовое поле  $N_{ij}$ . Если вдоль основы или утка усилия  $N_{11}$  или  $N_{22}$  принимали отрицательные значения, то на этом шаге соответственно жесткости  $D_{11}$  или  $D_{22}$  уменьшались на несколько порядков (в нашем случае в 500 раз). После этого заново проводилось решение уравнения (7), и усилия пересчитывались. Эта процедура повторялась до тех пор, пока не стабилизировалось поле деформаций и усилий.

## 2. Методика определения механических характеристик

Пусть считаются известными данные испытаний конструкций с замером внешних воздействий, а параметры математической модели поведения материала и конструкций являются искомыми. Параметры моделей будем подбирать так, чтобы были близки результаты численного расчета и данные испытаний из условия минимальности квадратичной невязки между расчетными и экспериментальными результатами:

$$\begin{aligned} d^2 = & (v_1[(P)^{эксн} - (P)^{расч}]^2 + m_1[\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 + k_1[\Delta b^{эксн} - \Delta b^{расч}]^2) \Big|_{a_1} + \\ & (v_2[(P)^{эксн} - (P)^{расч}]^2 + m_2[\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 + k_2[\Delta b^{эксн} - \Delta b^{расч}]^2) \Big|_{a_2} + \\ & \dots + \\ & + (v_n[(P)^{эксн} - (P)^{расч}]^2 + m_n[\Delta a^{эксн} - \Delta a^{расч}]^2 + k_n[\Delta b^{эксн} - \Delta b^{расч}]^2) \Big|_{a_n} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $n$  – количество проведенных экспериментов,  $\Delta a^{расч}$ ,  $\Delta b^{расч}$ ,  $\Delta a^{эксн}$ ,  $\Delta b^{эксн}$  расчетные и экспериментальные значения изменений сторон образца в продольном и в поперечном направлениях соответственно (см. рис. 1),  $a_1, a_2, \dots, a_n$  углы между основой и длинной стороной образца,

$v_1, \dots, v_n, m_1, \dots, m_n, k_1, \dots, k_n$  весовые коэффициенты. Неизвестными являются жесткостные характеристики  $D_{110}, D_{114}, D_{220}, D_{224}, D_{120}, D_{330}, D_{334}$ . При этом должно выполняться следующее ограничение:

$$D_{11} D_{22} - D_{12}^2 > 0. \tag{9}$$

Условие (9) будет обеспечено, если принять  $D_{110} D_{220} - D_{120}^2 > 0$ . Для отыскания минимума  $d^2$  применялись стандартные градиентные методы. Жесткостные характеристики  $D_{110}, D_{112}, D_{220}, D_{222}, D_{120}, D_{330}, D_{334}$  были определены как для флокированной, так и исходной тканей на основе анализа данных испытаний образцов, вырезанных под разными углами ( $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ ) к основе при различных растягивающих усилиях.

С целью отработки методик приведенный выше подход сначала был оттестирован на следующей задаче. Была решена прямая задача с заданными жесткостными характеристиками для образцов, вырезанных под углами  $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$ . Полученные результаты считались «экспериментальными». Затем решалась обратная задача на основе полученных «экспериментов», т.е. определялись жесткостные характеристики данной математической модели. Результаты показали работоспособность методики и разработанной программы.

### 3. Верификация методики на примере определения жесткостных характеристик для ткани, подверженной обработке низкотемпературной плазмой

Далее были проанализированы результаты экспериментов, где в качестве экспериментального образца рассматривалась обработанная в теч. 180 сек. холодной плазмой полиэфирная ткань. Схема нагружения образца представлена на рис. 1. Идентификацию неизвестных  $D_{220}, D_{222}, D_{120}, D_{330}, D_{334}$  проводили по экспериментальным данным для модифицированных низкотемпературной плазмой образцов ткани, вырезанных под углами к основе  $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$ .

Образец, вырезанный под углом  $30^\circ$  к основе, считался контрольным.

В результате для обработанной холодной плазмой полиэфирной ткани получены следующие жесткостные характеристики:

$$D_{110} = 1.2, D_{112} = 5900, D_{220} = 0.835, D_{222} = 1000, \tag{10}$$

$$D_{120} = 0.178, D_{330} = 0.045, D_{334} = 2$$

В (10) жесткостные коэффициенты имеют размерность  $[МПа * мм]$ .

Далее был проведен расчет зависимости  $P(\Delta a)$  для углов  $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$ , а также для контрольного образца с углом наклона к основе  $a = 30^\circ$ . Результаты приведены на рис. 2. Видно,

что полученные результаты хорошо согласуются с экспериментом.

### 4 Определение жесткостных характеристик для исходной ткани, ткани с клеем и флокированной ткани по результатам экспериментов на растяжение

В данном разделе приведены результаты обработки экспериментальных данных для исходной ткани, ткани с клеевой прослойкой и флокированной ткани с целью определения жесткостных характеристик ткани, клея и флокированного слоя. Жесткостные характеристики  $D_{ij}$  для ткани также

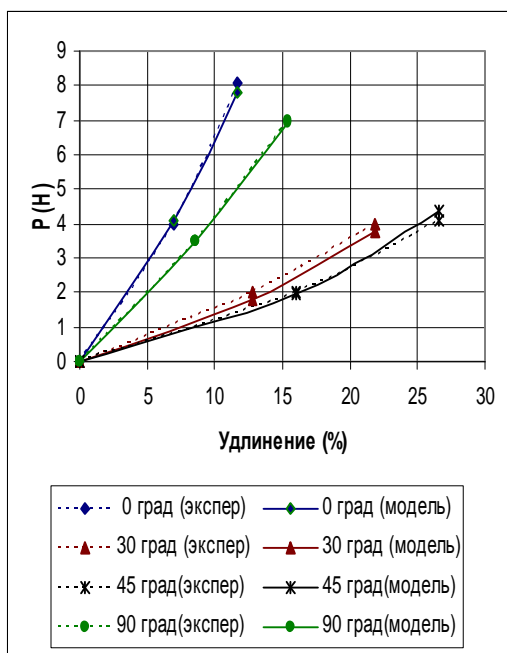


Рис. 2. Зависимость среднего усилия на торце  $P$  от удлинения  $\Delta a$  экспериментальных данных и теоретической кривой по найденным жесткостным характеристикам полиэфирной ткани, подверженной обработке холодной плазмой в теч. 180 с.

принимались в виде (5). Для проведения численных расчетов использованы эксперименты, проведенные для образцов, вырезанных под углами  $0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ . В отличие от предыдущего случая в этих экспериментах не известны значения  $\Delta b$  – изменения поперечных размеров образца. Однако и в этом случае можно определить 4 функции  $D_{ij}$ , но уже по результатам испытаний 4-х образцов, вырезанных под различными углами к основе  $a$ .

После обработки экспериментов для исходной ткани были получены следующие жесткостные характеристики (толщина ткани составляла 0.15 мм, размерность  $D_{ijk}$  [МПа \* мм])

$$\begin{aligned} (D_{110})^{ткань} = 8, (D_{112})^{ткань} = 43000, (D_{220})^{ткань} = 3.5, (D_{222})^{ткань} = 3500, \\ (D_{120})^{ткань} = 0.97, (D_{330})^{ткань} = 0.17, (D_{334})^{ткань} = 195 \end{aligned} \tag{11}$$

Для ткани с клеем были получены следующие результаты (толщина сырого клея составляла 0.2 мм):

$$\begin{aligned} (D_{110})^{тк+кл} = 21, (D_{112})^{тк+кл} = 49000, (D_{220})^{тк+кл} = 5.049, (D_{222})^{тк+кл} = 4000, \\ (D_{120})^{тк+кл} = 0.97, (D_{330})^{тк+кл} = 0.26, (D_{334})^{тк+кл} = 235 \end{aligned} \tag{12}$$

Для флокированной ткани было найдено (толщина флокированной ткани составляла 0.65 мм):

$$\begin{aligned} (D_{110})^{флок} = 26, (D_{112})^{флок} = 55500, (D_{220})^{флок} = 6, (D_{222})^{флок} = 4100, \\ (D_{222})^{флок} = 4100, (D_{120})^{флок} = 0.97, (D_{330})^{флок} = 0.27, (D_{334})^{флок} = 235.5 \end{aligned} \tag{13}$$

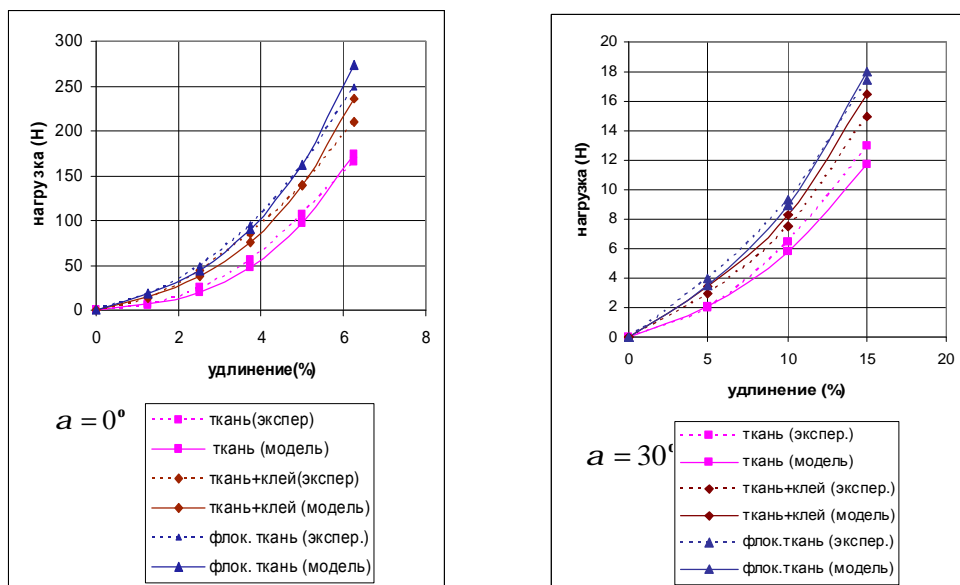


Рис. 3. Графики зависимости нагрузки от удлинения

На рис. 3 приведены графики зависимостей приложенной нагрузки от деформации для вышеприведенных образцов тканей при разных углах  $a$ .

Штриховой линией обозначены экспериментальные зависимости, сплошной – зависимости, полученные по разработанной модели. Видно, что экспериментальные результаты и кривые, полученные по разработанной модели, хорошо согласуются между собой. Невязки имеют величины порядка 10 %.

### 5. Возможность применения теории смесей при расчете флокированной ткани на растяжение

В данном разделе приведены результаты исследования двух подходов к решению задачи о растяжении образцов ткани. В первом используется теория смесей, а во втором учитывается конфигурация рисунка флокированной части ткани. При этом рассматривалась гипотетическая

флокированная ткань, у которой жесткость флокированной части могла быть выше, чем у реальной. Это превышение определялось коэффициентом  $R = D^{\phi} / D_0^{\phi}$ , где компоненты матрицы  $D_0^{\phi}$  определялись по соотношениям (13).

На рис. 4 приведены зависимости силы  $P$ , необходимой для удлинения образца на 20 %, от доли площади флокированной части ткани при различных  $R$ , полученные при точном учете конфигурации рисунка флокированной части, а также полученные по теории смесей. В последнем случае принималось, что

$$D_{ij}^{сред} = D_{ij}^{ткани} (1 - A_{флок}) + D_{ij}^{флок} A_{флок}, \tag{14}$$

где  $A_{флок}$  – удельная площадь флокированной части.

Анализ численных экспериментов показывает, что в нашем случае формулу смесей для практических расчетов можно применять с погрешностью порядка 5 %, если жесткости флокированной части отличаются от жесткости ткани не более чем на порядок.

### 6. Зависимость жесткостных характеристик флокированной ткани от толщины сырого клея

Далее была исследована возможность применения теории смесей для осреднения жесткостных характеристик по толщине. Согласно этой теории компоненты матрицы жесткости проклеенной ткани можно представить в виде:

$$D_{ij}^{мк+кл} = D_{ij}^{ткани} + D_{ij}^{кл} \tag{15}$$

Клеевое покрытие принималось изотропным:

$$D_{11}^{кл} = D_{22}^{кл}, D_{12}^{кл} = D_{21}^{кл}, D_{11}^{кл} = E_{кл} h_{кл}^2 / (1 - \nu_{кл}^2), D_{12}^{кл} = \nu_{кл} D_{11}^{кл}, \tag{16}$$

Для ткани использовались соотношения (5).

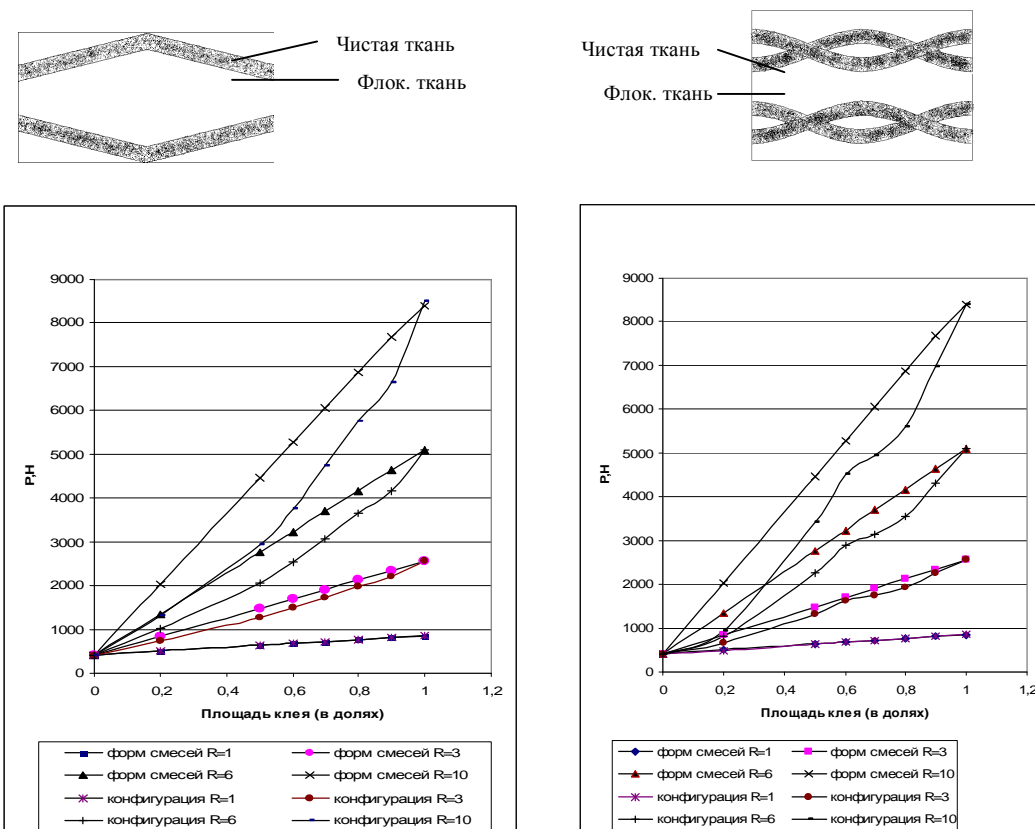


Рис. 4. Графики зависимостей силы  $P$ , необходимой для удлинения образца на 20 %, от удельной площади флокированной части ткани по упрощенной методике и по методике, учитывающей конфигурацию рисунка флокированной части

Как показала обработка экспериментальных данных при определении жесткости тканевого композитного материала путем осреднения жесткостей ткани и клея по толщине, теория смесей (15) не позволяет определить параметры  $D^{кл}$  с приемлемой точностью по невязке экспериментальных и численных результатов. Поэтому для вычисления жесткостей флокированной ткани в зависимости от толщины клея необходимо применить другие подходы. Наиболее простым является метод разложения этих соотношений в ряд по степеням толщины сырого клея  $h^{кл}$ .

Поскольку в вышеприведенных экспериментах получены жесткостные характеристики только для двух случаев (для исходной ткани и для ткани, у которой толщина сырого клея  $h^{кл}$  составляет 0.2 мм), то можно использовать полином лишь 1-ого порядка.

Тогда жесткостные характеристики для флокированной ткани можно представить в виде:

$$\begin{aligned} D_{11}(h^{кл}, e_{11}) &= (8 + 43000e_{11}^2) \cdot \frac{0.2 - h^{кл}}{0.2} + (26 + 55500e_{11}^2) \cdot \frac{h^{кл}}{0.2}, \\ D_{22}(h^{кл}, e_{22}) &= (3.5 + 3500e_{22}^2) \cdot \frac{0.2 - h^{кл}}{0.2} + (6 + 4100e_{22}^2) \cdot \frac{h^{кл}}{0.2}, \\ D_{33}(h^{кл}, g_{12}) &= (0.17 + 1945g_{12}^4) \cdot \frac{0.2 - h^{кл}}{0.2} + (0.27 + 2355g_{12}^4) \cdot \frac{h^{кл}}{0.2}, \\ D_{12}(h^{кл}) &= 0.978 \cdot \frac{0.2 - h^{кл}}{0.2} + 0.978 \cdot \frac{h^{кл}}{0.2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $h^{кл}$  – толщина сырого клея.

### Заключение

Разработанная методика определения жесткостных характеристик флокированной ткани по результатам испытаний образцов, вырезанных под разными углами ( $0^\circ, 90^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ) к основе при различных растягивающих усилиях, позволила провести анализ влияния флокирования на ее механические характеристики. Выявлено, что теория смесей при осреднении свойств тканей и клея по толщине не позволяет определить жесткостные характеристики с приемлемой точностью. Определены границы применимости теории смесей при проведении осреднения механических характеристик по площади флокированной ткани.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллин И.Ш., Хамматова В.В. Влияние потока низкотемпературной плазмы на свойства текстильных материалов. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2003. – 216 с.
2. Каюмов Р.А., Абдуллин И.Ш., Серазутдинов М.Н., Хамматова В.В., Мухамедова И.З., Кумпан Е.В., Шакирова А.М. Физически нелинейная модель тканевых материалов, обработанных в потоке высокочастотной плазмы // Вестник КГТУ, – Казань, 2010, № 6. – С. 42-53.
3. Абдуллин И.Ш., Хамматова В.В., Кумпан Е.В. Экспериментальные исследования влияния плазмы ВЧЕ разряда на адгезионные свойства композиционных материалов // Прикладная физика. – М.: РАН ВАК, 2005, № 6. – С. 92-94.
4. Хамматова В.В. Исследование физико-механических характеристик текстильных материалов после воздействия ВЧЕ разряда // Изв. вузов. Технология текстил. пром-ти, 2005, № 1. – С. 22-25.
5. Хамматова В.В. Влияние плазмы ВЧЕ разряда на структуру и физико-механические свойства текстильных волокон // Химические волокна, 2005, № 4. – С. 47-49.
6. Серазутдинов М.Н., Каюмов Р.А., Хамматова В.В. Расчет деформационных свойств текстильных материалов // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности, 2006, № 5. – С. 34-38.
7. Каюмов Р.А., Нежданов Р.О., Тазюков Б.Ф. Определение характеристик волокнистых композитных материалов методами идентификации. – Казань: Изд-во КГУ, 2005. – 258 с.
8. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 329 с.

## REFERENCES

1. Abdullin I.Sh., Hammatova V.V. Effect of low temperature plasma flow on the properties of textile materials. – Kazan: Publishers KGU, 2003. – 216 p.
2. Kayumov R.A., Abdullin I.Sh., Serazutdinov M.N., Hammatova V.V., Muhamedova I.Z., Kumpan E.V., Shakirova A.M. Physical nonlinear model of fabric materials, processed in a stream of high-frequency plasma. // Bulletin of the Kazan Technological University. – Kazan: KGTU, 2010, № 6. – P. 42-53.
3. Abdullin I.Sh., Hammatova V.V., Kumpan E.V. Experimental study the effect of plasma discharge on yester adhesive properties of composite materials // Applied Physics. – M.: RAN VAK, 2005, № 6. – P. 92-94.
4. Hammatova V.V. Investigation of physical and mechanical properties of textile materials after exposure to yester discharge // Izvestiya Vuzov. Technology of Textile Industry, 2005, № 1. – P. 22-25.
5. Hammatova V.V. Influence of plasma yester discharge on the structure and mechanical properties of textile fibers // Chemical fibers, 2005, № 4. – P. 47-49.
6. Serazutdinov M.N., Kayumov R.A., Hammatova V.V. Calculation of the deformation properties of textile materials // Izvestiya Vuzov. Technology of Textile Industry, 2006, № 5. – P. 34-38.
7. Kayumov R.A., Neshdanov R.O., Tazyukov B.F. Defining characteristics of fibrous composite materials by means of identification. – Kazan: Publishers KGU, 2005. – 258 p.
8. Obrazcov I.F., Savelev L.M., Hazanov H.S. Finite element method in problems of structural mechanics of aircraft. – M.: High school, 1985. – 329 p.