УДК 532.5:621.694
**А.Я. Золотоносов** – аспирант
**Я.Д. Золотоносов** – доктор технических наук, профессор
E-mail: zolotonosov@mail.ru
**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

# ТЕПЛООБМЕН В АППАРАТЕ ТИПА «ТРУБА В ТРУБЕ» С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТЕПЛООБМЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ «КОНФУЗОР-ДИФФУЗОР» И ОРЕБРЕННОЙ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТЬЮ

**АННОТАЦИЯ**

Работа посвящена разработке математической модели сопряженного теплообмена в аппарате типа «труба в трубе» с вращающейся теплообменной поверхностью «конфузор-дифузор» и оребренной проточной частью. Это позволит уточнить методику инженерного расчета теплообменников с вращающейся теплообменной поверхностью типа «конфузор-диффузор», а также по-новому подойти к определению конструктивных и технологических характеристик современных гравитационных аппаратов.
**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** гидродинамика, сопряженный теплообмен, поле температур.

**A.Ya. Zolotonosov** – post-graduate student
**Ya.D. Zolotonosov** – doctor of technical sciences, professor
**Kazan State University of Architecture and Engineering**

# HEAT EXCHANGE IN THE TYPE DEVICE «THE PIPE IN THE PIPE» WITH ROTATING HEAT-EXCHANGE THE SURFACE «KONFUZOR-DIFFUSOR» AND RIBBED THE FLOWING PART

**ABSTRACT**

Work is devoted development of mathematical model of conjugate heat change in the type vehicle «a tube in a tube» with gyrated heat exchange surface "confuser-diffuzor" and ribbed the setting. It will heat, to update the method of application of engineering account of heat exchangers with gyrated heat exchange surface of type "confuser-diffuzor", and also in a new fashion to approach to definition constructional and operational characteristics on modern gravitational vehicles.
**KEYWORDS:** hydrodynamics, interfaced heat exchange, a field of temperatures.

## Введение

Среди известных рекуперативных теплообменников особое место занимают теплообменные аппараты типа «труба в трубе» с вращающейся криволинейной поверхностью, выполненной в виде трубы из последовательно чередующихся каналов типа «конфузор-диффузор» [1]. Проточная часть таких труб выполнена оребренной [2] или неоребренной [1], а в поперечном сечении – круглой, эллиптической или овальной форм [1].

Конфигурация теплообменной поверхности для таких труб задается в процессе накатки или холодного обжатия круглых элементов трубы в разъемных штампах на гидравлическом прессе, или, в случае пружинно-витых каналов, определяется самой технологией намотки [3]. Конструктивно конфузорно-диффузорная труба в теплообменном аппарате устанавливается коаксиально и в одном из вариантов вращается относительно неподвижной внешней трубы, в другом исполнении вращается совместно с внешней трубой от общего электродвигателя или, в более общем случае, от автономных электродвигателей соответственно для внешней и внутренней труб [1]. Среди всего многообразия рассматриваемых ротационных аппаратов наибольший научный и практический интерес представляют теплообменники с вращающейся теплообменной поверхностью, выполненные с внутренней оребренной проточной частью.

Оребрение в таких каналах вызвано требованиями интенсификации процесса теплообмена, поскольку с водной стороны среднее значение $\bar{\alpha}_в$ =1300 Вт/м$^2$К, а со стороны пара, вследствие срыва конденсатной пленки с поверхности вращающегося канала и перехода с пленочного режима конденсации в «пленочно-капельный», $\bar{\alpha}_n$=21000Вт/м$^2$К [4].

Внедрение таких теплообменников в промышленность сдерживается отсутствием теоретических и прикладных исследований в области гидродинамики и теплообмена в проточной части аппаратов с оребренной вращающейся теплообменной поверхностью «конфузор-дифузор» и надежных методов их инженерного расчета.

**1. Математическая модель сопряженного теплообмена**

Рассмотрим математическую модель стационарного ламинарного течения вязкой жидкости во вращающемся криволинейном конфузорно-диффузорном канале.

Рассматривается случай, когда перерабатываемая жидкость поступает во вращающуюся трубу длиной $L_{mp}$ ($L_{mp} \to \infty$) из емкости большого размера. Сечение канала изменяется по длине канала в соответствии с некоторым законом, описываемым функцией $R(z) = -\sqrt{R_*^2 - (z-a)^2} + b$, где $(a,b)$ – координаты центра окружности, по которой построен профиль твердой стенки канала, $R_*$ – радиус окружности. Канал снабжен ребрами (см. рис.).

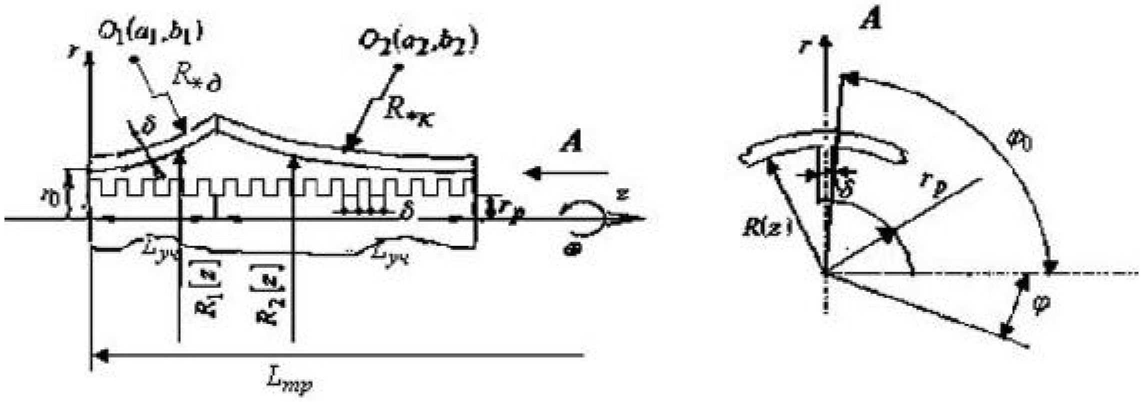


Рис. Конфузорно-диффузорный элемент

Учитывая геометрию объекта, течение вязкой жидкости во вращающейся волнистой трубе рассматриваем в цилиндрической системе координат $(r, j, z)$, где нулевое значение радиальной координаты $r$ совпадает с осью трубы, координаты $z$ – с входным сечением, а угловой координаты $j$ – с вертикальным сечением трубы.

Тогда уравнения движения, неразрывности, энергии и теплопроводности стенок канала и ребра с учетом центробежной силы запишутся в виде [5]:

$$V(\mathrm{grad}\, V) = v(\mathrm{div\, grad}\, V) - \frac{1}{r}\mathrm{grad}\, p + wr^2;$$

$$\mathrm{div}\, V = 0;\ V(\nabla T) = a(\mathrm{div\, grad}\, T);\ \mathrm{div\, grad}T = 0;\ \mathrm{div\, grad}T = \frac{2\bar{a}}{l\, d_p}(T_p - T_{ж}) \qquad (1)$$

В качестве условий однозначности для системы (1) задаются начальные распределения скорости, давления, температуры на входе в канал и граничные условия на стенках канала и ребра:

$z=0$:

$$r=0:\quad V_r = V_j = 0;\ V_z = u_0; P = P_0;\ \frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{\partial V_j}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial T_{ж}}{\partial z} = 0; T_{ж} = T_0; T_p = T_{ср};$$

$$r = r_p:\quad V_j = wr_p; V_r = V_z = 0; T_p = T_{ж};\ l_p \frac{\partial T_p}{\partial r} = l_{ж} \frac{\partial T_{ж}}{\partial r};$$

$$j=j_0:\quad V_r=V_z=0;\ V_j=wr;\ T_p=T_{ж};\ l_p\frac{\partial T_p}{\partial r}=l\frac{\partial T_{ж}}{\partial r};$$

$$r=R(z):\quad V_r=V_z=0;\ V_j=wR(z);T_{ж}=T_p=T_c;\ l_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial r}=l_c\frac{\partial T_c}{\partial r}\left(0,j,R(z)\right);$$

$$r=R(z)+d:\ l_c\frac{\partial T_c}{\partial r}=a_n\left(T_n-T_c\right)$$

(2)

$$z=L_{уч}:$$

$$r=0:\qquad V_r=V_j=0;\ \frac{\partial V_r}{\partial z}=\frac{\partial V_j}{\partial z}=\frac{\partial T_{ж}}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial r};$$

$$r=r_p:\quad V_j=wr_p;V_r=V_z=0;\quad T_p=T_{ж};\ \ l_p\frac{\partial T_p}{\partial r}=l_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial r};$$

$$j=j_0:\ V_r=V_z=0;\ V_j=wr;\ T_p=T_{ж};\ l_p\frac{\partial T_p}{\partial r}=l_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial r};$$

$$r=R(z):\quad V_r=V_z=0;\ V_f=wR(z);\ T_{ж}=T_p=T_c;\ l_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial r}=l_c\frac{\partial T_c}{\partial r};$$

$$r=R(z)+d:\ l_c\frac{\partial T_c}{\partial r}=a_n\left(T_n-T_c\right).$$

$$z=L_{mp}\left(L_{mp}\to\infty\right):$$

$$r=0:\qquad V_r=V_j=0;\ V_z=2u_{cp};\frac{\partial V_r}{\partial z}=\frac{\partial V_j}{\partial z}=\frac{\partial V_z}{\partial z}=\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial T_{ж}}{\partial r}=0;$$

$$r=r_p:\quad V_j=wr_p;V_r=V_z=0;\ T_p=T_{ж};\ \ l_p\frac{\partial T_p}{\partial r}=l_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial r};$$

$$j=j_0:\ V_r=V_z=0;\ V_j=wr;\ T_p=T_{ж};\ l_p\frac{\partial T_p}{\partial r}=l_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial r};$$

$$r=R(z):\ \ V_r=V_z=0;\ V_j=wR(z);T_{ж}=T_c;\ T_p=T_c;\ l_{ж}\frac{\partial T_{ж}}{\partial r}=l_p\frac{\partial T_p}{\partial r}=l_c\frac{\partial T_c}{\partial r};$$

$$r=R(z)+d:\ l_c\frac{\partial T_c}{\partial r}=a_n\left(T_n-T_c\right)$$

Используя преобразования координат, отобразим физическую область течения с криволинейными границами. Для этого произведем замену переменных:

$$\bar{r}=\frac{r}{R(z)};\ \tilde{h}=\frac{r-R(z)}{R(z)};\ \bar{z}=\frac{z}{L_{уч}}.$$

Введем в уравнения такие безразмерные переменные и параметры:

$$\bar{a}=\frac{a}{R_*};\bar{b}=\frac{b}{R_*};z_*=\frac{z}{R_*};\bar{R}=\frac{R(z)}{L_{уч}};$$

$$\tilde{z}=\frac{z}{L_{тр}};\ \bar{u}=\frac{u_0}{u_{ср}};\ \bar{j}=r_p\cdot j_0;\ \bar{l}=\frac{l_c}{l_{ж}};$$

$$\tilde{l}=\frac{l_{ж}}{l_p};\ \bar{L}=\frac{L_{уч}}{L_{тр}};\ \tilde{r}=\frac{r_p}{R(z)};\tilde{R}=\frac{d_э}{R(z)};\bar{H}=\frac{d}{R(z)},$$

где $L_{уч}$ – длина участка трубы (конфузор $l_к$ или диффузор $l_д$); $d$ – толщина стенки канала; $d_э$ – эквивалентный диаметр элементов канала, вычисляемый по известным уравнениям [6].

Решение систем будем искать в виде:

$$V_r=u_0 f(\bar{z},j,\bar{r});V_j=w\bar{r}r_0G(\bar{z},j,\bar{r});$$

$$V_z=u_0H(\bar{z},j,\bar{r});\ p-p_0=ru_0^2P(\bar{z},j,\bar{r});$$

$$T_{ж}(\bar{z},j,\bar{r})=T_0t_{ж}(\bar{z},j,\bar{r});\ T_n(\bar{z},j,\bar{r})=T_0t_n(\bar{z},j,\bar{r});$$

$$T_c(\tilde{z},j,\bar{r})=T_0t_c(\tilde{z},j,\bar{r});T_p(\bar{z},j,\bar{r})=T_ct_p(\bar{z},j,\bar{r});$$

$$T_{ср}(\bar{z},j_0,\bar{r})=T_ct^*(\bar{z},j_0,\bar{r});T_p(\bar{z},j_0,\bar{r})=T_{ж}\tilde{t}(\bar{z},j_0,\bar{r});$$

$$T_{ж}(\bar{z},j_0,\bar{r})=T_c\bar{t}(\bar{z},j_0,\bar{r}).$$

Тогда краевая задача нахождения температуры в стенке канала для области $\Omega_1=\left\{(\bar{z},j,\tilde{r})/0\le\bar{z}\le1,\ 0\le j\le j_0,\ 0\le\tilde{r}\le\bar{H}\right\}$ и безразмерных компонент скоростей, поля температур в жидкости для области $\Omega_2=\left\{(\bar{z},j,\bar{r})/0\le\bar{z}\le1,\ 0\le j\le j_0,\ 1\le\bar{r}\le1\right\}$ примет вид:

$$f\frac{\partial f}{\partial\bar{r}}+\frac{\mathrm{N}G}{\tilde{R}}\frac{\partial f}{\partial j}-H\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial f}{\partial\bar{r}}-\bar{R}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\right)=-\frac{\partial P}{\partial\bar{r}}+\frac{\tilde{R}}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial f}{\partial\bar{r}}+\bar{r}\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}\left((z_*-\bar{a})^2+1\right)-\bar{b}}{\left(1-(z_*-\bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial f}{\partial\bar{r}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 f}{\partial j^2}+\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{r}^2}-\frac{2\bar{r}\bar{R}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{r}\partial\bar{z}}+\bar{R}^2\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{z}^2}-\frac{2\mathrm{N}}{\bar{r}}\frac{\partial G}{\partial j}-\frac{f}{\bar{r}^2}\right\}+\frac{\mathrm{N}^2\bar{r}G^2}{\tilde{R}^2};$$

$$\left(f\frac{\partial G}{\partial\bar{r}}+\frac{\mathrm{N}G}{\tilde{R}}\frac{\partial G}{\partial j}-H\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial G}{\partial\bar{r}}-\bar{R}\frac{\partial G}{\partial\bar{z}}\right)\bar{r}+2fG\right)\bar{r}=-\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{\partial P}{\partial j}+\frac{\tilde{R}\bar{r}^2}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial^2 G}{\partial\bar{r}^2}+\frac{3}{\bar{r}}\frac{\partial G}{\partial\bar{r}}+\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 G}{\partial j^2}+\right.$$

$$\left.+\bar{r}\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}\left((z_*-\bar{a})^2+1\right)-\bar{b}}{\left(1-(z_*-\bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial G}{\partial\bar{r}}+\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\right)^2\frac{\partial^2 G}{\partial\bar{r}^2}-\frac{2\bar{r}\bar{R}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial^2 G}{\partial\bar{r}\partial\bar{z}}+\bar{R}^2\frac{\partial^2 G}{\partial\bar{z}^2}+\frac{2}{\bar{r}^3\mathrm{N}}\frac{\partial G}{\partial j}\right\};$$

$$f\frac{\partial H}{\partial\bar{r}}+\frac{\mathrm{N}G}{\tilde{R}}\frac{\partial H}{\partial j}-H\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial H}{\partial\bar{r}}-\bar{R}\frac{\partial H}{\partial\bar{z}}\right)=\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial P}{\partial\bar{r}}-\bar{R}\frac{\partial P}{\partial\bar{z}}+\frac{\tilde{R}}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial H}{\partial\bar{r}}+\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial j^2}+\right.$$

$$\left.+\bar{r}\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}\left((z_*-\bar{a})^2+1\right)-\bar{b}}{\left(1-(z_*-\bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial H}{\partial\bar{r}}+\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\right)^2\frac{\partial^2 H}{\partial\bar{r}^2}-\frac{2\bar{r}\bar{R}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial^2 H}{\partial\bar{r}\partial\bar{z}}+\bar{R}^2\frac{\partial^2 H}{\partial\bar{z}^2}\right\};$$

(3)

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{r}}-\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial H}{\partial\bar{r}}-\bar{R}\frac{\partial H}{\partial\bar{z}}\right)+\frac{\mathrm{N}}{\tilde{R}}\frac{\partial G}{\partial j}+\frac{f}{\bar{r}}=0;$$

(4)

$$f\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar{r}}+\frac{\mathrm{N}G}{\tilde{R}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial j}-H\left(\frac{\bar{r}(z_*-\bar{a})}{\sqrt{1-(z_*-\bar{a})^2}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar{r}}-\bar{R}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar{z}}\right)=\frac{\tilde{R}}{\mathrm{Pe}}\left\{\frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar{r}}+\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial j^2}+\right.$$

(5)

$$+\bar r\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r}+\left(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\right)^2\frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial \bar r^2}-\frac{2\bar r\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial \bar r\partial \bar z}+\bar R^2\frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial \bar z^2}\Bigg\};$$

$$\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar r^2}+\frac{1}{\bar r}\frac{\partial t_p}{\partial \bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2 T_p}{\partial j^2}+\bar r\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_p}{\partial \bar r}+\left(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\right)^2\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar r^2}-\frac{2\bar r\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar r\partial \bar z}+$$

$$+\bar R^2\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar z^2}=\frac{2\bar a}{l\,d_p}\left(t_p-t_{ж}\right);$$

(6)

$$\frac{\partial^2 t_c}{\partial \hbar^2}+\frac{1}{\hbar}\frac{\partial t_c}{\partial \hbar}+\frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 t_c}{\partial j^2}+(\hbar+1)\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_c}{\partial \hbar}+\left(\frac{(\hbar+1)(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\right)^2\frac{\partial^2 t_c}{\partial \hbar^2}-$$ (7)

$$-\frac{2(\hbar+1)\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial^2 t_c}{\partial \hbar\partial \bar z}+\bar R^2\frac{\partial^2 t_c}{\partial \bar z^2}=0$$

с граничными условиями

$$\bar z=0:\quad \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\partial G}{\partial \bar z}=\frac{\partial H}{\partial \bar z}=\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar z}=0;$$

$$\bar r=0:\quad f=0;\ G=0;\ H=1;\ P=0;\ t_{ж}=1;\ t_p=t^*;$$

$$r=\breve r:\quad G=1;\ f=0;\ H=0;\ t_p=t^*;\ \frac{\partial t_p}{\partial \bar r}=\tilde l_{ж}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r};$$

$$f=f_0:\quad f=H=0;\ G=1;\ t_p=t_{ж};\ \frac{\partial t_p}{\partial \bar r}=\tilde l\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r};$$

$$\bar r=1,\ \hbar=0:\quad f=H=0;\ G=1;\ t_{ж}=t_c;\ t_p=1;\ \frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r}=\bar l_c\frac{\partial t_c}{\partial \bar r};$$

$$\hbar=\bar H:\quad \frac{\partial t_c}{\partial \bar r}=Bi\left(t_n-t_c\right);$$

(8)

$$\bar z=\bar L:$$

$$r=0:\quad f=0;\ G=0;\ \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\partial G}{\partial \bar z}=\frac{\partial P}{\partial \bar r}=\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r}=0;$$

$$r=\breve r:\quad G=1;\ f=0;\ H=0;\ t_p=t^*;\ \frac{\partial t_p}{\partial \bar r}=\tilde l_{ж}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r};$$

$$f=f_0:\quad f=H=0;\ G=1;\ t_p=t^*;\ \frac{\partial t_p}{\partial \bar r}=\tilde l_{ж}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r};$$

$$\bar r=1,\ \hbar=0:\quad f=H=0;\ G=1;\ t_{ж}=t_c;\ t_p=1;\ \frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r}=\bar l_c\frac{\partial t_c}{\partial \bar r};\ \hbar=1:\ \frac{\partial t_c}{\partial \bar r}\left(\bar L,f,1\right)=Bi\left(t_n-t_c\right);$$

$$\tilde z=1:$$

$$\bar r=0:\quad f=0;\ G=0;\ H=2\bar u;\ \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{\partial G}{\partial \bar z}=\frac{\partial H}{\partial \bar z}=\frac{\partial P}{\partial \bar r}=\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r}=0;$$

$$r=\breve r:\quad G=1;\ f=0;\ H=0;\ t_p=t^*;\ \frac{\partial t_p}{\partial \bar r}=\tilde l_{ж}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar r};$$

$$f = f_0: \quad f = H = 0; \quad G = 1; \quad t_p = t_{ж}; \quad \frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}} = \bar{\lambda}_{ж} \frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar{r}};$$

$$\bar{r} = 1, \ \bar{h} = 0: \quad f = H = 0; \quad G = 1;$$

$$t_{ж} = t^{*}; \ t_p = 1;$$

$$\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar{r}} = \bar{\lambda}_p \frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}} = \bar{\lambda}_c \frac{\partial t_c}{\partial \bar{r}};$$

$$\bar{h} = \bar{H}: \quad \frac{\partial t_c}{\partial \bar{r}} = Bi\left(t_n - t_c\right).$$

Система уравнений (3)-(7) с граничными условиями (8) составляет полную математическую модель сопряженной задачи теплообмена в оребренном канале, выполненном из конфузорно-диффузорных элементов и вращающемся с постоянной скоростью.

**2. Алгоритм решения сопряженной задачи теплообмена в оребренном криволинейном канале типа «конфузор-диффузор»**

При решении уравнений движения (3) для исключения безразмерного параметра давления $P$ из числа неизвестных используем метод штрафа [7]. Для этого нулевую правую часть уравнения неразрывности (4) заменим произведением давления на малый штрафной параметр ε (ε→0, $Div\vec{V} \to 0$) [8]:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} - \left( \frac{\bar{r}\left(z_{*} - \bar{a}\right)}{\sqrt{1-\left(z_{*} - \bar{a}\right)^2}} \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} - \bar{R}\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{N}{\tilde{R}}\frac{\partial G}{\partial j} + \frac{f}{\bar{r}} = -Pe .$$

Тогда выражение для давления будет иметь вид

$$P = -\frac{1}{e}\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} - \left( \frac{\bar{r}\left(z_{*} - \bar{a}\right)}{\sqrt{1-\left(z_{*} - \bar{a}\right)^2}} \frac{\partial H}{\partial \bar{r}} - \bar{R}\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{N}{\tilde{R}}\frac{\partial G}{\partial j} + \frac{f}{\bar{r}} \right). \tag{9}$$

Для решения задачи применим метод конечных элементов на основе метода Галеркина. Согласно основной идее метода решение системы (3)-(7) будем искать в виде линейной комбинации базисных функций:

$$\begin{gathered} f^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}) = \sum_{i=1}^{8} u_i^{(e)}\Phi_i^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}); \quad G^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}) = \sum_{i=1}^{8} J_i^{(e)}\Phi_i^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}); \\ H^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}) = \sum_{i=1}^{8} w_i^{(e)}\Phi_i^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}); \quad t_{ж}^{(e)}(\bar{r},j,\bar{z}) = \sum_{i=1}^{8} t_{жi}^{(e)}\Phi_i^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}); \\ t_p^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}) = \sum_{i=1}^{8} t_{p_i}^{(e)}\Phi_i^{(e)}(\bar{z},j,\bar{r}) \end{gathered} \tag{10}$$

или в матричной форме:

$$\begin{gathered} f^{(e)} = [\Phi]\{u\}; \ G^{(e)} = [\Phi]\{J\}; H^{(e)} = [\Phi]\{w\}; \\ t_{ж}^{(e)} = [\Phi]\{t_{ж}\}; \ t_p^{(e)} = [\Phi]\{t_л\} \end{gathered}$$

Здесь $[\Phi] = \left[\Phi_1^e(\bar{z},j,\bar{r}), \Phi_2^e(\bar{z},j,\bar{r}), ..., \Phi_8^e(\bar{z},j,\bar{r})\right]$ – вектор-строка базисных функций, $\{u\},\{\vartheta\},\{w\},\{t_{ж}\},\{t_л\},\{t_c\}$ – вектор-столбец неизвестных узловых значений функций:

$$\{u\}=\begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ \vdots \\ u_8^{(e)} \end{Bmatrix},\{J\}=\begin{Bmatrix} J_1^{(e)} \\ J_2^{(e)} \\ \vdots \\ J_8^{(e)} \end{Bmatrix},\{w\}=\begin{Bmatrix} w_1^{(e)} \\ w_2^{(e)} \\ \vdots \\ w_8^{(e)} \end{Bmatrix},\left\{t_{ж}\right\}=\begin{Bmatrix} t_{ж1}^{(e)} \\ t_{ж2}^{(e)} \\ \vdots \\ t_{ж8}^{(e)} \end{Bmatrix},\left\{t_c\right\}=\begin{Bmatrix} t_{c1}^{(e)} \\ t_{c2}^{(e)} \\ \vdots \\ t_{c8}^{(e)} \end{Bmatrix}.$$

Нижние индексы означают локальную нумерацию узлов, верхний индекс ***e*** **–** номер элемента. Интегрируя уравнения (3)-(7) по объему конечного элемента, получим:

*уравнения движения*

$$\int_V [\Phi]^T \left( f\frac{\partial f}{\partial \bar r}+\frac{NG}{\tilde R}\frac{\partial f}{\partial j}-H\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial f}{\partial \bar r}-\bar R\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\right)dV=\frac{1}{e}\int_V [\Phi]^T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \bar r^2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial H}{\partial \bar r}+\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar r^2}-\bar R\frac{\partial^2 H}{\partial \bar r\partial \bar z}\right)+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial^2 G}{\partial \bar r\partial j}-\frac{f}{\bar r^2}+\frac{1}{\bar r}\frac{\partial f}{\partial \bar r}\right)dV+$$

(11)

$$+\frac{\tilde R}{\mathrm{Re}}\int_V [\Phi]^T\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial \bar r^2}+\frac{1}{\bar r}\frac{\partial f}{\partial \bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial j^2}+\bar r\frac{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}\left(\left(z_*-\bar a\right)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-\left(z_*-\bar a\right)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial f}{\partial \bar r}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial \bar r^2}-\frac{2\bar r\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar r\partial \bar z}+\bar R^2\frac{\partial^2 f}{\partial \bar z^2}-\frac{2N}{\bar r}\frac{\partial G}{\partial j}-\frac{f}{\bar r^2}\right\}dV++\frac{N^2}{\tilde R^2}\int_V [\Phi]^T\bar r G^2,$$

$$\int_V [\Phi]^T\left( f\frac{\partial G}{\partial \bar r}+\frac{NG}{\tilde R}\frac{\partial G}{\partial j}-H\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial G}{\partial \bar r}-\bar R\frac{\partial G}{\partial \bar z}\right)\bar r+2fG\right)\bar r dV=\frac{1}{Ne}\int_V [\Phi]^T\left(\frac{\partial^2 f}{\partial j\partial \bar r}-\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial^2 H}{\partial j\partial \bar r}-\bar R\frac{\partial^2 H}{\partial j\partial \bar z}\right)+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial^2 G}{\partial j^2}+\frac{1}{\bar r}\frac{\partial f}{\partial j}\right)dV+$$

$$+\frac{\tilde R\bar r^2}{\mathrm{Re}}\int_V [\Phi]^T\left\{\frac{\partial^2 G}{\partial \bar r^2}+\frac{3}{\bar r}\frac{\partial G}{\partial \bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial j^2}+\bar r\frac{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}\left(\left(z_*-\bar a\right)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-\left(z_*-\bar a\right)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial G}{\partial \bar r}+\right. \qquad (12)$$

$$\left.+\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial^2 G}{\partial \bar r^2}-\frac{2\bar r\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial^2 G}{\partial \bar r\partial \bar z}+\bar R^2\frac{\partial^2 G}{\partial \bar z^2}+\frac{2}{\bar r^3 N}\frac{\partial G}{\partial j}\right\}dV,$$

$$\int_V [\Phi]^T \left( f\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \frac{NG}{\tilde{R}}\frac{\partial H}{\partial j} - H\left( \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} - \bar{R}\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right)\right) dV = \frac{1}{e}\int_V [\Phi]^T \left( \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{r}^2} - \left( \frac{(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}^2} - \bar{R}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}\partial \bar{z}} \right) - \right.\right.$$

$$+\frac{N}{\tilde{R}}\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{r}\partial j} - \frac{f}{\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \Bigg) - \bar{R}\left( \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\partial \bar{r}} - \left( \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{z}\partial \bar{r}} - \bar{R}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{z}^2} \right) + \frac{N}{\tilde{R}}\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}\partial j} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)\Bigg) dV + \frac{\tilde{R}}{\mathrm{Re}}\int_V [\Phi]^T \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial j^2} + \bar{r}\frac{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}\left((z_* - \bar{a})^2 + 1\right) - \bar{b}}{\left(1-(z_* - \bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial H}{\partial \bar{r}} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}^2} - \frac{2\bar{r}\bar{R}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{r}\partial \bar{z}} + \bar{R}^2\frac{\partial^2 H}{\partial \bar{z}^2} \right\} dV,$$

(13)

*уравнение энергии*

$$\int_V [\Phi]^T \left( f\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar{r}} + \frac{NG}{\tilde{R}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial j} - H\left( \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar{r}} - \bar{R}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar{z}} \right)\right) dV = \frac{\tilde{R}}{Pe}\int_V [\Phi]^T \left\{ \frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial \bar{r}^2} + \right. \tag{14}$$

$$\left. + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial j^2} + \bar{r}\frac{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}\left((z_* - \bar{a})^2 + 1\right) - \bar{b}}{\left(1-(z_* - \bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial \bar{r}} + \left( \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \right)^2 \frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial \bar{r}^2} - \frac{2\bar{r}\bar{R}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial \bar{r}\partial \bar{z}} + \bar{R}^2\frac{\partial^2 t_{ж}}{\partial \bar{z}^2} \right\}\Bigg) dV,$$

*уравнение теплопроводности стенок канала*

$$\int_V [\Phi]^T \left( \frac{\partial^2 t_c}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{(\tilde{r}+1)}\frac{\partial t_c}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{(\tilde{r}+1)^2}\frac{\partial^2 t_c}{\partial j^2} + (\tilde{r}+1)\frac{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}\left((z_* - \bar{a})^2 + 1\right) - \bar{b}}{\left(1-(z_* - \bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_c}{\partial \tilde{r}} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{(\tilde{r}+1)(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \right)^2 \frac{\partial^2 t_c}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{2(\tilde{r}+1)\bar{R}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial^2 t_c}{\partial \tilde{r}\partial \bar{z}} + \bar{R}^2\frac{\partial^2 t_c}{\partial \bar{z}^2} \right) dV = 0,$$

(15)

*Уравнение теплопроводности ребра*

$$\int_V [\Phi]^T \left( \frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial t_p}{\partial f} + \bar{r}\frac{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}\left((z_* - \bar{a})^2 + 1\right) - \bar{b}}{\left(1-(z_* - \bar{a})^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_p}{\partial \bar{r}} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \right)^2 \frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}^2} - \frac{2\bar{r}\bar{R}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}}\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{r}\partial \bar{z}} + \bar{R}^2\frac{\partial^2 t_p}{\partial \bar{z}^2} \right) dV = \frac{2\bar{a}}{ld}\int_V [\Phi]^T \left(t_p - t_{ж}\right) dV. \tag{16}$$

Так как в качестве базисных функций выбраны функции нулевого порядка непрерывности, то уравнения (11-16) должны содержать производные порядка не выше первого. В целях понижения порядка производных, учитывая граничные условия (8) и с учетом интеграла (17) [8, 9],

$$\int_V [\Phi]^T \frac{\partial^2 c}{\partial \bar{r}^2} dV = \int_S [\Phi]^T \frac{\partial c}{\partial \bar{r}} l_r dS - \int_V \frac{\partial [\Phi]^T}{\partial \bar{r}}\frac{\partial c}{\partial \bar{r}} dV \ , \tag{17}$$

уравнения (11)-(16) преобразуются к виду:

*уравнения движения*

$$\begin{aligned}
&\int_V[\Phi]^T\Bigg(f\frac{\partial f}{\partial\bar r}+\frac{NG}{\tilde R}\frac{\partial f}{\partial j}-H\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial f}{\partial\bar z}\Bigg)\Bigg)dV+\frac{1}{e}\int_V\Bigg(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar r}+\\
&+\bar R\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar z}+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial G}{\partial j}\Bigg)dV+\frac{1}{e}\int_V[\Phi]^T\Bigg(\frac{(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial H}{\partial\bar r}+\frac{f}{\bar r^2}-\frac{1}{\bar r}\frac{\partial f}{\partial\bar r}\Bigg)dV+\\
&+\frac{\tilde R}{\mathrm{Re}}\int_V\Bigg\{\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial f}{\partial\bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial f}{\partial j}+\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\Bigg)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\frac{2\bar r\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial f}{\partial\bar z}+\\
&+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial f}{\partial\bar z}\Bigg\}dV-\frac{\tilde R}{\mathrm{Re}}\int_V[\Phi]^T\Bigg(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial f}{\partial\bar r}+\bar r\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial f}{\partial\bar r}+\frac{2N}{\bar r}\frac{\partial G}{\partial j}+\frac{f}{\bar r^2}\Bigg)dV+
\end{aligned}$$

(18)

$$+\frac{1}{2}\int_V[\Phi]^T\Bigg(\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial H}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial H}{\partial\bar z}\Bigg)+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial G}{\partial j}+\frac{f}{\bar r}\Bigg)f\,dV-\frac{N^2}{\tilde R^2}\int_V[\Phi]^T\bar r G^2dV=0,$$

$$\begin{aligned}
&\int_V[\Phi]^T\Bigg(f\frac{\partial G}{\partial\bar r}+\frac{NG}{\tilde R}\frac{\partial G}{\partial j}-H\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial G}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial G}{\partial\bar z}\Bigg)\bar r+2fG\Bigg)\bar r\,dV-\frac{1}{Ne}\int_V\frac{[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial f}{\partial j}dV+\\
&+\frac{1}{Ne}\int_V\Bigg(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial H}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial H}{\partial\bar z}\Bigg)+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial G}{\partial j}\Bigg)dV+\\
&+\frac{\tilde R\bar r^2}{\mathrm{Re}}\int_V\Bigg\{\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial G}{\partial\bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial G}{\partial j}+\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\Bigg)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial G}{\partial\bar r}-\frac{2\bar r\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial G}{\partial\bar z}+\\
&+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial G}{\partial\bar z}\Bigg\}dV-\frac{\tilde R\bar r^2}{\mathrm{Re}}\int_V[\Phi]^T\Bigg(\frac{3}{\bar r}\frac{\partial G}{\partial\bar r}+\bar r\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial G}{\partial\bar r}+\frac{2}{\bar r^3N}\frac{\partial G}{\partial j}\Bigg)dV+\\
&+\frac{1}{2}\int_V[\Phi]^T\Bigg(\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial H}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial H}{\partial\bar z}\Bigg)+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial G}{\partial j}+\frac{f}{\bar r}\Bigg)G\,dV=0,
\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
&\int_V[\Phi]^T\Bigg(f\frac{\partial H}{\partial\bar r}+\frac{NG}{\tilde R}\frac{\partial H}{\partial j}-H\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial H}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial H}{\partial\bar z}\Bigg)\Bigg)dV+\frac{1}{e}\int_V[\Phi]^T\Bigg(\frac{(z_*-\bar a)[\Phi]^T}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial H}{\partial\bar r}+\frac{f}{\bar r^2}-\frac{1}{\bar r}\frac{\partial f}{\partial\bar r}\Bigg)dV+\\
&+\frac{1}{e}\int_V\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\Bigg(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar z}\Bigg)+\\
&+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial G}{\partial j}\Bigg)-\bar R\Bigg(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\Bigg(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial H}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial H}{\partial\bar z}\Bigg)+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial G}{\partial j}\Bigg)\Bigg)dV-
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{e}\int_V \frac{[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial f}{\partial \bar z}dV+\frac{\tilde R}{\mathrm{Re}}\int_V\left\{\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial \bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial H}{\partial j}+\left(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar r}+\frac{2\bar r\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar z}+\right.$$

$$\left.+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial H}{\partial\bar z}\right\}dV-\frac{\tilde R}{\mathrm{Re}}\int_V[\Phi]^T\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar r}+\bar r\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial H}{\partial\bar r}\right)dV+$$

$$+\frac12\int_V[\Phi]^T\left(\frac{\partial f}{\partial\bar r}-\left(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial H}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial H}{\partial\bar z}\right)+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial G}{\partial j}+\frac{f}{\bar r}\right)HdV=0,$$

(20)

*уравнение энергии*

$$\int_V[\Phi]^T\left(f\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar r}+\frac{NG}{\tilde R}\frac{\partial t_{ж}}{\partial j}-H\left(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar z}\right)\right)dV+\frac{\tilde R}{Pe}\int_V\left\{\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar r}-\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial t_{ж}}{\partial j}-\frac{2\bar r\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar z}+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar z}\right\}dV-\qquad(21)$$

$$-\frac{\tilde R}{Pe}\int_V[\Phi]^T\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar r}+\bar r\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_{ж}}{\partial\bar r}\right)dV=0,$$

*уравнение теплопроводности стенок канала*

$$\int_V\left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\tilde r}\frac{\partial t_c}{\partial\tilde r}-\frac{[\Phi]^T}{\tilde r}\frac{\partial t_c}{\partial\tilde r}+\frac{1}{\tilde r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial t_c}{\partial j}-[\Phi]^T(\tilde r+1)\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_c}{\partial\tilde r}+\right.\qquad(22)$$

$$\left.+\left(\frac{(\tilde r+1)(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\tilde r}\frac{\partial t_c}{\partial\tilde r}-\frac{2(\tilde r+1)\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\tilde r}\frac{\partial t_c}{\partial\bar z}+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial t_c}{\partial\bar z}\right)dV=0,$$

*Уравнение теплопроводности ребра*

$$\int_V\left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial t_p}{\partial\bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial t_p}{\partial j}+\left(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial t_p}{\partial\bar r}-\frac{2\bar r\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial t_p}{\partial\bar z}+\right.$$

$$\left.+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial t_p}{\partial\bar r}\right)dV-\int_V[\Phi]^T\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial t_p}{\partial\bar r}+\bar r\frac{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}\left((z_*-\bar a)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-(z_*-\bar a)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial t_p}{\partial\bar r}\right)dV++\frac{2\bar a}{l\,d}\int_V[\Phi]^T\left(t_p-t_{ж}\right)dV=0.$$

(23)

Заменим искомые функции в уравнениях (18)-(23) их пробными аппроксимациями, и, вычислив интегралы по области элементов с помощью квадратурной формулы Гаусса, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций в узлах элемента:

*уравнения движения*

$$\int_V [\Phi]^T[\Phi]\left(\{u\}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{N\{J\}}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}-\{w\}\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\right)\{u\}dV+\frac{1}{e}\int_V\left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\right.$$

$$+[\Phi]^T\left(\frac{\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{w\}+$$

$$\left.+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{J\}-\frac{[\Phi]}{\bar r^2}\{u\}+\frac{1}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\{u\}\right)dV+$$

$$+\frac{\tilde R}{\mathrm{Re}}\int_V\left\{\left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\frac{[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}-\bar r[\Phi]^T\frac{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}\left(\left(z_*-\bar a\right)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-\left(z_*-\bar a\right)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\right.\right.$$

$$+2[\Phi]^T\bar r\left(\frac{\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\frac{2[\Phi]^T\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}+\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-$$

$$\left.\left.-\frac{2\bar r\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{u\}+\frac{2N[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{J\}+\frac{[\Phi]^T[\Phi]}{\bar r^2}\{u\}\right\}dV+\qquad(24)$$

$$+\frac{1}{2}\int_V[\Phi]^T[\Phi]\left(\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\{u\}-\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{w\}+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{J\}+\frac{[\Phi]\{u\}}{\bar r}\right)\{u\}dV=$$

$$=\frac{N^2}{\tilde R^2}\int_V[\Phi]^T[\Phi]\bar r[\Phi]\{J\}dV,$$

$$\int_V[\Phi]^T[\Phi]\left(\{u\}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{N\{J\}}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}-\{w\}\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\bar r\{J\}+2\{u\}[\Phi]\{J\}\right)\bar r dV+$$

$$+\frac{1}{Ne}\int_V\left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\{u\}-\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{w\}+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{J\}-\frac{[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{u\}\right)dV+$$

$$+\frac{\tilde R\bar r^2}{\mathrm{Re}}\int_V\left\{\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\frac{3[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}-\bar r[\Phi]^T\frac{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}\left(\left(z_*-\bar a\right)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-\left(z_*-\bar a\right)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\right.$$

$$+2[\Phi]^T\bar r\left(\frac{\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\frac{2[\Phi]^T\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}+$$

$$\left.+\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\frac{2\bar r\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}-\frac{2[\Phi]^T}{\bar r^3N}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\right\}\{J\}dV+$$

$$+\frac{1}{2}\int_V[\Phi]^T[\Phi]\left(\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\{u\}-\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{w\}+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{J\}+\frac{[\Phi]\{u\}}{\bar r}\right)\{J\}dV=0,$$

(25)

$$\int_V [\Phi]^T[\Phi]\left(\{u\}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{N\{J\}}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}-\{w\}\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\right)\{w\}dV+$$

$$+\frac{1}{e}\int_V\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\{u\}-\left(\frac{\left(z_*-\bar a\right)[\Phi]^T}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{w\}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{J\}-\frac{[\Phi]^T[\Phi]\{u\}}{\bar r^2}+\frac{[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\{u\}\right)-\bar R\left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\{u\}-\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{w\}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{J\}+\frac{[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\{u\}\right)\right)dV+\frac{\tilde R}{\mathrm{Re}}\int_V\left\{\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{[\Phi]^T}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}-\right.$$

(26)

$$-\bar r[\Phi]^T\frac{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}\left(\left(z_*-\bar a\right)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-\left(z_*-\bar a\right)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+2[\Phi]^T\,\bar r\left(\frac{\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-$$

$$\left.-\frac{2[\Phi]^T\,\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}+\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar r}-\frac{2\bar r\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial H}{\partial\bar z}+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial H}{\partial\bar z}\right\}dV+$$

$$+\frac{1}{2}\int_V[\Phi]^T[\Phi]\left(\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\{u\}-\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{w\}+\frac{N}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}\{J\}+\frac{[\Phi]\{u\}}{\bar r}\right)\{w\}dV=0,$$

*уравнение энергии*

$$\int_V[\Phi]^T[\Phi]\left(\{u\}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\frac{N\{J\}}{\tilde R}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}-\{w\}\left(\frac{\bar r\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\bar R\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\right)\{t_{ж}\}dV+\frac{\tilde R}{Pe}\int_V\left\{\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}+\left(\frac{\bar r(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\frac{2\bar r\bar R(z_*-\bar a)}{\sqrt{1-(z_*-\bar a)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right\}\right)\{t_{ж}\}dV-$$

$$-\int_V[\Phi]^T\left(\frac{1}{\bar r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}+2\bar r\left(\frac{\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}-\frac{2\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}+\bar r\frac{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}\left(\left(z_*-\bar a\right)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-\left(z_*-\bar a\right)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar r}\right)\{t_{ж}\}dV=0,$$

(27)

*уравнение теплопроводности стенок канала*

$$\int_V\left(\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\tilde r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\tilde r}+\frac{1}{(\tilde r+1)^2}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j}\frac{\partial[\Phi]}{\partial j}+\left(\frac{(\tilde r+1)\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\tilde r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\tilde r}-\frac{2(\tilde r+1)\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\tilde r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}+\right.$$

$$\left.+\bar R^2\frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar z}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}\right)\{t_c\}dV-\int_V[\Phi]^T\left(\frac{1}{\tilde r}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\tilde r}+(\tilde r+1)\frac{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}\left(\left(z_*-\bar a\right)^2+1\right)-\bar b}{\left(1-\left(z_*-\bar a\right)^2\right)^{3/2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\tilde r}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\bar R\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar z}-2(\tilde r+1)\left(\frac{\left(z_*-\bar a\right)}{\sqrt{1-\left(z_*-\bar a\right)^2}}\right)^2\frac{\partial[\Phi]}{\partial\tilde r}\right)\{t_c\}=0,$$

(28)

*Уравнение теплопроводности ребра*

$$\int_V \left( \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial j} \frac{\partial[\Phi]}{\partial j} + \left( \frac{\bar{r}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \right)^2 \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} - \frac{2\bar{r}\bar{R}(z_* - \bar{a})}{\sqrt{1-(z_* - \bar{a})^2}} \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{z}} + \right. \tag{29}$$

$$\left. + \bar{R}^2 \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} \right) \left\{ t_p \right\} dV - \int_V [\Phi]^T \left( \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} + 2\bar{r} \left( \frac{\left(z_* - \bar{a}\right)}{\sqrt{1-\left(z_* - \bar{a}\right)^2}} \right)^2 \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} - \frac{2\bar{R}\left(z_* - \bar{a}\right)}{\sqrt{1-\left(z_* - \bar{a}\right)^2}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{z}} + \right.$$

$$\left. + \bar{r} \frac{\sqrt{1-\left(z_* - \bar{a}\right)^2}\left(\left(z_* - \bar{a}\right)^2 + 1\right) - \bar{b}}{\left(1-\left(z_* - \bar{a}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{\partial[\Phi]}{\partial\bar{r}} \right) \left\{ t_p \right\} dV + \frac{2\bar{a}}{ld} \int_V [\Phi]^T [\Phi] \left( \left\{ t_p \right\} - \left\{ t_{ж} \right\} \right) dV = 0.$$

Полученная система алгебраических уравнений является нелинейной. Для линеаризации этой системы предполагается использовать метод Ньютона, а для решения систем линейных уравнений, возникающих на каждом шаге метода Ньютона, – метод сопряженных градиентов. Предложенный алгоритм позволит определить параметры давления, компоненты скоростей и температур в стенках, ребре и проточной части каналов в зависимости от чисел закрутки, критериев Рейнольдса и Пекле.

**Заключение**

Разработана полная математическая модель задачи сопряженного теплообмена во вращающемся с постоянной скоростью оребренном криволинейном канале типа «конфузор-диффузор».

Численная реализация полученной математической модели позволит определить поле скоростей, давлений и температур в проточной части каналов конфузорно-диффузорного типа, оценить характер распространения тепла путем теплопроводности в ребрах и стенке, уточнить методику теплового расчета оребренных поверхностей в аппаратах типа «труба в трубе» с учетом трехмерной модели распространения тепла в ребре, построенной на уравнении Пуассона.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Золотоносов А.Я. Конструкции теплообменных аппаратов типа «труба в трубе» с вращающейся поверхностью теплообмена «конфузор-диффузор» // Сборник научных трудов КазГАСУ. – Казань, 2009. – С. 19-23.
2. Золотоносов А.Я., Золотоносов Я.Д., Белавина Т.В. Математическая модель теплопроводности в длинном ребре переменной высоты с учетом изменения условий теплообмена // Известия КазГАСУ, 2009, № 2 (12). – С. 190-196.
3. Антонов С.Ю., Антонова А.В., Золотоносов Я.Д. Математическая модель конфигурации эллиптических пружинно-витых каналов теплообменных устройств // Известия КазГАСУ, 2009, № 2 (12). – С. 173-178.
4. Пантелеева Л.Р. Теплообмен при ламинарном течении вязкой жидкости в теплообменных устройствах типа «труба в трубе» с вращающейся поверхностью «конфузор-диффузор» // Дис. … канд. техн. наук. – Казань, 2005. – 116 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М: Наука, 1987. – 840 с.
6. Золотоносов А.Я., Золотоносов Я.Д. Сопряженная задача теплообмена при ламинарном течении вязкой жидкости во вращающемся осесимметричном криволинейном канале типа «конфузор-диффузор» // Сборник научных трудов КазГАСУ. – Казань, 2009. – С. 8-12.
7. Роже Пейре, Томас Д. Тейлор. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. – Л.: Гидрометеоиздат, 1986. – 352 с.
8. Белавина Т.В. Теплообмен при ламинарном течении жидкости в роторе центробежного пароструйного подогревателя // Дис… канд. техн. наук. – Казань, 2009. – 141 с.
9. Багоутдинова А.Г. Модернизация узла подготовки горячей воды на базе вращающегося малоинерционного теплообменного аппарата в технологии приготовления суспензии стеарата кальция. – Казань, 2007. – 133 с.