

УДК 541.183

**Р.Г. Сафиуллин** – кандидат технических наук, доцент

E-mail: [safiullin\\_rinat@mail.ru](mailto:safiullin_rinat@mail.ru)

**Казанский государственный архитектурно-строительный университет**

**К РАСЧЕТУ УВЛАЖНИТЕЛЕЙ ВОЗДУХА  
НА ОСНОВЕ ДИСКОВЫХ РАСПЫЛИТЕЛЕЙ С ЗУБЧАТОЙ ПЕРИФЕРИЕЙ.  
ЧАСТЬ 1. МОДЕЛЬ КАПЛЕОБРАЗОВАНИЯ**

**АННОТАЦИЯ**

Рассматривается математическая модель формирования и отрыва капли с каплеобразующих элементов в поле центробежной силы в условиях медленного (квазистатического) подвода жидкости. Результаты численного расчета отрывных объемов капель могут быть использованы при определении дисперсности распыла зубчатых дисков, являющихся основным элементом местных и центральных аппаратов для увлажнения воздуха.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** вращающийся каплеобразующий элемент, модель каплеобразования, отрывные объемы капель.

**R.G. Safiullin** – candidate of technical sciences, associate professor

**Kazan State University of Architecture and Engineering**

**TO ACCOUNT OF AIR HUMIDIFIERS BASED  
ON DISK ATOMIZERS WITH TEETH PERIPHERY.  
PART 1. MODEL OF DROP FORMATION AND DETACHMENT**

**ABSTRACT**

A mathematical model of the drop formation and detachment from wetted forming elements in the field of centrifugal force in a slow (quasistatic) supply of liquid is considered. The results of numerical calculation of separated drop's volumes can be used in determining the dispersion of disk atomizers with teeth periphery, which are the main elements of the local and central apparatus for humidifying the air.

**KEYWORDS:** rotary forming element, drop formation model, separated drop volume.

При диспергировании воды с помощью вращающихся дисковых распылителей с зубчатой периферией удается получать капли практически одного размера, что показывают результаты исследований характеристик распыла у подобных устройств [1, 2]. Формирование и отрыв капель с зубцов, которые могут иметь коническую, цилиндрическую, а также сферическую форму, происходит в «капельном режиме», почти без образования более мелких сателлитов. Так, по данным [1], их суммарный объем составлял лишь ~1ч1.5 % от объема распыленной жидкости, в то время как при распыливании другими типами устройств содержание капель-спутников достигает по объему 30 % и более.

Несмотря на указанные достоинства, дисковые распылители с зубчатой периферией пока не получили широкого применения как в распылительной технике в целом, так и в увлажнительных аппаратах систем вентиляции и кондиционирования воздуха. На сегодняшний день ощущается недостаточность информации о закономерностях работы зубчатых дисков, в особенности – о характеристиках «капельного» режима диспергирования. Остаются малоизученными условия для устойчивой реализации монодисперсного распыления, отсутствуют данные о зависимости размеров капель от геометрии зубцов, диаметра и скорости вращения распылителя.

Определить размеры капель в распыле зубчатых дисков позволяет расчет профилей капель, формирующихся на поверхности зубцов. Такой профиль может быть получен из решения дифференциального уравнения гидростатического равновесия капли (уравнение Юнга-Лапласа) в поле центробежной силы, справедливого при условии квазистатического (очень медленного) подвода жидкости к поверхности каплеобразующего элемента (зубца). Известные результаты численных расчетов равновесных профилей, полученные для случая формирования капель на кромке вращающегося капилляра, приведены в работах [3-5]. Однако модель роста и отрыва капель со

смачиваемой поверхности вращающихся каплеобразующих элементов в виде конуса, цилиндра или сферы пока еще не рассматривалась.

Для построения модели каплеобразования на зубьях дисковых распылителей используем следующие допущения:

- деформация капель под воздействием аэродинамического сопротивления не учитывается, решается осесимметричная задача;
- сила тяжести пренебрежимо мала по сравнению с центробежной силой;
- при полном смачивании обеспечивается медленный (квазистатический) подвод жидкости к поверхности каплеобразующего элемента.

Расчетные схемы капель на смоченных поверхностях вращающихся каплеобразующих элементов, расположенных на периферии зубчатых дисков, представлены на рис. 1. Получим основное дифференциальное уравнение гидростатического равновесия для рассматриваемых схем.

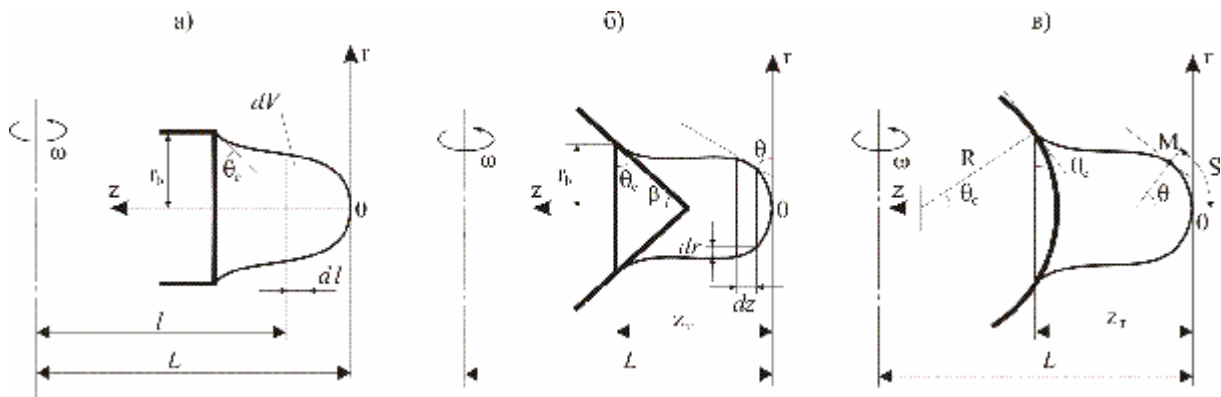


Рис. 1. Расчетные схемы капель на вращающихся каплеобразующих элементах цилиндрической (а), конической (б) и сферической (в) форм

Центробежная сила  $dF$ , действующая на элементарный объем жидкости  $dV = \pi r^2 dl$ , удаленный на расстояние  $z = l$  от оси вращения, создает давление  $dp$  на поперечную площадку  $f = \pi r^2$  (см. рис. 1 а, б)

$$dp = \frac{dF}{f} = \frac{\rho l \omega^2 \pi r^2 dl}{\pi r^2} = \rho \omega^2 l dl. \quad (1)$$

После интегрирования уравнения (1) с учетом граничного условия ( $z=0, p=p(0)$ ) получим выражение для распределения давления во вращающейся капле

$$p(z) = p(0) - \frac{\rho \omega^2}{2} [L^2 - (L - z)^2], \quad (2)$$

где  $p(0)$  – давление в вершине капли ( $r=0, z=0$ ).

Согласно уравнению Лапласа, давление, оказываемое со стороны газовой фазы на произвольную точку  $M$  поверхности жидкой капли на расстоянии  $z = L$  от оси вращения диска (рис. 1 в), пропорционально средней кривизне поверхности раздела на границе с газовой фазой:

$$p(z) = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – главные радиусы кривизны поверхности капли в точке  $M$ ,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Для точки в вершине капли, где главные радиусы одинаковы, имеем

$$p(0) = \frac{2\sigma}{B}, \quad (3)$$

$B$  – радиус кривизны в вершине капли.

Тогда уравнение равновесия капли, сформированной на вращающейся поверхности каплеобразующего элемента, примет вид:

$$\sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma}{B} - \frac{\rho\omega^2}{2} [L^2 - (L-z)^2]. \quad (4)$$

Из (4) видно, что распределение давления во вращающейся капле носит нелинейный характер. Поскольку радиусы кривизны поверхности определяются формулами

$$R_1 = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2z}{dr^2}}; \quad R_2 = \frac{r \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{1/2}}{\frac{dz}{dr}}, \quad (5)$$

то уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{\frac{d^2z}{dr^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\frac{dz}{dr}}{r \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right]^{1/2}} = \frac{2}{B} - \frac{\rho\omega^2}{2\sigma} [L^2 - (L-z)^2]. \quad (6)$$

Интегрирование (6) дает форму равновесной межфазовой поверхности газожидкостной системы в поле центробежной силы.

Для удобства интегрирования главные радиусы кривизны представим через тригонометрические функции угла  $\theta$  между осью  $z$  и нормалью к границе раздела в произвольной точке  $M$  (рис. 1 в)

$$R_1 = \frac{dr}{d \sin \theta} = \frac{ds}{d\theta}; \quad R_2 = \frac{r}{\sin \theta}, \quad (7)$$

где  $s$  – длина дуги контура капли, измеряемая от ее вершины.

Тогда условие равновесия капли на каплеобразующем элементе запишется в виде

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{\sin \theta}{r} = \frac{2}{B} - \frac{\rho\omega^2}{2\sigma} [L^2 - (L-z)^2]. \quad (8)$$

Совместно с очевидными геометрическими соотношениями

$$\frac{dr}{ds} = \cos \theta \quad \text{и} \quad \frac{dz}{ds} = \sin \theta \quad (9)$$

уравнение (8) описывает осесимметричный профиль межфазовой поверхности "жидкость-газ" и может быть решено численно с использованием следующих граничных условий

$$r = s = V = q = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \quad (10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } r = r_b = R \\ \text{б) } q = q_c = 90^\circ - b \\ \text{в) } r_b / \sin q_c = R \end{array} \right\} \quad \text{при} \quad z = z_T; \quad (11)$$

где  $z_T$  – «высота» капель в месте контакта с каплеобразующим элементом;  $r_b$  – ширина основания капли;  $q_c$  – угол контакта капли со смоченной поверхностью элемента;  $V$  – объем капли в пределах  $z$  и  $z=0$ .

Уравнение (8) приводится к безразмерному виду путем деления всех линейных величин на параметр  $c = \sqrt[3]{2s/r\omega^2}$ , имеющий размерность длины

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{2}{\bar{B}} - \frac{\sin\theta}{\bar{r}} - [ \bar{L}^2 - (\bar{L} - \bar{z})^2 ] . \quad (12)$$

Уравнение (12) совместно с (9) и (11) было решено численно с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка. При варьировании значений  $\bar{B}$  определялись координаты профиля капле ( $r, z, q$ ). Поскольку в вершине капли (точка на оси симметрии с координатами  $\bar{r}=0$  и  $\bar{z}=0$ ) имеется особенность, приводящая к неопределенности, решение в окрестности начальной точки разлагалось в степенные ряды по длине дуги  $\bar{s}$ .

Типичный вид кривых, получаемых в результате численного решения уравнения (12) при различных значениях радиуса кривизны в вершине капли  $\bar{B}$ , представлены на рис. 2. За исключением начальных участков, рассчитанные профили имеют такую форму, которая физически не реализуема как устойчивая форма поверхности раздела фаз (рис. 3). За критерий устойчивости физических каплей было принято утверждение Питтца [6], что реальная устойчивая висющая капля может иметь лишь одну точку перегиба на меридианальной кривой (в этой точке  $dq/ds = 0$ ).

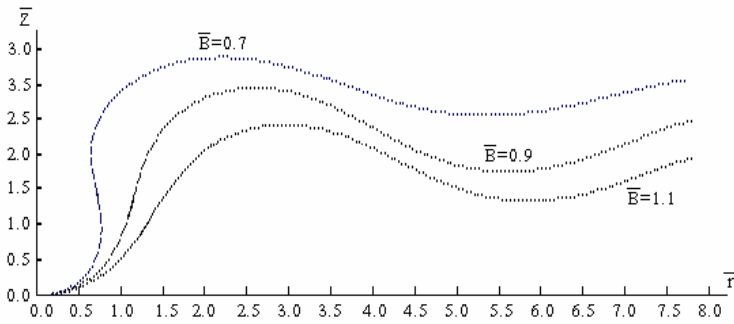


Рис. 2. Профили межфазовой поверхности, полученные при интегрировании уравнения (12)

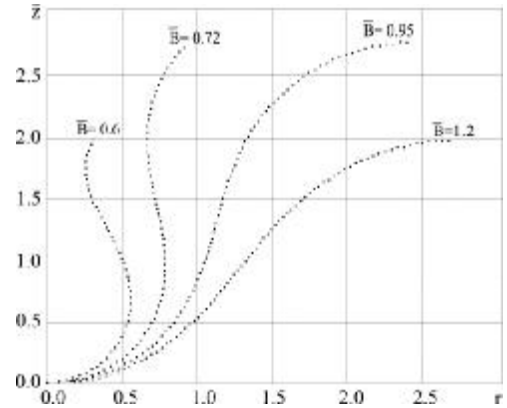


Рис. 3. Расчетные профили устойчивых висящих каплей

Объемы устойчивых каплей, ограниченные расчетными профилями, определялись из выражения

$$\frac{d\bar{V}}{ds} = \pi \bar{r}^2 \sin\theta, \text{ где } \bar{V} = V/c^3 . \quad (13)$$

Необходимо отметить, что объем самой капли не соответствует объему, ограниченному профилем и контактной линией на поверхности каплеобразующего элемента, имеющего форму конуса или сферы. Так, объем капли на конусе определялся из выражения

$$\bar{V}_k = \bar{V}_T - \bar{V}_{кон} , \quad (14)$$

где  $\bar{V}_T$  – общий объем, ограниченный профилем капли с шириной основания  $2\bar{r}_b$  и углом контакта  $q_c = 90^\circ - b$ ;  $\bar{V}_{кон}$  – объем конуса в границах профиля капли

$$\bar{V}_{кон} = \pi \bar{r}_b^3 / 3 \tan\beta . \quad (15)$$

Объем капли, формирующейся на сферическом элементе, определялся из выражения:

$$\bar{V}_k = \bar{V}_T - \bar{V}_{сф} , \quad (16)$$

где  $\bar{V}_T$  – общий объем, ограниченный профилем капли, имеющим контактный угол  $q_c$  и ширину основания  $\bar{r}_b = \bar{R} \sin q_c$ ;  $\bar{V}_{сф}$  – объем сферического сегмента с основанием  $\bar{r}_b = \bar{R} \sin q_c$  и высотой  $\bar{h} = \bar{R} - \bar{R} \cos q_c$ ,

$$\bar{V}_{-TM} = \pi \bar{h}^2 (3\bar{R} - \bar{h}) / 3 . \quad (17)$$

Расчитанные значения максимальных объемов устойчивых капель  $\bar{V}_T$  и  $\bar{V}_K$  на вращающихся каплеобразователях цилиндрической, конической и сферической форм поверхности для различных  $\bar{L}$  представлены на рис. 4. При построении кривых принималось, что длина капель  $\bar{z}_T$  много меньше радиуса вращения  $\bar{L}$ . Параметр  $\bar{B}$  при расчетах варьировался от 0.05 до 0.3 с шагом 0.002 при значениях  $\bar{L} = 10, 20, 30$  и 40. На рис. 5 показаны значения параметров  $\bar{B}$ , при которых были получены максимальные объемы устойчивых капель.

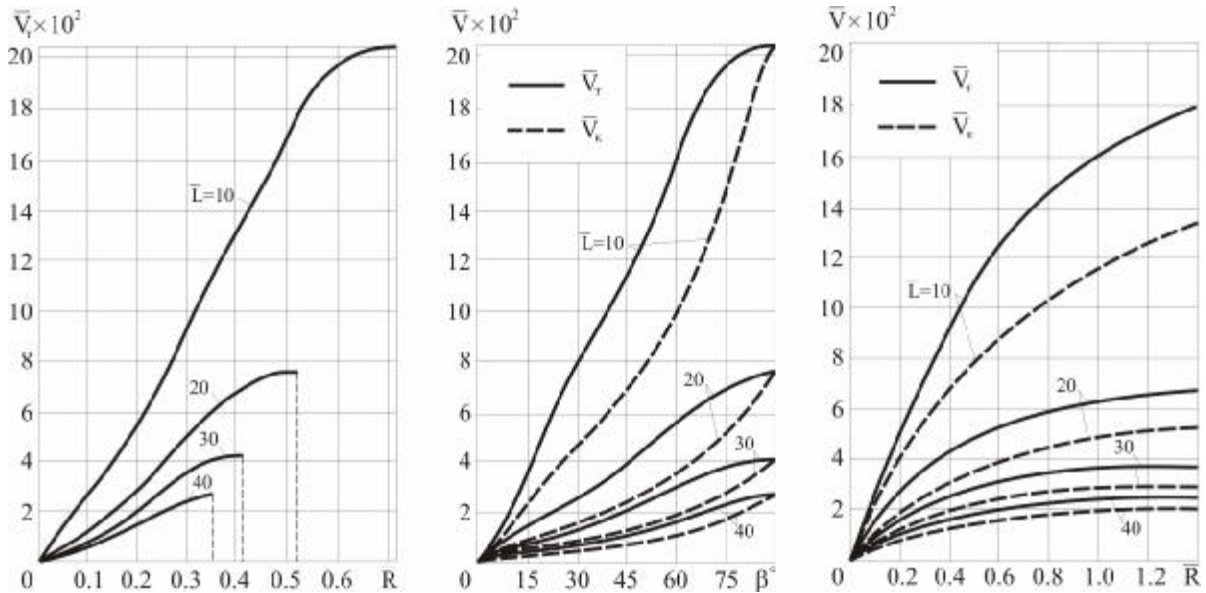


Рис. 4. Максимальные объемы устойчивых капель на вращающихся каплеобразователях: цилиндре (а), конусе (б) и сфере (в)

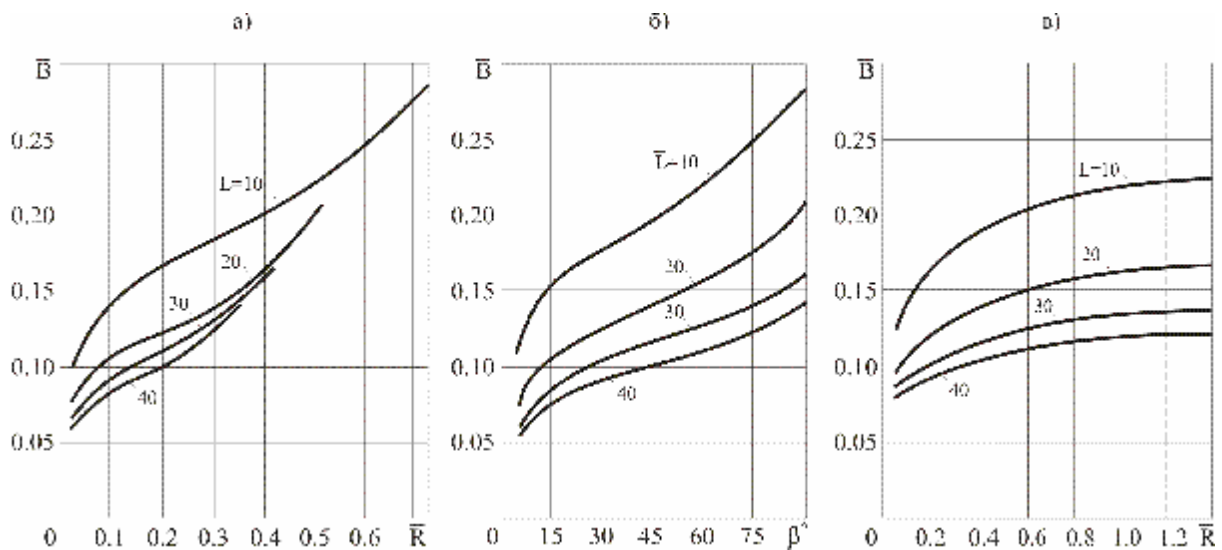


Рис. 5. Значения параметра  $\bar{B}$ , при которых получены максимальные объемы устойчивых капель на цилиндре (а), конусе (б) и сфере (в)

В первом приближении полученные объемы можно использовать для определения размеров капель, образующихся при отрыве от смачиваемой поверхности вращающихся каплеобразователей при нарушении гидростатического равновесия. В этом случае максимальный объем висящей капли необходимо заменить на объем эквивалентной ему сферы (оторвавшейся капли) диаметром  $d_k$  из условия  $V_k = \frac{\pi}{6} d_k^3$ .

Однако, действительные объемы оторвавшихся капель всегда меньше предотрывных объемов. В фазе отрыва капля разделяется на «основную» каплю и остаточный мениск жидкости. Из перешейка между ними образуются одна или несколько более мелких капель-сателлитов, сопровождающих отделившуюся «основную» каплю. В этой фазе на отрыв оказывают влияние и особенности геометрии каплеобразующих элементов. Наличие части конусной или сферической поверхности внутри отделяющейся капли может вносить дополнительные возмущения при быстром изменении ее формы. При решении задач по распыливанию с помощью зубчатых дисков важно определить отрывные размеры капель, что подразумевает необходимость дополнительного исследования неустойчивой стадии каплеобразования – стадии отрыва.

Предварительно же оценить размеры будущей отрывающейся капли можно из предположения, что потеря устойчивости и последующий разрыв капли происходят по плоскости  $\bar{z} = \bar{z}^0$  («плоскости отрыва»), где равны между собой сила поверхностного натяжения и сила тяжести висящей капли [7].

Для определения положения «плоскости отрыва»  $\bar{z} = \bar{z}^0$  и отрывных объемов  $\bar{V}_k^0$  запишем уравнение баланса сил (в проекциях на ось  $z$ ), действующих на вращающуюся каплю. Это уравнение получается при непосредственном интегрировании (12)

$$2\bar{\pi}\bar{r} \sin \theta = \bar{V}\bar{L}_c + \bar{\pi}\bar{r}^2 \left\{ \frac{2}{\bar{B}} - [ \bar{L}^2 - (\bar{L} - \bar{z})^2 ] \right\}, \quad (18)$$

где  $2\bar{\pi}\bar{r} \sin \theta$  – проекция силы поверхностного натяжения;  $\bar{V} \cdot \bar{L}_c$  – безразмерная центробежная сила, приложенная к центру массы капли;  $\bar{\pi}\bar{r}^2 \left\{ \frac{2}{\bar{B}} - [ \bar{L}^2 - (\bar{L} - \bar{z})^2 ] \right\}$  – сила избыточного (Лапласовского) давления внутри вращающейся капли, обусловленная искривленностью ее поверхности.

Совместное численное решение уравнений (18) и (9)ч(11) позволяет определить координату, где давление Лапласа равно нулю и, соответственно, проходит «плоскость отрыва» капли (рис. 6). Часть жидкости ниже этой плоскости отделяется в виде «основной» капли (имеющей отрывной объем), а верхняя «остаточная» часть жидкого мениска служит основой образования и роста следующей капли.

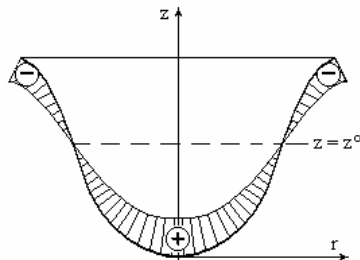


Рис. 6. Эпюра давлений в капле предотрывного объема

Рассчитанные значения отрывных объемов для капель, отделяющихся от каплеобразователей рассмотренных геометрий, показаны на рис. 7.

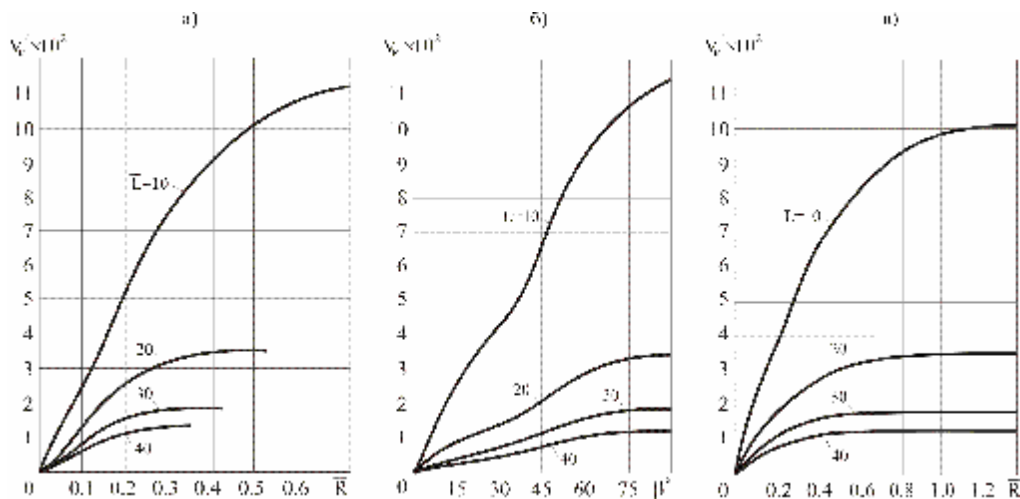


Рис. 7. Объемы «основных» капель, отделяющихся от вращающихся смачиваемых каплеобразующих элементов в форме цилиндра (а), конуса (б) и сферы (в)

Из рис. 7 видно, что отрывные объемы капель на конусах с углом  $\beta \leq 40^\circ$  мало отличаются от максимальных объемов в фазе равновесия. Это означает, что размеры перешейка при отрыве капель с таких конусов очень малы. Так как перешеек является основным источником образования мелких капель-спутников, то для монодисперсного распыливания с помощью дисков предпочтительным является использование на их периферии конусных элементов с малым углом раствора. В каплях, формирующихся на таком конусе, плоскость нулевого давления пересекает его поверхность, и, соответственно, разрыв жидкости происходит не в газовой фазе, а на каплеобразующем элементе, что не приводит к появлению капель-спутников.

Расчетные кривые для отрывных объемов капель аппроксимируются зависимостями:

$$- \text{ для конических элементов } - \bar{V}_k^o = b^o / (0,00282 b \bar{L}^{2,68} + 130,5 \bar{L} - 688,8); \quad (19)$$

$$- \text{ для сферических элементов } - \bar{V}_k^o = \bar{R} / (0,132 \bar{R} \bar{L}^{1,685} + 0,33 \bar{L} + 0,5). \quad (20)$$

Полученные зависимости могут быть использованы при расчете размеров капель, образующихся при распыливании зубчатыми дисками в увлажнительных аппаратах систем вентиляции и кондиционирования воздуха.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дунский В.Ф., Никитин Н.В. Капание жидкости с острия // ПМТФ, 1980, № 1. – С. 49-55.
2. Никитин Н.В., Богданова А.В. Монодисперсные опрыскиватели для вегетационных и полевых опытов // Сб.: Аэрозоли в защите растений / Всесоюз. акад. с.-х. наук. – М.: Колос, 1982. – С.158-166.
3. Boucher E.A. Centrifugation of Porous Solids and Compacts Containing Imbibed or capillary-Condensed Fluid // J. Colloid Interface Sci., Vol. 120, No. 1, 1987. – P. 289-291.
4. Boucher E.A. Phenomenological and Thermodynamic Quantities for the Centrifugation of a Model Capillary Tube with Liquid Drop Attached, and Some Implications for Porous Solids and Compacts // J. Colloid Interface Sci., Vol. 129, No. 2, 1989. – P. 414-427.
5. Boadi D.K., Marmur A. Drop Formation and Detachment from Rotating Capillaries // J. Colloid Interface Sci., Vol. 140, No.2, 1990. – P. 507-516.
6. Baby S.R. Analysis of Drop Formation at Conical Tips. 1. Theory // Journ. Coll. Int. Sci., 1987, Vol. 116, № 2. – P. 350-358.
7. Сафиуллин Р.Г., Колесник А.А., Посохин В.Н., Николаев Н.А. Определение размеров капель, отделяющихся от смачиваемых поверхностей // Изв. вузов. Химия и химическая технол., 1998, т. 41, вып. 3. – С. 72-77.