



УДК 532.5

К.В. Кириллин – младший научный сотрудник

НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева, Казанский государственный университет (КГУ)

С.И. Филиппов – доктор физико-математических наук, профессор

Казанский государственный архитектурно-строительный университет (КазГАСУ)

ОБТЕКАНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ НАД ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЕСОМЫХ ЖИДКОСТЕЙ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

АННОТАЦИЯ

Исследуется обтекание крылового профиля над линией раздела двухслойной весомой жидкости при конечной глубине слоев. Представлены результаты расчетов гидродинамических характеристик профиля NACA 66mod в зависимости от числа Фруда. Проведено сравнение со случаем обтекания профиля потоком с полубезграничным нижним слоем.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Крыловой профиль, двухслойная жидкость, гравитационные волны, ограниченный поток.

K.V. Kirillin – junior research assistant

N.G. Chebotarev Research Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan State University (KSU)

S.I. Filippov – doctor of physical-mathematical sciences, professor

Kazan State University of Architecture and Engineering (KSUAE)

FLOW-AROUND OF WING SECTION OVER INTERFACE OF TWO FLUID LIQUIDS UNDER GRAVITY OF FINAL DEPTH

ABSTRACT

In this paper, we examine a flow-around of wing section over the interface of double-layer fluid liquids under gravity of final depth. We present some results of calculation of NACA 66mod section hydrodynamic characteristics subject to Froude number. We conduct the comparison with the case of flow-around of section by stream with semi-infinite bottom layer.

KEYWORDS: Wing section, double-layer liquid, gravity waves, bounded flow.

Рассмотрим поток идеальной несжимаемой жидкости, ограниченный сверху твердой крышкой M_1 , а снизу твердым дном M_3 , и состоящий из слоя толщины H_1 плотности ρ_1 и слоя толщины H_2 плотности ρ_2 . Жидкость находится под действием силы тяжести, ускорение которой равняется g . Крыловой профиль C с длиной хорды L расположен в верхнем слое жидкости (рис. 1).

В системе координат, начало которой совпадает с серединой хорды профиля, ось Ox параллельна невозмущенной границе раздела сред M_2 и направлена навстречу потоку, а ось Oy направлена вертикально вверх, течение плоскопараллельное,

установившееся. Границы раздела M_k в системе координат xOy описываются соответственно уравнениями $y = h_k$ ($k = \overline{1,3}$). Скорости потока на бесконечности перед профилем параллельны стенкам канала и равны U_l ($l = 1, 2$). Считаем, что внутри жидкости вихри отсутствуют, так что течение обладает потенциалом скорости.

Введем соответствующие слоям жидкости области D_l ($l = 1, 2$). Область D_1 представляет собой полосу $h_2 \leq y \leq h_1$ ($h_2 = h_1 - H_1$) за исключением области, ограниченной профилем C , область D_2 – полосу $h_3 \leq y \leq h_2$ ($h_3 = h_2 - H_2$).

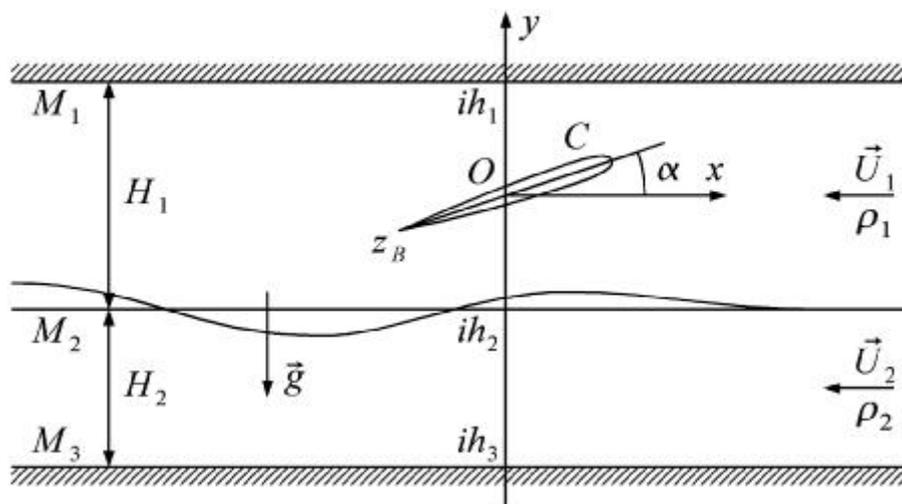


Рис. 1

Рассмотрим комплексную переменную $z = x + iy$ и комплексные потенциалы возмущенного течения $W_l(z) = \varphi_l(x, y) + iy_l(x, y)$ в соответствующих областях D_l .

Используя предположения линейной теории волн малой амплитуды, с учетом обозначений

$$W_l(z) = U_l W_l(z), \quad n_2 = \frac{g(r_1 - r_2)}{r_1 U_1^2 + r_2 U_2^2},$$

$$m_l = \frac{r_l U_l^2}{r_1 U_1^2 + r_2 U_2^2}, \quad m = m_1 - m_2$$

придем к следующей задаче. Найти функции $W_l(z)$, аналитические в соответствующих областях и удовлетворяющие условиям:

на поверхности профиля C

$$\text{Im } W_1(z) = y + y_1 \quad (y_1 = \text{const}), \quad z \in C; \quad (1)$$

на горизонтальной крышке M_1

$$\text{Im} \left[\frac{dW_1(z)}{dz} \right] = 0, \quad y = h_1; \quad (2)$$

на невозмущенном уровне линии раздела жидкостей M_2

$$\text{Im} [W_1(z) - W_2(z)] = 0, \quad (3)$$

$$\text{Re} \left[m_1 \frac{dW_1(z)}{dz} - m_2 \frac{dW_2(z)}{dz} + iv_2 W_2(z) \right] = 0, \quad y = h_2; \quad (4)$$

на дне канала M_3

$$\text{Im} \left[\frac{dW_2(z)}{dz} \right] = 0, \quad y = h_3; \quad (5)$$

на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{dW_l(z)}{dz} = 0,$$

$$\left| \frac{dW_l(z)}{dz} \right| < A, \quad A < \infty, \quad z \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Граничные условия (1), (2), (5) являются условиями плавности обтекания профиля и стенок канала. Условие (3) на линии раздела является кинематическим условием, (4) – динамическим и представляет собой комплексную запись условия непрерывности давления при пересечении поверхности раздела жидкостей, взятое в линеаризованной форме. При этом, следуя теории волн малой амплитуды, будем выполнять это условие на невозмущенном уровне линии раздела. Условия на бесконечности (6) обеспечивают отсутствие скоростей возмущений далеко перед профилем и ограниченность возмущений вне его окрестности.

В силу линейности задачи представим $W_l(z)$ ($l = 1, 2$) в виде суммы

$$W_l(z) = W_{ll}(z) + gW_{2l}(z), \quad (7)$$

где $W_{ll}(z)$ – комплексные потенциалы возмущенного бесциркуляционного течения, удовлетворяющие условиям (1)-(6), $W_{2l}(z)$ – комплексные потенциалы чисто циркуляционного течения, g – значение циркуляции. Потенциалы $W_{2l}(z)$ ($l = 1, 2$) наряду с условиями (2)-(6) должны



удовлетворять еще следующим условиям:

$$\text{Im } W_{21}(z) = y_2 \quad (y_2 = \text{const}), \quad z \in C; \quad (8)$$

$$\Delta_C W_{21}(z) = 1, \quad (9)$$

где Δ_C – приращение функции при положительном обходе контура C .

Метод решения задачи заключается в распределении двойных слоев особенностей (диполей) вещественной плотности по невозмущенному уровню линии раздела жидкостей M_2 и горизонтальным крышке M_1 и дну M_3 , к потенциалам которых добавляются такие регулярные вне C функции, что условие на контуре (1) выполняется точно. Такой метод был впервые предложен в [1] и развит для многосвязных областей в [2].

Наряду с физической плоскостью $z = x + iy$ рассмотрим параметрическую плоскость $Z = x + ih$. Пусть функция $z = f(Z)$ осуществляет конформное отображение внешности единичной окружности $C_0 = \{Z \mid |Z| = 1\}$ на внешность профиля C , причем $f(\infty) = \infty$ и $Z_B = -1$ соответствует задней кромке профиля z_B .

Будем искать комплексные потенциалы в виде

$$W_{sl}(z) = W_{s\infty}(z) + \sum_{k=1}^3 [V_{sk}(z) + \Phi_{sk}(z)], \quad (10)$$

где $W_{s\infty}(z)$ – комплексные потенциалы возмущенного течения при обтекании профиля безграничным потоком,

$$V_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k} \frac{m_{sk}(t)}{z-t} dt,$$

$$\Phi_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k} F_k(z,t) m_{sk}(t) dt.$$

Функции $F_k(z,t)$ строятся в параметрической плоскости Z на основании теоремы Милн-Томсона об окружности [3]:

$$F_k[f(z), f(t)] = \frac{1}{f'(t)} [c_k(z,t) + G_k(z,t)],$$

$$G_k(z,t) = \frac{1}{t^2(z-1/\bar{t})},$$

$$c_k(z,t) = \frac{1}{z-t} - \frac{f'(t)}{f(z)-f(t)}.$$

Плотности непрерывно распределенных по M_k особенностей $m_{sk}(t)$ ($s = 1, 2; k = \overline{1, 3}$) определяются из условий (2), (4), (5). Предварительно для границ M_k проводятся преобразования координат $z = z_k + ih_k$. Условие (3) выполняется на основании свойств предельных значений интеграла типа Коши.

Рассмотрим условие (4) на границе раздела жидкостей M_2 для случая бесциркуляционного обтекания профиля. Подставим комплексный потенциал в форме (10) ($s = 1$) в условие (4) с учетом преобразования координат $z = z_2 + ih_2$, получим:

$$\text{Re} \left[\left(\frac{d}{dz_2} + in_2 \right) V_{12}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + in_2 \right) \Omega_{12}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + in_2 \right) V_{13}(z_2) \right]_{z_2=x_2+i0} = 0, \quad (11)$$

где

$$\Omega_{12}(z_2) = W_{1\infty}(z_2) + V_{11}(z_2) + \Phi_{11}(z_2) + \Phi_{12}(z_2) + \Phi_{13}(z_2).$$

Условие (11) представляет собой сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, которое содержит три группы слагаемых: с особенностями на линии раздела ($y_2 = 0$), с особенностями внутри рассматриваемой области ($y_2 > 0$) и с особенностями вне области ($y_2 < 0$). Его можно регуляризовать, используя следующий прием. Заметим, что (11) эквивалентно следующему уравнению:

$$\text{Re} \left[\left(\frac{d}{dz_2} + in_2 \right) V_{12}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} - in_2 \right) \bar{\Omega}_{12}(z_2) + \left(m \frac{d}{dz_2} + in_2 \right) V_{13}(z_2) \right]_{z_2=x_2+i0} = 0. \quad (12)$$

Функции $V_{12}(z_2)$, $\bar{\Omega}_{12}(z_2)$, $V_{13}(z_2)$ регулярны в полуплоскости $y_2 \geq 0$, следовательно, выражение под знаком действительной части в этой области является чисто мнимой постоянной:



$$\left(\frac{d}{dz_2} + i\mathbf{n}_2\right)V_{12}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} - i\mathbf{n}_2\right)\bar{\Omega}_{12}(z_2) + \left(m\frac{d}{dz_2} + i\mathbf{n}_2\right)V_{13}(z_2) = iN, \quad (13)$$

где N – вещественная постоянная, определяемая из условия на бесконечности (6): $N = 0$. Решая линейное дифференциальное уравнение первого порядка (13) относительно V_{12} и находя действительную часть предела при $z_2 \rightarrow x_2 + i \cdot 0$ (пределный переход в сингулярном интеграле осуществляется по формуле Сохоцкого), получим в параметрической плоскости Z при $x_2 = f(z_2) - ih_2$:

$$m_{12}(z_2) = 2 \operatorname{Re} \left[s_{12}(z_2) + \sum_{r=1}^3 \int_{T_r} L_{2r}(z_2, t_r) m_{1r}(t_r) dt_r \right]. \quad (14)$$

Остальные пять уравнений для нахождения плотностей особенностей можно получить, проделав аналогичные (11) – (14) преобразования для граничных условий (2), (5) для случая бесциркуляционного и для условий (2), (4), (5) для случая чисто циркуляционного обтекания. В результате получим две системы уравнений для определения плотностей особенностей

$m_{sk}(z)$:

$$m_{sk}(z_k) = 2 \operatorname{Re} \left[s_{sk}(z_k) + \sum_{r=1}^3 \int_{T_r} L_{kr}(z_k, t_r) m_{sr}(t_r) dt_r \right] \quad (s = 1, 2; k = \overline{1, 3}), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} s_{11}(z_1) &= W_{1\infty}^*(z_1), \\ s_{21}(z_1) &= W_{2\infty 2}^*(z_1) - W_{2\infty 1}^*(z_1), \\ L_{11}(z_1, t_1) &= \frac{1}{2\pi i} [c_1(z_1, t_1) + G_1(z_1, t_1)], \\ L_{12}(z_1, t_2) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{z_1 - t_2} + G_2(z_1, t_2) \right], \\ L_{13}(z_1, t_3) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{z_1 - t_3} + G_3(z_1, t_3) \right], \end{aligned}$$

$$s_{12}(z_2) = mW_{1\infty}^*(z_2) + i\mathbf{n}(m+1)e^{+i\mathbf{n}f(z_2)} \times \int_{+\infty}^{z_2} e^{-i\mathbf{n}f(J_2)} W_{1\infty}^*(J_2) f'(J_2) dJ_2,$$

$$s_{22}(z_2) = mW_{2\infty}^*(z_2) + i\mathbf{n}(m+1)e^{+i\mathbf{n}f(z_2)} \times \int_{+\infty}^{z_2} e^{-i\mathbf{n}f(J_2)} W_{2\infty}^*(J_2) f'(J_2) dJ_2,$$

$$L_{21}(z_2, t_1) = \frac{1}{2\pi i} \left[m \left(\frac{1}{z_2 - t_1} + G_1(z_2, t_1) \right) + i\mathbf{n}(m+1)e^{+i\mathbf{n}f(z_2)} \int_{+\infty}^{z_2} e^{-i\mathbf{n}f(J_2)} \times \left(\frac{1}{J_2 - t_1} + G_1(J_2, t_1) \right) f'(J_2) dJ_2 \right],$$

$$L_{22}(z_2, t_2) = \frac{1}{2\pi i} \left[m(c_2(z_2, t_2) + G_2(z_2, t_2)) + i\mathbf{n}(m+1)e^{+i\mathbf{n}f(z_2)} \int_{+\infty}^{z_2} e^{-i\mathbf{n}f(J_2)} \times (c_2(J_2, t_2) + G_2(J_2, t_2)) f'(J_2) dJ_2 \right],$$

$$L_{23}(z_2, t_3) = \frac{1}{2\pi i} \left[m \left(\frac{1}{z_2 - t_3} + G_3(z_2, t_3) \right) + i\mathbf{n}(m+1)e^{+i\mathbf{n}f(z_2)} \int_{+\infty}^{z_2} e^{-i\mathbf{n}f(J_2)} \times (c_3(J_2, t_3) + G_3(J_2, t_3)) f'(J_2) dJ_2 - i\mathbf{n}(m-1)e^{-i\mathbf{n}f(z_2)} \int_{+\infty}^{z_2} e^{+i\mathbf{n}f(J_2)} \times \frac{f'(t_3)}{f(J_2) - f(t_3)} f'(J_2) dJ_2 \right],$$

$$s_{13}(z_3) = -W_{1\infty}^*(z_3),$$

$$s_{23}(z_3) = -W_{2\infty}^*(z_3),$$



$$L_{31}(z_3, t_1) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{z_3 - t_1} + G_1(z_3, t_1) \right],$$

$$L_{32}(z_3, t_2) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{z_3 - t_2} + G_2(z_3, t_2) \right],$$

$$L_{33}(z_3, t_3) = -\frac{1}{2\pi i} [c_3(z_3, t_3) + G_3(z_3, t_3)],$$

$$W_{1\infty}^*(z) = -(Kz + \bar{K}/z) + f(z),$$

$$W_{2\infty}^*(z) = W_{2\infty 2}^*(z) + W_{2\infty 1}^*(z),$$

$$W_{2\infty 2}^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln(z - 1/\bar{z}_g),$$

$$W_{2\infty 1}^*(z) = -\frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_g),$$

$$K = f'_z(\infty), \quad z_g = f^{-1}(z_g),$$

z_g – точка, лежащая в области $y > h_1$,

$T_k = \{z \mid z = f^{-1}(x + ih_k)\}$ – образы невозмущенных

границ раздела сред в параметрической плоскости Z . Комплексный потенциал циркуляционного обтекания профиля безграничным потоком

$W_{2\infty}(z) = W_{2\infty}[f(z)] = W_{2\infty}^*(z)$ удовлетворяет условиям (3), (8), (9), этим же условиям удовлетворяет и вся сумма (10) ($s = 2$).

Значение циркуляции g находится из постулата Жуковского-Чаплыгина о конечности скорости на острой кромке профиля [4]:

$$g = \frac{2p \operatorname{Im}(-K + \bar{K}/z_B^2) + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 J_{1k}(z_B)}{\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_B - 1/\bar{z}_g} - \frac{1}{z_B - z_g} - \sum_{k=1}^3 J_{2k}(z_B) \right)},$$

где

$$J_{sk}(z_B) = \int_{T_k} \left[\frac{1}{(z_B - t)^2} + \frac{1}{\bar{t}^2 (z_B - 1/\bar{t})^2} \right] m_{sk}(t) dt.$$

Для решения полученных систем линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода (15) ($s = 1, 2$) применялся метод последовательных приближений [2].

По найденным значениям плотностей определяется комплексный потенциал возмущенного течения (7) и

по формуле Чаплыгина [4] вычисляется волновое сопротивление X и подъемная сила Y профиля C :

$$X - iY = \frac{ir_1}{2} \oint_{C_0} \frac{1}{f'(z)} \left[\frac{dW_1^*(z)}{dz} \right]^2 dz - ir_1 U_1^2 g.$$

Для расчета гидродинамических характеристик крылового профиля была разработана программа, тестирование которой было проведено на известных решениях других авторов задач обтекания тел различных форм слоями жидкостей с одной и двумя границами [2, 5, 6].

Для данной задачи характерно наличие критического числа Фруда Fr^* , значение которого зависит от отношения плотностей r_2/r_1 и толщин слоев H_1/L и H_2/L [7]. Периодические волны на

границе раздела существуют только при $Fr < Fr^*$, поэтому именно в этом диапазоне изменения числа Фруда проводились расчеты.

Результаты расчетов, выполненных для профиля NASA ббmod в случае одинаковых скоростей слоев ($U_1 = U_2$), представлены на рис. 2-4. Отображающая функция $f(z)$ для данного профиля определялась по методу М.В. Лотфуллина [8]. Отношение плотностей жидкостей r_2/r_1 в расчетах было принято равным 1.03, что соответствует отношению плотностей морской и пресной воды. На рис. 2, 3 изображены зависимости коэффициента подъемной силы $c_y = 2Y/(r_1 U_1^2 L)$ от числа Фруда $Fr = U_1/\sqrt{gL}$.

На рис. 2 приведены результаты исследования влияния угла атаки профиля α на коэффициент подъемной силы c_y при неизменной геометрии канала – $h_1/L = 0.6$, $h_2/L = -0.5$, $h_3/L = -1.4$. Сплошной кривой изображен коэффициент подъемной силы при $\alpha = 0^\circ$, штриховой – при $\alpha = 1^\circ$. При увеличении угла атаки α наблюдается увеличение c_y во всем рассматриваемом диапазоне чисел Фруда.

На рис. 3 при $\alpha = 1^\circ$, $h_1/L = 0.6$, $h_2/L = -0.5$ сплошной кривой изображен коэффициент подъемной силы профиля c_y в случае нижнего слоя жидкости конечной глубины при $h_3/L = -1.1$, а штриховой – в случае полубезграничного нижнего слоя при $h_3/L = -\infty$. Как видно из графика, наибольшие и

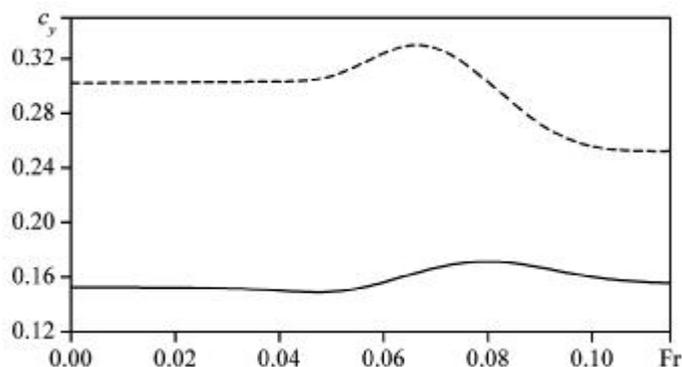


Рис. 2

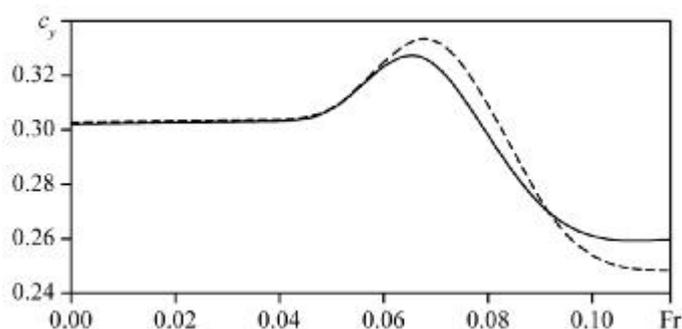


Рис. 3

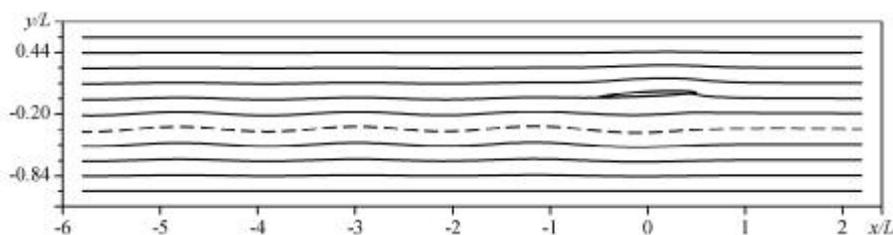


Рис. 4

наименьшие значения C_y достигаются при меньших значениях h_3/L . Следует отметить значительное отличие коэффициентов подъемной силы в случае канала и в случае полубезграничного потока.

На рис. 4 продемонстрирован пример расчета линий тока течения и границы раздела жидкостей при $\alpha = 3^\circ$, $h_1/L = 0.6$, $h_2/L = -0.36$, $h_3/L = -1$, $Fr = 0.065$.

Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00163).

Литература

1. Тумашев Г.Г., Черепенин Н.Д. Задача о движении круглого цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973. – Вып. 10. – С. 140-151.
2. Филиппов С.И. Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела. – Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 2004. – 200 с.
3. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 656 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
5. Стурова И.В. Плоская задача об обтекании кругового цилиндра равномерным потоком двухслойной жидкости конечной глубины // ПМТФ. – 1998. – Т. 3. – № 6. – С. 91-101.
6. Лотфуллин М.В., Стурова И.В., Филиппов С.И. Гидродинамическое воздействие на контур, обтекаемый равномерным потоком двухслойной жидкости // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 1994. – Т. 3. – № 8. – С. 108-115.
7. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
8. Лотфуллин М.В. Численный метод конформного отображения односвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985. – Вып. 22. – С. 148-150.