УДК 523.53:521.75

В.С. Заболотников – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геодезии
Казанский государственный архитектурно-строительный университет

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ПРИТЯЖЕНИЯ ПЛАНЕТЫ НА ФУНКЦИЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПАДАЮЩЕГО ПОТОКА МЕТЕОРНЫХ ЧАСТИЦ

Применение методов статистической физики, в частности различного вида распределений метеоров и метеорных частиц по физическим и динамическим характеристикам, является необходимым приемом в метеорной астрономии и обуславливается, прежде всего, огромным объемом экспериментальных данных по регистрации метеоров. Распределения позволяют представить в виде таблиц, графиков или функций любые по размерам массивы наблюдений, что, с одной стороны, значительно облегчает анализ свойств метеорного вещества, с другой – дает возможность выявить наиболее общие характеристики, присущие большой совокупности метеорных тел. К недостаткам применения распределений, на наш взгляд, следует отнести сложность учета различных видов селекций, которые значительно влияют на результаты наблюдений в метеорной астрономии. Рассмотрим, например, функцию распределения плотности падающего потока, введенную в [1, 2, 3], и ее преобразование в гравитационном поле движущейся Земли

$$Q(\varepsilon, \psi, v) = \frac{dN}{d\varepsilon d\psi dv \sin\varepsilon dt d\Theta}, \qquad (1)$$

где dN – число частиц, ε – элонгация радианта, ψ – эклиптическая широта радианта, v – скорость метеорной частицы, t – время, $d\Theta$ – площадка, перпендикулярная вектору скорости v.

Для того чтобы учесть влияние движения и притяжения Земли на функцию Q(ε, ψ, v), необходимо найти преобразование дифференциалов $d\varepsilon$, $d\psi$, dv, $d\Theta$ под действием указанных факторов, что представляет значительно более сложную задачу, чем определение орбиты отдельной частицы. Использование фазовой функции для анализа данной проблемы, на наш взгляд, не позволяет решить эту задачу в окончательном виде, как это утверждается в [1, 2, 3]. При выводе якобиана преобразования был допущен целый ряд серьезных недочетов, что позволяет еще раз рассмотреть задачу по учету влияния притяжения и движения Земли на функцию распределения плотности падающего потока (1).

Учет притяжения Земли

При анализе влияния гравитационного поля Земли на функцию распределения плотности падающего потока в работах [1, 2, 3] использовались понятия фазового пространства и фазовой функции, заданной в прямоугольной системе координат, а также теорема Лиувилля

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{dN}{dx dy dz d\dot{x} d\dot{y} d\dot{z}}, \qquad (2)$$

где dN- число частиц, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ - импульсы единичной массы.

Необходимо обратить внимание на следующий важный факт. Элемент объема в физическом пространстве $dr = dxdydz$ и элемент объема в пространстве скоростей $dv = d\dot{x}d\dot{y}d\dot{z}$ определены в одной и той же системе прямоугольных координат, начало которой расположено в центре Земли. Другими словами, вектор скорости задан в проекции на те же координатные оси, что и конфигурационное пространство. Подобный выбор не является случайным, поскольку для доказательства теоремы Лиувилля необходимо, чтобы переменные, от которых зависит фазовая функция, были канонически сопряжены и удовлетворяли уравнениям движения Гамильтона.

Далее авторами [1, 2, 3] вводятся функции F_∞ и Q_∞ – искаженные притяжением Земли, а также F_g и Q_g – в окрестности точки, свободной от влияния гравитационного поля Земли. Поскольку на основании теоремы Лиувилля $F_\infty = F_g$, то остается найти зависимости между F_∞ и Q_∞ с одной стороны и между F_g и Q_g – с другой. Для этого в физическом пространстве осуществляется переход от прямоугольных к топоцентрическим сферическим координатам, а в пространстве скоростей – к сферической системе, начало которой находится в центре собирающей площадки, расположенной в метеорной зоне. В этом случае элемент объема в скоростном пространстве выражается простым соотношением

$$dv = v^2 \sin\varepsilon \, dv \, d\varepsilon \, d\psi. \qquad (3)$$

Однако именно такая замена является неправомерной, поскольку, как это отмечалось выше, в исходной фазовой функции все аргументы отнесены к единой системе прямоугольных координат. Если в физическом пространстве перейти к сферической системе координат по стандартным уравнениям

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi\sin\lambda \\ y &= r\sin\varphi\cos\lambda \\ z &= r\cos\varphi, \end{aligned} \qquad (4)$$

то формулы преобразования системы координат в скоростном пространстве получаются путем дифференцирования соотношений (4) по времени. Причем в равенствах (4) λ, φ – долгота и широта точки на границе атмосферы, в которой находится метеорная частица на момент наблюдения. Пренебрегая размерами собирающей площадки в метеорной зоне по сравнению с размерами Земли, можно считать, что λ, φ – координаты центра собирающей площадки. Дифференцирование формул (4) по времени позволяет получить следующие выражения для импульсов в сферической системе координат [4]:

$$p_r = \dot{r},\ p_\varphi = r^2\dot{\varphi},\ p_\lambda = r^2\cos^2\varphi\,\dot{\lambda}.$$

Таким образом, если в фазовой функции выполнить корректную замену переменных, то проблема учета влияния притяжения Земли на Q остается такой же неразрешимой, как и в прямоугольной системе координат.

Если предположить, что все метеорные частицы движутся по радиус-вектору через центр Земли, то элемент объема в скоростном пространстве действительно выражается соотношением (3). Другими словами, решение, полученное в [1, 2, 3], можно считать исчерпывающим только для стационарных метеоров, которые, как известно, являются весьма редким природным явлением.

С учетом высказанных замечаний можно вывести формулу, учитывающую изменение плотности падающего потока $Q(\varepsilon, \psi, v)$ под влиянием гравитационного поля Земли для более реального случая движения метеорных частиц. При этом будем исходить из хорошо известного физического факта, который следует из решения гидродинамического уравнения неразрывности, а именно – сохранения потока частиц вдоль траектории при движении в поле притяжения планеты. Другими словами,

$$\frac{dN}{dt} = \text{const.} \qquad (5)$$

Пренебрежем изменением кривизны траектории под влиянием гравитационного поля. Тогда координаты радианта останутся постоянными величинами, следовательно

$$d\varepsilon_\infty d\psi_\infty \sin\varepsilon_\infty = d\varepsilon_g d\psi_g \sin\varepsilon_g. \qquad (6)$$

Из интеграла энергии, при предположении, что высота образования метеоров не зависит от скорости частиц, следует

$$v_\infty dv_\infty = v_g dv_g, \qquad (7)$$

где v_∞ – скорость частицы на границе атмосферы Земли, v_g – скорость на «бесконечности» по отношению к движущейся Земле.

Для преобразования площадки $d\Theta_\infty$ используем формулу, полученную Эпиком [5], или полностью равнозначное ей соотношение, выведенное в работе [6]. Так как полученное выражение имеет очень сложный вид, обозначим его для краткости через I. Тогда

$$d\Theta_g = I d\Theta_\infty. \qquad (8)$$

Из уравнения (5) можно получить следующее соотношение:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_\infty = \left(\frac{dN}{dt}\right)_g. \qquad (9)$$

Далее, разделим почленно обе части уравнения (9) на равенства (6), (7) и (8). Отсюда получим

$$\frac{dN}{d\varepsilon_g d\psi_g dv_g dt d\Theta_g \sin\varepsilon_g} = .$$

$$= \frac{dN}{d\varepsilon_\infty d\psi_\infty dv_\infty dt d\Theta_\infty \sin\varepsilon_\infty} I \frac{v_g}{v_\infty} \qquad (10)$$

В более короткой записи формулу (10) можно представить в виде

$$Q_g(\varepsilon_g, \psi_g, v_g) = Q_?(\varepsilon_\infty, \psi_\infty, v_\infty) I \frac{v_g}{v_\infty}. \qquad (11)$$

Соотношение (11) в большей степени соответствует реальному движению метеорных частиц, чем уравнения, полученные в [1, 2, 3], и может быть использовано для обработки наблюдений метеоров с целью учеты влияния притяжения Земли.

Учет движения Земли

Для учета влияния движения планеты на распределение плотности падающего потока в работах [1, 2, 3] также используются фазовая функция и теорема Лиувилля. Авторы исследований утверждают, что, если через F_h обозначить фазовую функцию в точке, неподвижной относительно Солнца, то можно записать

$$F_g(\mathbf{r}_g, \mathbf{v}_g) = F_h(\mathbf{r}_h, \mathbf{v}_h). \qquad (12)$$

В формуле (12) $\mathbf{v}_h$ – гелиоцентрический вектор скорости.

Уравнение (12) позволяет сделать вывод, что, если мы пронаблюдаем в некоторый момент времени одну и ту же частицу с поверхности движущейся и неподвижной планеты, то у нее должен измениться не только вектор скорости, но и радиус-вектор **r**, определяющий ее положение относительно центра Земли. Подобное изменение невозможно, поскольку в один и тот же момент времени частица не может находиться в двух разных точках физического пространства. С учетом высказанных замечаний, можно записать следующее равенство [7]:

$$F_g(\mathbf{r}_h,\mathbf{v}_g) = F_h(\mathbf{r}_h,\mathbf{v}_h). \qquad (13)$$

В формуле (12) координаты центра единичного объема имеют разное значение в единой системе топоцентрических координат. В равенстве (13) центр одного и того же единичного объема определяется в одной системе координат – гелиоцентрической. В последнем случае положение объема в физическом пространстве не меняется.

Получим новые формулы, учитывающие влияние движения Земли на функцию распределения плотности падающего потока, представленную в форме (1). Для этого воспользуемся соотношением (2). Запишем

$$dN = F_h d\mathbf{r}_h d\mathbf{v}_h. \qquad (14)$$

Элемент объема в скоростном пространстве выразим с помощью соотношения (3), а в координатном пространстве – через площадку, скорость и единицу времени

$$dN = F_h \sin\varepsilon_h v_h^2 d\varepsilon_h d\psi_h dv_h d\Theta_h v_h dt. \qquad (15)$$

Поделим обе части уравнения на $\sin\varepsilon_h d\varepsilon_h d\psi_h dv_h d\Theta_h dt$. Это дает

$$Q_h(\varepsilon_h, \psi_h, v_h) = F_h v_h^3. \qquad (16)$$

Представим левую часть уравнения (13) в следующей форме:

$$dN = F_g \sin\varepsilon_g v_g^2 d\varepsilon_g d\psi_g dv_g d\Theta_h v_h dt. \qquad (17)$$

Площадка, перпендикулярная геоцентрическому вектору скорости, выражается с помощью следующего соотношения:

$$d\Theta_g = \frac{d\Theta_h}{\cos\varphi}, \qquad (18)$$

где φ – угол между нормалями к площадкам $d\Theta_h$ и $d\Theta_g$.

В формулах (15) и (17) $v_h dt$ есть расстояние, с которого частица еще может пересечь неподвижную собирающую площадку за время dt. Другими словами, за время dt неподвижную площадку пересекут все частицы, находящиеся в объеме $d\Theta_h v_h dt$ = $d\Theta_g \cos\varphi\, v_h dt$. Однако, очевидно, что движение Земли изменит относительную скорость метеороида и в результате площадку за тот же самый промежуток времени dt пересечет другое число частиц, которое находится в другом по размерам объеме. Относительная скорость метеороида, спроектированная на нормаль к площадке $d\Theta_g$, будет слагаться из двух составляющих: проекции на нормаль собственной гелиоцентрической скорости частицы и проекции на ту же нормаль скорости движения Земли.
Или

$$v_g^n = v_h \cos\varphi + v_t \cos\varepsilon_g, \qquad (19)$$

где v_t – скорость Земли, ε_g – угол, между векторами v_t и v_g.

Для того чтобы удовлетворить требованию сохранения числа частиц, найдем промежуток времени dt_g, за который частица, двигаясь со скоростью v_g^n, преодолеет расстояние $v_h dt$. Очевидно, что

$$v_h dt = v_g^n dt_g = (v_h \cos\varphi + v_t \cos\varepsilon_g) dt_g. \qquad (20)$$

С учетом соотношения (18) и (20) можно записать

$$d\Theta_h v_h dt = d\Theta_g \cos\varphi \frac{(v_h \cos\varphi + v_t \cos\varepsilon_g) dt_g}{v_h}. \qquad (21)$$

Из треугольника сложения скоростей следует, что

$$v_h \cos\varphi + v_t \cos\varepsilon_g = v_g. \qquad (22)$$

Уравнения (21) и (22) позволяют переписать формулу (17) следующим образом:

$$dN = F_g v_g^3 \sin\varepsilon_g \cos\varphi dv_g d\varepsilon_g d\psi_g d\Theta_g dt. \qquad (23)$$

Исходя из определения функции распределения плотности падающего потока, запишем

$$Q_g(\varepsilon_g, \psi_g, v_g) = F_g v_g^3 \cos\varphi. \qquad (24)$$

Равенства (13), (16) и (24) дают следующую зависимость между функциями Q_g и Q_h:

$$Q_h(\varepsilon_h, \psi_h, v_h) = Q_g(\varepsilon_g, \psi_g, v_g) \frac{v_h^3}{v_g^3 \cos\varphi}. \qquad (25)$$

Учитывая соотношение (11), получим в окончательном виде зависимость между наблюдаемой функцией распределения Q_∞ и распределением метеорных частиц, свободным от влияния движения и притяжения Земли Q_h.

$$Q_h = Q_\infty \frac{v_h^3}{v_g^2 v_\infty \cos\varphi} I. \qquad (26)$$

Литература

1. Андреев В.В., Белькович О.И. Преобразование падающего потока спорадических метеоров в гравитационном поле движущегося тела. // Астр. вест., 1975, 9, № 1. – С. 40-44.
2. Андреев В.В. Распределение метеорного вещества в окрестностях орбиты Земли. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. – Казань, 1981. – 207 с.
3. Белькович О.И. Астрономическая селекция при наблюдениях метеоров и методы ее учета. // Астр. вестн., 1983, 17, № 3. – С.108-115.
4. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М.: Изд-во «Наука», 1968, Гл. XX, §6. – С. 649-653.
5. Opik E.J. Analysis of 1436 meteor velocities. Pub. Obs. Astr. Tartu, 1940, 30, № 5.
6. Андреев Г.В., Бабаджанов П.Б. Влияние гравитационного поля Земли на структурные характеристики метеорных потоков. Тезисы докл. Всесоюзн. симп. «Метеорное вещество в окрестности орбиты Земли». – Казань, 1980.
7. Чепмен С., Каулинг Г. Математическая теория неоднородных газов. – М.: Изд-во «Иностр. литер.» , 1960. – 510 с.