



УДК 691.714:620.169.1+69.059.4

А.З. Манапов – кандидат технических наук, доцент кафедры металлических конструкций и испытаний сооружений

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЗОК ОТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА КОНСТРУКЦИЙ, ОБОРУДОВАНИЯ, ЛЮДЕЙ И СКЛАДИРУЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

СНиП 2.01.07-85 «Нагрузки и воздействия» [1] рассматривает весовые нагрузки, действующие на здания и сооружения, как постоянные и временные. В соответствии с этим документом к постоянным нагрузкам относятся вес частей сооружений и давление грунтов; к временным – нагрузки от оборудования, людей, складированных материалов. Временные весовые нагрузки определяются, используя паспорт на оборудование, материалы статистических исследований или через эквивалентные равномерно-распределенные временные нагрузки на перекрытия зданий [1]. Постоянная нагрузка рассматривается как случайная величина в силу невозможности её точного определения и изменчивости во времени.

Соотношение расчетной и нормативной нагрузок определяет возможные колебания нагрузки, однако [2] не дает четкого статистического толкования этих соотношений. Основными характеристиками нагрузок являются их нормативные значения. Для нагрузок от собственного веса нормативные значения нагрузок определяются по проектным значениям геометрических и конструктивных параметров и по средним значениям плотности с учетом имеющихся данных предприятий-изготовителей об ожидаемой массе конструкции. В пособии к СНиП 11-23-81[4] предлагаются значения коэффициентов вариации (табл. 1) из которых следует, что средние ожидаемые значения веса конструкций и оборудования равны нормативным значениям p_j^H , а стандарт

$\Delta_p = \frac{p_j^H(g_f - 1)}{2}$, где g_f – коэффициент надежности по нагрузке.

При таком соотношении средних ожидаемых значений и стандартов отклонений вероятность не превышения постоянной нагрузки назначенного расчетного значения равна 0,9772.

С целью статистического анализа рассмотрим пример расчета постоянной нагрузки на плиту покрытия. Результаты расчета согласно [2] приведены в таблице 2 и методом статистического моделирования в таблице 3.

Статистическое моделирование нагрузок выполним следующим образом: для каждого из поименованных в таблице 2 нагрузок при помощи генератора случайных чисел получим по 10000 значений. Распределение для генератора случайных чисел зададим по нормальному закону с математическим ожиданием, равным $m = p_j^H$, и стандартом

$$\Delta_p = \frac{p_j^H(g_f - 1)}{2}. \text{ Для каждого из этих множеств}$$

случайных чисел находим значение, которое логически будет соответствовать обеспеченности расчетной нагрузки 0,9772. Это число при ранжировании множества от минимума к максимуму должно стоять на 9772 месте. Для моделирования итоговой нагрузки имеющиеся 10000 случайных значений для каждой нагрузки суммируются в порядке их расположения в своем множестве. Полученные 10000 суммарных значений статистически обрабатываются. Например, для определения обеспеченности расчетной итоговой нагрузки в 560 кгс/м², определенной нормативным методом (таблица 2), нужно определить, на каком месте будет стоять это число после ранжирования множества

Таблица 1

Конструкции, оборудование	Коэффициент вариации v_f
Стальные конструкции	0,025
Асбестоцементные листы, железобетонные плиты	0,05
Деревянные конструкции (прогоны, обрешетка)	0,05
Стяжки, засыпки, выполняемые на строительной площадке	0,15
Стационарное оборудование	0,10



Таблица 2

№	Наименование нагрузки	Нормативное значение	Коэффициент надежности	Расчетное значение
1	Вес сборной плиты покрытия	300 кгс/м ²	1,1	330кгс/м ²
2	Вес 1 м ² пароизоляции	50 кгс/м ²	1,3	65 кгс/м ²
3	Вес 1 м ² стяжки при толщине 35 мм и объемном весе 2200 кгс/м ³	77 кгс/м ²	1,3	100 кгс/м ²
4	Вес 1 м ² рулонного покрытия и защиты	50 кгс/м ²	1,3	65 кгс/м ²
5	Итоговая нагрузка	477 кгс/м ²	1,15	560 кгс/м ²

Таблица 3

№	Наименование нагрузки и параметры распределения	Максимальное значение из 10000 случайных реализаций нагрузки	Значение 9772 числа при ранжировании множества от минимума к максимуму
1	Вес сборной плиты перекрытия математическое ожидание $m = 300$ кгс/м ² Стандарт $\Delta = 7,50$ кгс/м ²	350,32 кгс/м ²	329,52 кгс/м ²
2	Вес 1 м ² пароизоляции $m = 50$ кгс/м ² $\Delta = 3,75$ кгс/м ²	75,91 кгс/м ²	64,70 кгс/м ²
3	Вес 1 м ² стяжки при толщине 35мм и объемном весе 2200кгс/м ³ $m = 77$ кгс/м ² $\Delta = 5,75$ кгс/м ²	138,69 кгс/м ²	100,20 кгс/м ²
4	Вес 1 м ² рулонного покрытия и защиты $m = 50$ кгс/м ² $\Delta = 3,75$ кгс/м ²	77,51 кгс/м ²	64,89 кгс/м ²
5	Максимальное значение из 10000 случайных реализаций суммарной нагрузки по пунктам 1-4	551,72 кгс/м ²	
6	Значение суммарной нагрузки с обеспеченностью 0,9772	512,78 кгс/м ²	
7	Обеспеченность расчетной итоговой нагрузки, равной 560 кгс/м ² , по табл. 2	0,99992	



от минимума к максимуму.

Сравнение результатов показывает, что обеспеченность расчетной суммарной нагрузки в 560 кгс/м² существенно выше обеспеченности ее составляющих: 0,99992 к 0,9772. А при одинаковой обеспеченности расчетная суммарная нагрузка должна быть существенно ниже 512,78 кгс/м².

В других источниках [3] математическое ожидание приравнивают нормативному значению нагрузки p_j^n ,

а стандарт $\Delta_p = \frac{p_j^n (g_f - 1)}{4}$. В этом случае

вероятность не превышения нагрузки назначенного расчетного значения равна 0,99997. Результаты статистического моделирования при таком соотношении параметров представлены в таблице 4.

Таким образом, методом статистического моделирования можно определить обеспеченность итоговой суммарной постоянной нагрузки, при этом можно использовать несколько вариантов возможных распределений.

Равномерно-распределенные временные нагрузки на плиты перекрытия и лестницы имеют другую статистическую основу. При определении продольных усилий в колоннах и стенах, воспринимающих нагрузки от двух и более перекрытий, нормативные значения равномерно-распределенных временных нагрузок на плиты перекрытия и лестницы снижают умножением на коэффициент сочетания [1].

$$y_n = 0,4 + \frac{y_{A1} - 0,4}{\sqrt{n}} \quad (\text{для квартир и т.п.})$$

$$y_n = 0,5 + \frac{y_{A2} - 0,5}{\sqrt{n}} \quad (\text{для торговых залов и т.п.}),$$

где y_{A1} и y_{A2} – коэффициенты сочетаний нагрузок для одного перекрытия;

n – общее число перекрытий.

В таблице 5 приведены расчетные нагрузки при различном числе перекрытий, полученные по СНиП 2.01.07-85 «Нагрузки и воздействия» [1].

Рассмотрим равномерно-распределенные временные нагрузки на плиты перекрытия и лестницы с позиций статистического моделирования.

Представим расчетные нагрузки для квартир жилых домов в виде нормального распределения с математическим ожиданием, равным нормативной нагрузке $\mu = 150$ кгс/м², и стандартом распределения $\Delta = 11,25$ кгс/м². При таком распределении расчетная нагрузка обеспечивается с квантилью 4 или $p_j = 150$ кгс/м² + 4 * 11,25 кгс/м² = 195 кгс/м².

Используя генератор случайных чисел, выполним статистическое моделирование нагрузок для определения продольных усилий в колоннах и стенах,

воспринимающих нагрузки от двух и более перекрытий. Модель расчета состоит в следующем: для каждого из 15 перекрытий моделируем по 10000 значений нагрузки с предположением, что распределение соответствует нормальному закону с математическим ожиданием, равным нормативной нагрузке $\mu = 150$ кгс/м², и стандартом распределения $\Delta = 11,25$ кгс/м². Для каждого из этих множеств случайных чисел находим максимальное значение, которое логически будет соответствовать расчетной нагрузке при числе перекрытий $n=1$ с обеспеченностью 0,9999. При числе перекрытий, равном $n=2$, расчетная нагрузка определяется следующим образом: имеющиеся 10000 случайных значений нагрузки для каждого перекрытия попарно суммируются и определяется среднее арифметическое значение, из полученных 10000 среднеарифметических значений выделяется максимальное значение, которое логически будет соответствовать расчетной нагрузке при числе перекрытий $n = 2$ с обеспеченностью 0,9999. При числе перекрытий, равном, например $n = 13$, имеющиеся 10000 случайных значений нагрузки для каждого перекрытия по порядку суммируются и определяется среднее арифметическое значение из 13 случайных чисел, из полученных 10000 среднеарифметических значений выделяется максимальное значение, которое логически будет соответствовать расчетной нагрузке при числе перекрытий $n=13$ с обеспеченностью 0,9999. Результаты расчета методом статистического моделирования по описанной выше методике приведены в таблице 6. Результаты показывают существенное различие с результатами СНиП 2.01.07-85 «Нагрузки и воздействия» [1], представленными в таблице 5.

В соответствии с теоремой Линдберга-Леви [5]

$$\text{случайная величина } R^m = \frac{1}{n} (R_1 + R_2 + \dots + R_n)$$

имеет асимптотически нормальное распределение

вероятностей с центром m_R дисперсией $\frac{\Delta^2}{n}$ при

условии, что существует общая дисперсия Δ^2 и общий центр m_R величин R_1, R_2, \dots, R_n . В соответствии с этой теоремой при числе перекрытий $n \rightarrow \infty$ математическое ожидание расчетной нагрузки m для квартир при определении продольных усилий в колоннах и стенах должна равняться произведению расчетной нагрузки при $n=1$ на

$$y_n = 0,4 + \frac{y_{A1} - 0,4}{\sqrt{n}} = 0,4 \quad \text{или } 78 \text{ кгс/м}^2, \text{ что}$$

существенно ниже нормативной нагрузки 150 кгс/м². Примем математическое ожидание равномерно-распределенной временной нагрузки на плиты



Таблица 4

№	Наименование нагрузки и параметры распределения	Максимальное значение из 10000 случайных реализаций нагрузки
1	Вес сборной плиты перекрытия математическое ожидание $\mu = 300 \text{ кгс/м}^2$. Стандарт $\Delta = 15,0 \text{ кгс/м}^2$	325,16 кгс/м ²
2	Вес 1 м ² пароизоляции $\mu = 50 \text{ кгс/м}^2$ $\Delta = 7,5 \text{ кгс/м}^2$	65,11 кгс/м ²
3	Вес 1 м ² стяжки при толщине 35 мм и объемном весе 2200 кгс/м ³ $\mu = 77 \text{ кгс/м}^2$ $\Delta = 11,5 \text{ кгс/м}^2$	107,84 кгс/м ²
4	Вес 1 м ² рулонного покрытия и защиты $\mu = 50 \text{ кгс/м}^2$ $\Delta = 7,5 \text{ кгс/м}^2$	64,03 кгс/м ²
5	Максимальное значение из 10000 случайных реализаций суммарной нагрузки по пунктам 1-4	518,90 кгс/м ²
6	Обеспеченность расчетной итоговой нагрузки, равной 560 кгс/м ² , по табл. 2	0,99999

Таблица 5

n – общее число перекрытий	$y_n = 0,4 + \frac{y_{A1} - 0,4}{\sqrt{n}}$ $y_{A1} = 1$	$y_n = 0,5 + \frac{y_{A2} - 0,5}{\sqrt{n}}$ $y_{A2} = 1$	Расчетные нагрузки для квартир жилых зданий (кгс/м ²)	Расчетные нагрузки для торговых залов (кгс/м ²)
1	1	1	195,00	480,00
2	0,824264	0,853553	160,73	409,70
3	0,74641	0,788675	145,55	378,56
4	0,7	0,75	136,50	360,00
5	0,668328	0,723607	130,32	347,33
6	0,644949	0,704124	125,76	337,97
7	0,626779	0,688982	122,22	330,71
8	0,612132	0,676777	119,36	324,85
9	0,6	0,666667	117,00	320,00
10	0,589737	0,658114	114,99	315,89
11	0,580907	0,650756	113,27	312,36
12	0,573205	0,644338	111,77	309,28
13	0,56641	0,638675	110,45	306,56
14	0,560357	0,633631	109,26	304,14
15	0,554919	0,629099	108,20	301,96



Таблица 6

n - общее число перекрытий	Максимальное значение из 10000 случайных реализаций нагрузки мат. ожиданием $\mu=150\text{кгс/м}^2$ и стандартом распределения $\Delta=11,25\text{кгс/м}^2$	Максимальное значение из среднеарифметических значений при числе перекрытий 2 и больше
1	191,26 кгс/м ²	
2	193,21 кгс/м ²	180,30 кгс/м ²
3	195,10 кгс/м ²	174,40 кгс/м ²
4	189,23 кгс/м ²	172,59 кгс/м ²
5	195,10 кгс/м ²	172,48 кгс/м ²
6	190,62 кгс/м ²	169,74 кгс/м ²
7	192,09 кгс/м ²	167,37 кгс/м ²
8	188,55 кгс/м ²	166,20 кгс/м ²
9	191,26 кгс/м ²	164,14 кгс/м ²
10	190,62 кгс/м ²	163,31 кгс/м ²
11	192,09 кгс/м ²	162,32 кгс/м ²
12	191,26 кгс/м ²	163,47 кгс/м ²
13	190,62 кгс/м ²	162 кгс/м ²
14	190,87 кгс/м ²	161,80 кгс/м ²
15	191,26 кгс/м ²	160,71 кгс/м ²
	Максимум-максимумов 195,10 кгс/м ²	

Таблица 7

n - общее число перекрытий	Максимальное значение из 10000 случайных реализаций нагрузки мат. ожиданием $\mu=78\text{кгс/м}^2$ и стандартом распределения $\Delta=29,25\text{кгс/м}^2$	Максимальное значение из среднеарифметических значений при числе перекрытий 2 и больше
1	185,29кгс/м ²	
2	190,36кгс/м ²	156,79кгс/м ²
3	195,27кгс/м ²	141,44кгс/м ²
4	180,00кгс/м ²	136,74кгс/м ²
5	183,62кгс/м ²	136,45кгс/м ²
6	187,44кгс/м ²	129,34кгс/м ²
7	186,48кгс/м ²	123,18кгс/м ²
8	193,78кгс/м ²	120,12кгс/м ²
9	185,29кгс/м ²	114,66кгс/м ²
10	189,34кгс/м ²	114,67кгс/м ²
11	187,45кгс/м ²	113,03кгс/м ²
12	189,26кгс/м ²	112,31кгс/м ²
13	183,62кгс/м ²	111,56кгс/м ²
14	185,29кгс/м ²	108,64кгс/м ²
15	178,24кгс/м ²	106,57кгс/м ²
	Максимум-максимумов 195,27кгс/м ²	



Таблица 8

<i>n</i> - общее число перекрытий	Максимальное значение из 10000 случайных реализаций нагрузки мат. ожиданием $\mu=240$ кгс/м ² и стандартом распределения $\Delta=60,0$ кгс/м ²	Максимальное значение из среднеарифметических значений при числе перекрытий 2 и больше
1	453,80кгс/м ²	
2	470,50кгс/м ²	430,45кгс/м ²
3	456,67кгс/м ²	373,75кгс/м ²
4	447,34кгс/м ²	356,66кгс/м ²
5	480,56кгс/м ²	337,04кгс/м ²
6	470,50кгс/м ²	328,45кгс/м ²
7	480,56кгс/м ²	321,46кгс/м ²
8	453,80кгс/м ²	317,31кгс/м ²
9	470,50кгс/м ²	313,02кгс/м ²
10	470,50кгс/м ²	310,49кгс/м ²
11	480,56кгс/м ²	302,77кгс/м ²
12	453,80кгс/м ²	305,62кгс/м ²
13	470,50кгс/м ²	308,88кгс/м ²
14	447,34кгс/м ²	301,05кгс/м ²
15	470,50кгс/м ²	297,45кгс/м ²
	Максимум-максимумов 480,56кгс/м ²	

перекрытия квартир равным нагрузке $\mu = 78$ кгс/м² и стандарт распределения $\Delta = 29,25$ кгс/м². При таком распределении расчетная нагрузка обеспечивается также с квантилью 4 или $p_j = 78$ кгс/м² + 4*29,25 кгс/м² = 195 кгс/м².

Для принятых соотношений средняя нагрузка на перекрытие комнаты площадью 20 м² будет составлять 78*20=1560 кгс, а максимальная (расчетная) 195*20=3900 кгс, что не противоречит практике жизни.

Используя ранее изложенную методику статистического моделирования, определим нагрузки на для квартир (таблица 7) и торговых залов (таблица 8).

Полученные результаты имеют существенно лучшую сходимость с данными, полученными по методике СНиП 2.01.07-85 «Нагрузки и воздействия» [1].

Выводы

1. Вероятностная обеспеченность расчетной суммарной постоянной нагрузки увеличивается с возрастанием числа учитываемых нагрузок в этой сумме. Назначенное расчетное значение обеспеченности расчетной суммарной постоянной нагрузки может быть получено методом статистического моделирования.

2. Для равномерно-распределенных временных нагрузок на плиты перекрытия и лестницы

математическое ожидание следует принимать равным произведению расчетного значения нагрузки на

коэффициенты $y_n = 0,5 + \frac{y_{A2} - 0,5}{\sqrt{n}} = 0,5$ или

$y_n = 0,4 + \frac{y_{A1} - 0,4}{\sqrt{n}} = 0,4$, а стандарты распределения

принимать равными 0,125 или 0,15 от расчетного значения нагрузки.

Литература

1. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия / Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 2003. – 36 с.
2. ГОСТ 27751-88 (с изм. 01.1999). Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения по расчету. – 8 с.
3. ANSI/ASCE 7-95. Нагрузки для зданий и сооружений. – 64 с.
4. Пособие по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81* «Стальные конструкции») // ЦНИИСК им. Кучеренко Госстроя СССР. – М: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 148 с.
5. Справочник по математике для научных работников и инженеров. / Г. Корн и Т. Корн. – М., 1970. – С. 542.