



УДК 539.3:519.3:624.04

**Клюев С.В.** – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры сопротивления материалов и строительной механики

**Клюев А.В.** – аспирант

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕВОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Оптимальному проектированию конструкций посвящено большое число исследований, в которых доминирует весовая оптимизация. Такого рода формулировка задачи не должна выходить за пределы известного положения о двойственности постановки задачи синтеза механики деформируемого твердого тела. Сопрягаемыми функционалами являются объем материала проектируемой системы и ее потенциальная энергия. Критерий оптимальности принимает энергетическое содержание [4].

Рассмотрим изопериметрическую задачу формообразования конструкции из однородного материала при заданной величине потенциальной энергии системы. В этом случае функционал имеет вид

$$V = \sum_{i=1}^n A_i l_i + \mu \left( \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2EA_i} - I_0 \right), \quad (1)$$

где  $I_0$  – заданная потенциальная энергия деформации,  $\mu$  – множитель Лагранжа.

Следствием стационарности функционала являются  $m$  уравнений совместности деформаций ( $m$  – число лишних связей)

$$\partial V / \partial N_m = 0, \quad (2)$$

уравнение энергии

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2EA_i} = I_0 \quad (3)$$

и  $r$  уравнений структурообразования ( $r$  – число варьируемых параметров). При варьировании площадей сечений растянутых стержней получаем

$$1 - \mu \frac{N_i^2}{2EA_i^2} = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим проектную задачу для фермы, показанной на рис. 1. С целью выявления знаков внутренних усилий в первом приближении произведем ее расчет [2].

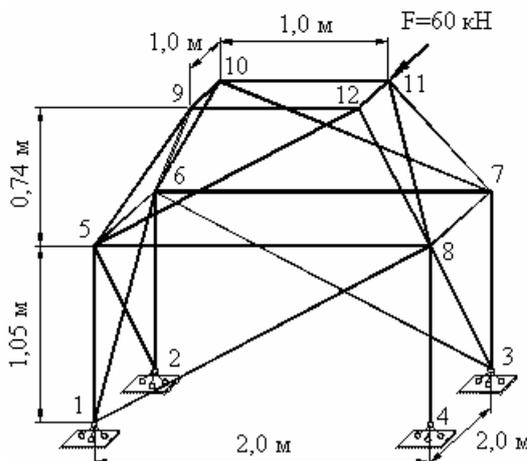


Рис. 1. Статически неопределимая пространственная конструкция



Ферма имеет 12 узлов, 25 стержней и 12 опорных стержней. 12 узлов имеют 36 степеней свободы, которые ограничиваются 37 связями. Таким образом, ферма имеет одну лишнюю связь.

Проведем дополнительный анализ геометрической структуры фермы. Узел 6 связан с шарнирными неподвижными опорами 1, 2, 3 тремя стержнями, не лежащими в одной плоскости. Подобным же образом узел 8 связан с опорами 1, 3, 4, узел 5 – с опорой 1 и неподвижными точками 6, 8 и т.д. Узлы 9, 10, 11 и 12 как принадлежащие одновременно двум неизменяемым четырехугольникам, не лежащим в одной плоскости и примыкающим к неподвижной нижней части фермы, являются неподвижными. Таким образом, ферма неизменяема.

Основная система метода сил образована путем исключения диагонального стержня 2-5. Вместо него введена сила  $X_1$  (рис. 2).

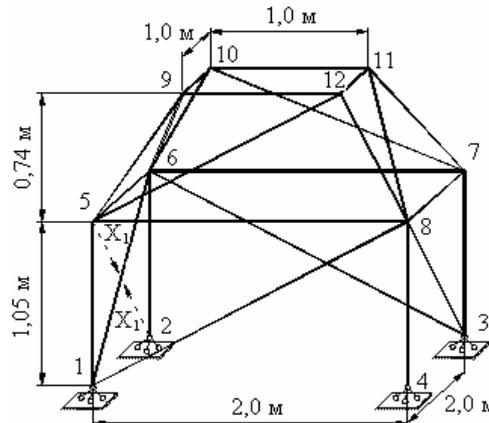


Рис. 2. Основная система и лишнее неизвестное

Каноническое уравнение имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0, \quad (5)$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение по направлению силы  $X_1$  от  $X_1 = 1$ ;  $\Delta_{1F}$  – перемещения по направлению силы  $X_1$  от внешней нагрузки.

Определяем усилия в статически определимой ферме от силы  $F = 60 \text{ кН}$ . Начало координат поместим в узле 10. Длины стержней и абсолютные значения косинусов углов даны в табл. 1. Последние используются при определении усилий в стержнях методом вырезания узлов.

Рассматривая последовательно узлы 11, 10, 9, 12, 5 и 6, на основе известных теорем устанавливаем, что усилия в  $O_4, O_1, S_1, T_1, O_2, S_2, T_2, O_3, S_3, T_3, O_5, O_6, S_6, T_5$  равны нулю.

Для определения усилий в остальных стержнях вырезаем последовательно узлы 11, 7, 8, и 6 и записываем уравнения равновесия:  $\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0$ . Найденные усилия внесены в табл. 1.

Определим усилия в ферме (рис. 2) от силы  $X_1 = 1$ . Усилия возникают лишь в одной грани нижней части фермы:  $\bar{O}_6 = -0,885$ ;  $\bar{S}_5 = -0,465$ ;  $\bar{S}_6 = -0,465$ ;  $\bar{T}_5 = 1$ . Вычисляем перемещения, принимая жесткость  $EA$  постоянной:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 \cdot l_i}{EA} = \frac{1}{EA} (0,885^2 \cdot 2 + 0,465^2 \cdot 1,05 \cdot 2 + 1^2 \cdot 2,259 \cdot 2) = \frac{3,269}{EA}; \quad (6)$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot l_i}{EA} = \frac{1}{EA} (-7,9) \cdot (-0,465) \cdot 1,05 = \frac{1,929}{EA}. \quad (7)$$

Таким образом,

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -0,59 \text{ кН}. \quad (8)$$



Таблица 1

Геометрические характеристики стержней и внутренние усилия

| Наименование стержней | Длина, м | cos α | cos β | cos γ | Усилие         |              |
|-----------------------|----------|-------|-------|-------|----------------|--------------|
|                       |          |       |       |       | обозн.         | величина, кН |
| 9-10                  | 1,000    | 0     | 1     | 0     | O <sub>1</sub> | 0            |
| 9-12                  | 1,000    | 1     | 0     | 0     | O <sub>2</sub> | 0            |
| 11-12                 | 1,000    | 0     | 1     | 0     | O <sub>3</sub> | 0            |
| 10-11                 | 1,000    | 1     | 0     | 0     | O <sub>4</sub> | 0            |
| 5-6                   | 2,000    | 0     | 1     | 0     | O <sub>5</sub> | 0            |
| 5-8                   | 2,000    | 1     | 0     | 0     | O <sub>6</sub> | 0            |
| 7-8                   | 2,000    | 0     | 1     | 0     | O <sub>7</sub> | -15,03       |
| 6-7                   | 2,000    | 1     | 0     | 0     | O <sub>8</sub> | -15,03       |
| 6-10                  | 1,024    | 0,488 | 0,488 | 0,724 | S <sub>1</sub> | 0            |
| 5-9                   | 1,024    | 0,488 | 0,488 | 0,724 | S <sub>2</sub> | 0            |
| 8-12                  | 1,024    | 0,488 | 0,488 | 0,724 | S <sub>3</sub> | 0            |
| 7-11                  | 1,024    | 0,488 | 0,488 | 0,724 | S <sub>4</sub> | 30,79        |
| 2-6                   | 1,050    | 0     | 0     | 1     | S <sub>5</sub> | -7,90        |
| 1-5                   | 1,050    | 0     | 0     | 1     | S <sub>6</sub> | 0            |
| 4-8                   | 1,050    | 0     | 0     | 1     | S <sub>7</sub> | -61,62       |
| 3-7                   | 1,050    | 0     | 0     | 1     | S <sub>8</sub> | 22,29        |
| 7-10                  | 1,746    | 0,859 | 0,287 | 0,424 | T <sub>1</sub> | 0            |
| 6-9                   | 1,746    | 0,287 | 0,859 | 0,424 | T <sub>2</sub> | 0            |
| 5-12                  | 1,746    | 0,859 | 0,287 | 0,424 | T <sub>3</sub> | 0            |
| 8-11                  | 1,746    | 0,287 | 0,859 | 0,424 | T <sub>4</sub> | -52,36       |
| 1-6                   | 2,259    | 0     | 0,885 | 0,465 | T <sub>5</sub> | 0            |
| 3-6                   | 2,259    | 0,885 | 0     | 0,465 | T <sub>6</sub> | 16,98        |
| 1-8                   | 2,259    | 0,885 | 0     | 0,465 | T <sub>7</sub> | 16,98        |
| 3-8                   | 2,259    | 0     | 0,885 | 0,465 | T <sub>8</sub> | 67,80        |

Вычисляем усилия в стержнях грани нижней части фермы:

$$O_6 = -0,52 \text{ кН}; S_5 = -7,9 + 0,27 = -7,53 \text{ кН}; S_6 = 0,27 \text{ кН}; T_5 = -0,59 \text{ кН}.$$

Лишним неизвестным будем считать усилие  $T_9$  в стержне 2-5 (рис. 2).

$$\begin{aligned} & \text{В то же время } O_6 = -0,885T_9; O_7 = O_8 = -15,03 \text{ кН}; S_4 = 30,79 \text{ кН}; S_5 = -7,9 - 0,465T_9; \\ & S_6 = -0,465T_9; S_7 = -61,62 \text{ кН}; S_8 = 22,29 \text{ кН}; T_4 = -52,36 \text{ кН}; T_5 = T_9; \\ & T_6 = T_7 = 16,98 \text{ кН}; T_8 = 67,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Выразим площади поперечных сечений растянутых и сжатых стержней соответственно по формулам

$$A_i = \frac{N_i}{R_y}, A_i = \frac{N_i}{\Phi R_y} \tag{9}$$

где  $R_y$  – расчетное сопротивление,  $\Phi$  – коэффициент продольного изгиба.



Представляем функционал (1) в виде

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{0,885T_9}{\dot{\gamma} R_y} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 15,03}{\forall R_y} \cdot 2 + \frac{30,79}{R_y} \cdot 1,024 + \frac{7,9 - 0,465T_9}{\forall R_y} \cdot 1,05 + \frac{0,465T_9}{\forall R_y \cdot \gamma} \cdot 1,05 + \\
 & + \frac{61,62}{\phi R_y} \cdot 1,05 + \frac{22,29}{R_y} \cdot 1,05 + \frac{52,36}{\phi R_y} \cdot 1,746 + \frac{2T_9}{\phi R_y} \cdot 2,259 + \frac{2 \cdot 16,98}{R_y} \cdot 2,259 + \\
 & \frac{67,8}{R_y} \cdot 2,259 + \frac{\mu}{E} (0,885T_9\phi R_y + 2 \cdot 15,03\phi R_y + 30,79R_y \cdot 0,512 + \\
 & + (7,9 - 0,465T_9)\phi R_y \cdot 0,525 + 0,465\phi R_y \cdot 0,525 + 61,62\phi R_y \cdot 0,525 + \\
 & + 22,29R_y \cdot 0,525 + 52,36 \cdot 0,873 + T_9\phi R_y \cdot 2,259 + 16,98R_y \cdot 2,259 + 67,8R_y \cdot 1,13 - I_0E). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Уравнение (2) приобретает вид

$$\frac{1,77}{\phi R_y} - \frac{0,488}{\phi R_y} + \frac{4,518}{\phi R_y} + \frac{\mu_2}{E} (0,885\phi R_y - 0,244\phi R_y + 2,259\phi R_y) = 0, \quad (11)$$

или

$$\frac{2}{\phi R_y} + \frac{\mu\phi R_y}{E} = 0, \quad (12)$$

откуда

$$\mu = -\frac{2E}{\phi^2 R_y^2}. \quad (13)$$

Величина  $I_0$ , соответствующая статически определимой ферме, равна

$$\begin{aligned}
 I_0 = & \frac{1}{E} (0,885\phi R_y + 30,06\phi R_y + 15,764R_y + 4,14\phi R_y + 0,244\phi R_y + 32,35\phi R_y + \\
 & + 11,70R_y + 45,71\phi R_y + 38,357R_y + 76,614\phi R_y), \quad (14)
 \end{aligned}$$

или

$$I_0 = \frac{1}{E} (142,435R_y + 112,504\phi R_y). \quad (15)$$

Принимаем  $I_0 = \frac{1}{E} (150R_y + 115\phi R_y)$ .

Уравнение (9) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & 2,9T_9\phi R_y + 30,06\phi R_y + 15,764R_y + 4,14\phi R_y + 0,244\phi R_y + 32,35\phi R_y + \\
 & + 11,702R_y + 45,71\phi R_y + 38,358R_y + 76,614\phi R_y = 150R_y + 115\phi R_y, \quad (16)
 \end{aligned}$$

или

$$2,9T_9\phi R_y + 142,435R_y + 112,504\phi R_y = 150R_y + 115\phi R_y. \quad (17)$$

Таким образом,

$$T_9 = \left( \frac{2,6}{\phi} + 0,86 \right). \quad (18)$$



Таблица 2

Внутренние усилия и площади поперечных сечений стержней

| Наименование стержней | Длина, м | Усилие      |              | Площадь сечения $\bar{n}^2$ |
|-----------------------|----------|-------------|--------------|-----------------------------|
|                       |          | обозначение | величина, кН |                             |
| 9-10                  | 1,000    | $0_1$       | 0            |                             |
| 9-12                  | 1,000    | $0_2$       | 0            |                             |
| 11-12                 | 1,000    | $0_3$       | 0            |                             |
| 10-11                 | 1,000    | $0_4$       | 0            |                             |
| 5-6                   | 2,000    | $0_5$       | 0            |                             |
| 5-8                   | 2,000    | $0_6$       | -5,867       | 3,762                       |
| 7-8                   | 2,000    | $0_7$       | -15,03       | 9,635                       |
| 6-7                   | 2,000    | $0_8$       | -15,03       | 9,635                       |
| 6-10                  | 1,024    | $S_1$       | 0            |                             |
| 5-9                   | 1,024    | $S_2$       | 0            |                             |
| 8-12                  | 1,024    | $S_3$       | 0            |                             |
| 7-11                  | 1,024    | $S_4$       | 30,79        | 11,842                      |
| 2-6                   | 1,050    | $S_5$       | -10,314      | 6,117                       |
| 1-5                   | 1,050    | $S_6$       | -2,415       | 1,548                       |
| 4-8                   | 1,050    | $S_7$       | -61,62       | 39,5                        |
| 3-7                   | 1,050    | $S_8$       | 22,29        | 8,573                       |
| 7-10                  | 1,746    | $T_1$       | 0            |                             |
| 6-9                   | 1,746    | $T_2$       | 0            |                             |
| 5-12                  | 1,746    | $T_3$       | 0            |                             |
| 8-11                  | 1,746    | $T_4$       | -52,36       | 33,564                      |
| 1-6                   | 2,259    | $T_5$       | 5,193        | 1,997                       |
| 3-6                   | 2,259    | $T_6$       | 16,98        | 6,531                       |
| 1-8                   | 2,259    | $T_7$       | 16,98        | 6,531                       |
| 3-8                   | 2,259    | $T_8$       | 67,80        | 26,077                      |
| 2-5                   | 2,259    | $T_9$       | 5,193        | 1,997                       |

Переходим к составлению уравнений (9):

для стержня 5-8 
$$1 - \frac{2\dot{A}}{\varphi^2 R_\delta^2} \frac{(0,885T_9)^2}{2EA_1^2 \varphi^2} = 0, \quad A_1 = \frac{0,885T_9}{\varphi^2 R_\delta}, \quad (19)$$

для стержня 2-6 
$$1 - \frac{2\dot{A}}{\varphi^2 R_\delta^2} \frac{(7,9 + 0,465T_9)^2}{2EA_2^2 \varphi^2} = 0, \quad A_2 = \frac{7,9 + 0,465T_9}{\varphi^2 R_\delta}, \quad (20)$$

для стержня 1-5 
$$1 - \frac{2\dot{A}}{\varphi^2 R_\delta^2} \frac{(0,465T_9)^2}{2EA_3^2 \varphi^2} = 0, \quad A_3 = \frac{0,465T_9}{\varphi^2 R_\delta}, \quad (21)$$

для стержня 1-6 
$$1 - \frac{2\dot{A}}{\varphi^2 R_\delta^2} \frac{T_9^2}{2EA_4^2} = 0, \quad A_4 = \frac{T_9}{\varphi R_\delta}. \quad (22)$$



В табл. 2 представлены усилия и площади поперечных сечений, при  $R_y = 260 \text{ МПа}$  (сталь С390) и  $\varphi=0,6$ .

Для стержней с нулевыми усилиями площади сечений принимаются по конструктивным соображениям.

Полученный оптимальный вариант стержневой конструкции обладает наибольшей жесткостью, ему соответствуют минимальные перемещения.

При большем количестве лишних неизвестных отличие решения состоит в составлении системы уравнений для их определения, которая носит линейный характер.

### Выводы

1. Рассмотрение проблем анализа и синтеза строительных конструкций основывается на методологическом единстве методов их решения, основой для которого являются вариационные принципы строительной механики.

2. Энергетический критерий оптимальности, выявленный при вариационной постановке изопериметрической задачи структурного синтеза в виде уравнений структурообразования, является основополагающим критерием качества конструкции.

3. Критерий минимума объема имеет обоснование лишь при возможности двойственной постановки проектной задачи и дополнительном условии, имеющем энергетическую основу.

4. Использование энергетического критерия и критерия минимума объема для оптимального проектирования стержневой конструкции сводится к решению систем алгебраических уравнений, определяющему глобальный экстремум целевой функции.

5. Вариационная постановка задачи позволяет решать проблему безопасной устойчивости сжатых стержней на уровне оптимального проекта.

### Литература

1. Клюев С.В. Оптимизация строительных конструкций / С.В. Клюев // Молодые ученые – производству. Сб. науч. тр. регион. конф. – Старый Оскол: СТИ МИСиС, 2006. – С. 242-247.
2. Клюев С.В. Расчет внутренне статически неопределимой пространственной фермы / С.В. Клюев, А.Г. Юрьев // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова, 2005, №10. – С. 375-378.
3. Юрьев А.Г. Основы проектирования рациональных несущих конструкций / А.Г. Юрьев. – Белгород: БТИСМ, 1988. – 94 с.
4. Юрьев А.Г. Энергетический критерий структурообразования несущих конструкций / А.Г. Юрьев, С.В. Клюев // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, 2006, №2. – С. 90-91.